

UNIVERSIDAD CATÓLICA DE LA SANTÍSIMA CONCEPCIÓN

FACULTAD DE INGENIERÍA
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA ELÉCTRICA



UCSC

Toolbox para resolución de tomografía de impedancia eléctrica con método de elementos de contorno

Diego Alonso Albarrán Concha

Informe de Habilitación Profesional para optar al título de:
Ingeniero Civil Eléctrico

Profesor Patrocinante:
Dr. Samuel A. Vergara R.

Profesores Guía:
Dr. Jaime A. Cariñe C.
Mg. Ricardo I. León C.

Concepción, Octubre 2025

UNIVERSIDAD CATÓLICA DE LA SANTISIMA CONCEPCION
Facultad de Ingeniería
Departamento de Ingeniería Eléctrica

Profesor Patrocinante:
Dr. Samuel A. Vergara R.

Toolbox para resolución de tomografía de impedancia eléctrica con método de elementos de contorno.

Diego Alonso Albarrán Concha

Informe de Habilitación Profesional
para optar al Título de

Ingeniero Civil Eléctrico

Octubre 2025

Resumen

La Tomografía de Impedancia Eléctrica (TIE) es una técnica de imagen no invasiva que permite estimar la distribución de conductividad de un dominio a partir de mediciones de voltaje en su frontera. En este contexto, el presente proyecto evaluó un toolbox desarrollado en MATLAB basado en el Método de Elementos de Contorno (BEM) para el problema directo de TIE, contrastándolo con EIDORS, que utiliza el Método de Elementos Finitos (FEM). Se trabajó bajo el criterio de que un toolbox para BEM bien implementado entregaría resultados comparables a FEM en EIDORS con manteniendo tiempos de simulación similares.

Se diseñó una comparación controlada manteniendo fija una geometría circular de radio unitario, representativa de una sección transversal típica en TIE. con 16 electrodos distribuidos uniformemente, el mismo patrón de inyección y las mismas condiciones de contorno. Se estudiaron dos escenarios, uno con medio homogéneo y otro con una inclusión cercana al borde. En ambos se barrió la conductividad del medio entre 0.01 y 2.0 S/m, la impedancia de contacto entre 0.01 y 10 Ω y la corriente inyectada entre 0.005 y 0.03 A. Además, se analizó el efecto de la discretización superficial mediante la variación del número de elementos entre electrodos y los segmentos por electrodo. En el caso con inclusión se variaron también su conductividad y el número de segmentos de la inclusión. Para cada condición se obtuvieron los voltajes en electrodos y se calculó el error absoluto y relativo de la norma de voltaje entre BEM y FEM, junto con el tiempo de simulación.

Los resultados mostraron que BEM-EIT reprodujo de manera consistente las tendencias físicas esperadas y alcanzó concordancia cercana a EIDORS en FEM. En medio homogéneo, aumentar la conductividad redujo los errores, subir la impedancia de contacto disminuyó el error relativo e incrementar la corriente multiplicó el error absoluto sin alterar el relativo, lo que es coherente con la linealidad del modelo. La discretización fue determinante para los distintos resultados, ya que el error se redujo hasta alcanzar una saturación a partir de 6 segmentos por electrodo.

En rendimiento, los tiempos dependieron sobre todo del tamaño y la estructura de los sistemas lineales. En homogéneo, FEM y BEM operaron en el mismo orden de milisegundos. Con inclusión, el tiempo de BEM-EIT creció por el contorno interno adicional, mientras FEM de EIDORS permaneció prácticamente constante. En conjunto, el toolbox de BEM demostró ser una alternativa válida a FEM en EIDORS para el problema directo de TIE.

A los alumnos del pasado, presente y futuro de la carrera de Ingeniería Civil Eléctrica de la U.C.S.C.

Agradecimientos

A mi familia Miguel Albarrán, Marisol Concha y Monserrat Albarrán, gracias por ser mi casa y mi impulso. Su amor, cada broma a tiempo y cada abrazo sincero que me devolvieron la fuerza cuando el camino se hacía cuesta arriba. Este logro también les pertenece, lo construimos juntos paso a paso. Gracias por su paciencia infinita, por su fe en mí cuando flaqueaba, por las palabras simples que sanan y por el ejemplo diario de trabajo y cariño. Me enseñaron a levantarme, a celebrar con gratitud y a seguir con el corazón tranquilo. Los amo con el alma.

A mi querida Andrea Rozas, gracias por llenarme de amor y de calma. Has sido refugio y empuje, celebración y compañía. Tu fe en mí me sostuvo en días difíciles e hizo que los buenos fueran aún mejores. Gracias por estar, de verdad.

A mis compañeros y compañeras de este viaje Jaime, Pablo, Agustín, Sergio, Camila, Matías, Julio, Alex, Mauricio, Patricio, Benjamín, Nicolas y muchos otros más, gracias por las horas compartidas, los proyectos que se alargaron, las conversaciones que nos pillaron de madrugada, las risas que despejaron la mente y los consejos que ordenaron las ideas. Con ustedes todo fue más llevadero y cada meta más alcanzable. Gracias por las manos levantadas cuando faltaba energía.

A mi profesor guía Samuel Vergara, gracias por la paciencia, la claridad y la confianza. Sus consejos marcaron ruta cuando la brújula dudaba y su exigencia amable me empujó a dar lo mejor de mí. No sé si habría llegado hasta aquí sin su guía.

Finalmente, a mis abuelos que descansen en paz, y en especial a mi abuelita Eva Jaque. Aunque no estés aquí para verlo, siento tu cariño en cada logro. Este paso también es tuyo. Te amo y te extraño, abuelita.

¡Gracias por todo!

Tabla de Contenidos

LISTA DE TABLAS	VIII
LISTA DE FIGURAS	IX
NOMENCLATURA.....	X
ABREVIACIONES	X
CAPÍTULO 1. INTRODUCCIÓN	1
1.1. INTRODUCCIÓN GENERAL	1
1.2. TRABAJOS PREVIOS	3
1.2.1 Tomografía de impedancia eléctrica	3
1.2.2 Método de elementos de contorno	6
1.2.3 Discusión	10
1.3. HIPÓTESIS DE TRABAJO	12
1.4. OBJETIVOS	12
1.4.1 Objetivo General	12
1.4.2 Objetivos Específicos	12
1.5. ALCANCES Y LIMITACIONES	12
1.6. TEMARIO Y METODOLOGÍA	13
1.6.1 Temario.....	13
1.6.2 Metodología.....	14
CAPÍTULO 2. TOMOGRAFÍA DE IMPEDANCIA ELÉCTRICA.....	16
2.1. INTRODUCCIÓN	16
2.2. TOMOGRAFÍA DE IMPEDANCIA ELÉCTRICA.....	16
2.2.1 Problema directo	17
2.2.2 Métodos para la solución del problema directo	17
2.2.3 Problema inverso.....	18
2.3. MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS.....	19
2.4. SOFTWARE EIDORS.....	19
2.5. TOOLBOX BEM-EIT	20
CAPÍTULO 3. COMPARACIÓN DE MODELO FEM Y BEM CASOS HOMOGÉNEOS	22
3.1. INTRODUCCIÓN	22
3.2. HOMOGENEIDAD DE FEM Y BEM	22
3.3. METODOLOGÍA Y MÉTRICAS DE COMPARACIÓN	23
3.4. RESULTADOS DE COMPARACIÓN BAJO DISTINTOS PARÁMETROS	25
3.4.1 Conductividades del medio.....	25
3.4.2 Impedancias de contacto	27
3.4.3 Números de elementos en el espacio entre electrodos (NEEE)	29
3.4.4 Números de segmentos por electrodo (NSE)	31
3.4.5 Corriente inyectada	34
3.5. RESUMEN CASO HOMOGÉNEO.....	36
CAPÍTULO 4. COMPARACIÓN DE MODELO FEM Y BEM CASOS HETEROGÉNEOS	38
4.1. INTRODUCCIÓN	38
4.2. HETEROGENEIDAD FEM Y BEM.....	38
4.3. RESULTADOS DE COMPARACIÓN BAJO DISTINTOS PARÁMETROS	40
4.3.1 Conductividades del medio.....	40
4.3.2 Impedancia de contacto.....	43
4.3.3 Números de elementos en el espacio entre electrodos (NEEE)	45
4.3.4 Números de segmentos por electrodo (NSE)	48
4.3.5 Corriente inyectada	51
4.3.6 Conductividades de la inclusión	53

4.3.7	<i>Números de segmentos de la inclusión</i>	55
4.4.	RESUMEN CASO HETEROGÉNEO	57
CAPÍTULO 5. CONCLUSIONES		60
5.1.	SUMARIO	60
5.2.	CONCLUSIONES	61
5.3.	TRABAJO FUTURO	62
BIBLIOGRAFÍA		63

Lista de Tablas

Tabla 1.1 Parámetros Físicos	15
Tabla 2.1 Métodos de reconstrucción del problema directo	18
Tabla 3.1 Resumen de tendencias de métricas y tiempos según parámetros del modelo caso homogéneo	36
Tabla 4.1 Resumen de tendencias de métricas y tiempos según parámetros del modelo caso heterogéneo	58

Lista de Figuras

Fig. 2.1 a) Modelo FEM (Eidors) b) Modelo BEM (BEM-EIT) Homogéneo.....	21
Fig. 3.1 Comparación de voltajes (BEM vs FEM) Homogéneo	23
Fig. 3.2 EANV y ERNV vs. conductividad del medio (Homogéneo)	25
Fig. 3.3 Tiempos (s) de FEM y BEM con mediana y banda Q1-Q3 en función de la conductividad del medio (Homogéneo).....	26
Fig. 3.4 EANV y ERNV vs. Impedancia de contacto Z_e (Homogéneo).....	27
Fig. 3.5 Tiempos (s) de FEM y BEM con mediana y banda Q1-Q3 en función de impedancia de contacto Z_e	28
Fig. 3.6 EANV y ERNV vs. NEEE (Homogéneo).....	29
Fig. 3.7 Tiempos (s) de FEM y BEM con mediana y banda Q1-Q3 en función de NEEE.....	31
Fig. 3.8 EANV y ERNV vs. NSE (Homogéneo)	32
Fig. 3.9 Tiempos (s) de FEM y BEM con mediana y banda Q1-Q3 en función de NSE	33
Fig. 3.10 EANV y ERNV vs. Corriente inyectada (Homogéneo)	34
Fig. 3.11 Tiempos (s) de FEM y BEM con mediana y banda Q1-Q3 en función de la corriente inyectada.....	35
Fig. 4.1 a) Modelo FEM (Eidors) b) Modelo BEM (BEM-EIT) Heterogéneo	39
Fig. 4.2 Comparación de voltajes (BEM vs FEM) Heterogéneo	40
Fig. 4.3 EANV y ERNV vs. conductividad del medio (Heterogéneo)	41
Fig. 4.4 Tiempos (s) de FEM y BEM con mediana y banda Q1-Q3 en función de σ del medio (Heterogéneo).....	42
Fig. 4.5 EANV y ERNV vs. Impedancia de contacto Z_e (Heterogéneo).....	43
Fig. 4.6 Tiempos (s) de FEM y BEM con mediana y banda Q1-Q3 en función de la impedancia de contacto (Heterogéneo)	45
Fig. 4.7 EANV y ERNV vs. NEEE (Heterogéneo).....	46
Fig. 4.8 Tiempos (s) de FEM y BEM con mediana y banda Q1-Q3 en función de NEEE (Heterogéneo).....	47
Fig. 4.9 EANV y ERNV vs. NSE (Heterogéneo)	49
Fig. 4.10 Tiempos (s) de FEM y BEM con mediana y banda Q1-Q3 en función de NSE (Heterogéneo).....	50
Fig. 4.11 EANV y ERNV vs. Corriente inyectada (Heterogéneo)	51
Fig. 4.12 Tiempos (s) de FEM y BEM con mediana y banda Q1-Q3 en función de la corriente inyectada (Heterogéneo)	52
Fig. 4.13 EANV y ERNV vs. Conductividad de la inclusión (Heterogéneo)	53
Fig. 4.14 Tiempos (s) de FEM y BEM con mediana y banda Q1-Q3 en función de la conductividad de la inclusión (Heterogéneo)	54
Fig. 4.15 EANV y ERNV vs. Segmentos de la inclusión (Heterogéneo)	55
Fig. 4.16 Tiempos (s) de FEM y BEM con mediana y banda Q1-Q3 en función de los segmentos de la inclusión (Heterogéneo)	56

Nomenclatura

σ_{medio}	: Conductividad del medio.
σ_{inc}	: Conductividad de la inclusión
Z_e	: Impedancia de contacto.
$Segs_{inc}$	: Segmentos de la inclusión

Abreviaciones

Mayúsculas

B.E.M	: (Método de Elementos de Contorno) Boundary Elements Method.
F.E.M	: (Método de Elementos Finitos) Finite Elements Method.
T.I.E.	: Tomografía de Impedancia Eléctrica.
C.T.	: Tomografía Computarizada.
M.R.I.	: Resonancia Magnética
I.A.	: Inteligência Artificial.
D.N.N.	: Redes Neuronales Profundas.
T.R.E.	: Tomografía de Resistencia Eléctrica.
C.N.N.	: Red Convolucional.
T.S.D.L.	: Aprendizaje Profundo de Dos Etapas.
R.M.S.E.	: Reducción Significativa en el Error Cuadrático Medio.
S.S.I.M.	: Índice de Similitud Estructural.
T.V.	: Variación Total.
N.E.E.E.	: Número de Elementos en el espacio entre Electrodo.
N.S.E.	: Número de Segmentos por Electrodo.
E.A.N.V.	: Error Absoluto de la Norma de Voltaje.
E.R.N.V.	: Error Relativo de la Norma de Voltaje.

Capítulo 1. Introducción

1.1. Introducción General

La Tomografía de Impedancia Eléctrica (TIE) es una técnica de imagen no invasiva que permite estimar la distribución de conductividad eléctrica en el interior de un objeto, mediante la inyección de corriente y la medición de voltajes en electrodos dispuestos sobre su superficie. Gracias a esta capacidad para inferir propiedades internas sin intervenir directamente el medio, la TIE ha encontrado aplicaciones en múltiples áreas. En medicina, se utiliza principalmente en la monitorización pulmonar para detectar variaciones en la ventilación, en la evaluación de la perfusión sanguínea y en el seguimiento de la función cardíaca, constituyéndose como una herramienta complementaria a técnicas de imagen más consolidadas. En geofísica, la TIE se emplea en prospección de recursos hídricos subterráneos, en la detección de contaminantes y en la caracterización de estructuras del subsuelo. En la ingeniería de materiales, permite estudiar la homogeneidad de compuestos, la detección de defectos internos y el control de procesos de fabricación. Estas diversas aplicaciones evidencian el potencial de la TIE como una técnica versátil y de amplio impacto.

Actualmente el FEM es el más extendido en la comunidad científica gracias a herramientas como EIDORS. Una de sus principales fortalezas es su capacidad para modelar dominios con geometrías complejas y materiales heterogéneos, además de permitir un control detallado del mallado y la inclusión de condiciones de frontera diversas, lo que lo convierte en un enfoque sumamente versátil. En TIE, el problema inverso es no lineal y mal condicionado con independencia del método usado para el problema directo, por lo que al emplear FEM estas características deben abordarse con algoritmos iterativos y técnicas de regularización. El carácter no lineal implica que la relación entre los voltajes medidos y la distribución interna de conductividad no puede resolverse con una expresión simple, sino que requiere aproximaciones sucesivas y algoritmos iterativos, lo que incrementa la carga de cálculo. A su vez, la naturaleza mal condicionada significa que pequeñas perturbaciones o errores en las mediciones pueden amplificarse y producir variaciones significativas en la reconstrucción, comprometiendo la estabilidad de la solución. Estas limitaciones hacen necesario el uso de regularizaciones sofisticadas y técnicas de estabilización que, si bien permiten obtener resultados confiables, aumentan considerablemente el consumo de recursos computacionales, especialmente en simulaciones de alta resolución o en geometrías tridimensionales.

Como alternativa, en este trabajo se propone el uso del Método de Elementos de Contorno (BEM) mediante el desarrollo de un toolbox funcional denominado BEM-EIT, el cual se centra exclusivamente en discretizar la frontera del dominio en lugar de su interior. Esta característica ofrece ventajas directas: reduce de manera significativa el número de ecuaciones involucradas, disminuye los requerimientos de memoria y simplifica el manejo de condiciones de contorno, lo que en conjunto se traduce en una reducción importante del tiempo de simulación. Además, al trabajar únicamente sobre el contorno, el BEM permite preservar con mayor fidelidad la geometría de los electrodos y de los límites externos del dominio, lo que resulta especialmente valioso en estudios bidimensionales. De este modo, el BEM se presenta como una alternativa frente al FEM, ya que busca mantener la precisión en la modelación sin incurrir en los altos costos computacionales asociados al mallado volumétrico.

Por otro lado, a diferencia del Método de Elementos Finitos, que cuenta con herramientas consolidadas como EIDORS, ampliamente validadas y disponibles en la comunidad científica, el Método de Elementos de Contorno no dispone de un toolbox específico ni estandarizado para su aplicación en Tomografía por Impedancia Eléctrica (TIE). Esta carencia representa una limitación importante en términos de accesibilidad y facilidad de uso para investigadores. EIDORS, por su parte, está implementado sobre el entorno de programación MATLAB, lo que facilita su integración con otros módulos numéricos y su manipulación a través de scripts, permitiendo simulaciones flexibles y reproducibles.

El objetivo principal de este proyecto es comparar el toolbox BEM-EIT con EIDORS dentro del entorno de programación MATLAB. Para ello, se realizarán múltiples experimentos numéricos en MATLAB utilizando ambos enfoques bajo las mismas condiciones de simulación, ajustando diversos parámetros que influyen directamente en el comportamiento de los modelos. Entre los parámetros que se modificarán se encuentran la conductividad del medio, la conductividad de la inclusión, la impedancia de los electrodos, la corriente inyectada, el número de elementos en el espacio entre electrodos, el número de segmentos que componen cada electrodo y el número de segmentos de la inclusión. La comparación entre ambos métodos se llevará a cabo utilizando métricas cuantitativas, entre ellas la norma de la diferencia de voltajes y errores estadísticos. Además, se evaluará la capacidad computacional de cada enfoque, considerando el tiempo de simulación como una métrica clave para analizar su rendimiento.

El análisis de estos resultados permitirá determinar en qué condiciones el método BEM es capaz de entregar resultados comparables a los obtenidos con FEM, identificando sus fortalezas y limitaciones en distintos escenarios físicos. De esta forma, se busca aportar al desarrollo de herramientas computacionales más eficientes para la TIE, contribuyendo a su aplicación en contextos donde la optimización de recursos computacionales y el tiempo de cálculo son factores determinantes para la implementación de esta tecnología.

1.2. Trabajos Previos

En esta sección se presentan distintos estudios relacionados con la Tomografía de Impedancia Eléctrica (TIE), el uso del Método de Elementos Finitos (FEM) y el método de elementos de contorno (BEM) en simulaciones de TIE, así como el desarrollo y análisis de software especializado como EIDORS y el Toolbox BEM-EIT. Esta revisión busca proporcionar una comprensión amplia y detallada de los avances y limitaciones en la reconstrucción de imágenes de TIE, destacando los aportes y desafíos de cada metodología.

1.2.1 Tomografía de impedancia eléctrica

- ♣ X.-Y. Ke *et al.*, «Advances in electrical impedance tomography-based brain imaging», *Mil. Med. Res.*, vol. 9, n.º 1, p. 10, feb. 2022, doi: 10.1186/s40779-022-00370-7. [1]

El artículo ofrece una visión innovadora sobre los recientes progresos en el uso de la tomografía de impedancia eléctrica (TIE) en la neurología. La TIE se presenta como una técnica funcional no invasiva que mide las propiedades eléctricas de los tejidos del cuerpo humano, evaluando las impedancias de transferencia entre los electrodos en la superficie de este mismo.

Este método tiene un gran potencial en el área de la salud en el diagnóstico y tratamiento de enfermedades cerebrales, debido a su capacidad para proporcionar imágenes en tiempo real. Entre sus múltiples aplicaciones, se encuentran investigaciones de enfermedades como la epilepsia, lesiones cerebrales, accidentes cerebrovasculares y edema. Cabe destacar que se encuentran mejoras en la profundidad de imagen para la epilepsia y sistema de monitoreo para accidentes cerebrovasculares.

Sin embargo, el artículo comenta que aún existen desafíos que debe superar la TIE, como la necesidad de mayor realismo de la anatomía humana, la heterogeneidad de los tejidos y la influencia del cerebro en la presión de las imágenes. A pesar de las limitaciones, el artículo destaca la importancia

de seguir investigando para consolidar la TIE como una herramienta diagnóstica confiable en entornos clínicos.

- ♣ T. A. Khan y S. H. Ling, «Review on Electrical Impedance Tomography: Artificial Intelligence Methods and its Applications», *Algorithms*, vol. 12, n.º 5, Art. n.º 5, may 2019, doi: 10.3390/a12050088. [2]

El documento muestra los avances de la TIE y cómo la inteligencia artificial ha sido utilizada como herramienta para la resolución de problemas inversos complejos y no lineales. TIE es una técnica de imagen de bajo costo que mide las propiedades eléctricas internas del cuerpo humano mediante electrodos externos. Aunque tiene una resolución más baja en comparación con Resonancia Magnética (MRI) o Tomografía Computarizada (CT), es portátil y rápida, lo que la hace una buena aplicación médica.

Los resultados de este estudio muestran que los métodos de IA, como el uso de redes neuronales y algoritmos evolutivos, han avanzado significativamente la calidad de las imágenes construidas, superando limitaciones pasadas de TIE, como su alta sensibilidad al ruido y su naturaleza inestable.

- ♣ E. Ma, «An equilibrium finite element method for electrical impedance tomography», *Eng. Res. Express*, vol. 5, n.º 1, p. 015042, mar. 2023, doi: 10.1088/2631-8695/acb905. [3]

El artículo indica un innovador enfoque numérico para mejorar la precisión en la estimación de la distribución de la densidad de corriente en las aplicaciones de TIE. Este nuevo método se caracteriza por su discretización del calor de Joule, lo que da una aproximación más clara de la densidad de corriente y, por consiguiente, una reconstrucción más exacta de la distribución de potencial, esencialmente para lograr imágenes en TIE.

Las simulaciones realizadas por el artículo son en modelos 2D y 3D, y se muestra que este método supera a los enfoques tradicionales de FEM en términos de precisión, incluso utilizando la misma malla, lo que subraya su eficiencia y practicidad.

- ♣ S. J. Hamilton y A. Hauptmann, «Deep D-Bar: Real-Time Electrical Impedance Tomography Imaging With Deep Neural Networks», *IEEE Trans. Med. Imaging*, vol. 37, n.º 10, pp. 2367-2377, oct. 2018, doi: 10.1109/TMI.2018.2828303. [4]

El documento presenta características innovadoras para la TIE, debido a que se utiliza Redes Neuronales Profundas (DNN). Se destaca la necesidad de mejorar la precisión y velocidad de reconstrucción de las imágenes. Es por esto por lo que se propone un nuevo método que integra DDN con el algoritmo D-Bar, que tradicionalmente se utiliza en TIE, para mejorar la calidad de las imágenes.

Los resultados que presenta el artículo muestran que este método no solo aumenta drásticamente la resolución de las imágenes que se obtienen, sino también, reduce el tiempo de procesamiento, permitiendo aplicaciones en tiempo real. Asimismo, el estudio sugiere que la combinación de DNN con algoritmos tradicionales como D-Bar, tiene un gran potencial para mejorar, obteniendo nuevas posibilidades para el diagnóstico y monitoreo en tiempo real.

- ♣ J. Dusek y J. Mikulka, «Measurement-Based Domain Parameter Optimization in Electrical Impedance Tomography Imaging», *Sensors*, vol. 21, n.º 7, Art. n.º 7, ene. 2021, doi: 10.3390/s21072507. [5]

El artículo aborda la optimización de los parámetros clave para mejorar la precisión en la TIE. Se destaca la importancia de afinar modelos matemáticos y físicos para lograr reconstrucciones de imágenes más precisas. Mediante el uso del algoritmo de Nelder-Mead y un modelo completo de electrodos, los autores optimizan parámetros como el desajuste de electrodos y la conductividad inicial, donde se valida el proceso con simulaciones y mediciones experimentales. Los resultados demuestran que la optimización reduce significativamente los errores de conductividad y mejora la localización de heterogeneidades. Sin embargo, existen desafíos a superar, como la dualidad indeseable que puede surgir en configuraciones de conducción opuesta. Así, la investigación destaca la optimización para correlacionar modelos y eliminar ruidos en la imagen TIE.

1.2.2 Método de elementos de contorno

- ♣ S. N. Makarov *et al.*, «Boundary Element Fast Multipole Method for Modeling Electrical Brain Stimulation with Voltage and Current Electrodes», *J. Neural Eng.*, vol. 18, n.º 4, p. 10.1088/1741-2552/ac17d7, ago. 2021, doi: 10.1088/1741-2552/ac17d7. [6]

El artículo muestra un significativo avance en el modelo de la estimulación eléctrica del cerebro mediante el método de BEM-FMM, alternativa al Método de Elementos Finitos (FEM). Este innovador enfoque combina ecuaciones integrales del BEM con un método de multipolo rápido, permitiendo modelar con alta precisión tipos de electrodos, como los de voltaje y corriente, y conservar el cumplimiento de leyes de conversión como la LCK. En las simulaciones que se realizaron, el BEM-FMM demostró una precisión superior, con errores inferiores al 1% en comparación con soluciones analíticas. Además, este método no necesita de una malla volumétrica, por lo que se hace particularmente eficaz para modelar problemas a mesoescala con resolución submilimétrica y favorece su integración en herramientas de modelado como Headreco o Mri2mesh.

- ♣ A. K. Khambampati, K. Y. Kim, Y.-G. Lee, y S. Kim, «Boundary element method to estimate the time-varying interfacial boundary in horizontal immiscible liquids flow using electrical resistance tomography», *Appl. Math. Model.*, vol. 40, n.º 2, pp. 1052-1068, ene. 2016, doi: 10.1016/j.apm.2015.06.026. [7]

El artículo se enfoca en la estimación de la frontera interfacial en flujos de líquidos inmiscibles dentro de una tubería horizontal, donde se utiliza la Tomografía de Resistencia Eléctrica (TRE) y el Método de Elementos de Contorno (BEM). Este tipo de flujo es importante en aplicaciones industriales como la industria del petróleo, la que es fundamental monitorear características como la velocidad de las fases y la fracción de líquido.

Se propone la combinación del BEM para formular el problema directo con un filtro de Kalman extendido para resolver el problema inverso, permitiendo estimar la ubicación de la frontera interfacial dinámica. Los resultados se obtuvieron mediante simulaciones numéricas y experimentos fantasmas en un dominio circular 2D, y se demuestra que este método es eficaz en la estimación precisa de la frontera interfacial. Además, se observa una mejora en la resolución temporal y espacial frente a métodos tradicionales que suponen una frontera estática a lo largo de la recopilación de datos.

Es así que la combinación de BEM y técnicas de estimación dinámica como el filtro Kalman extendido resulta favorable para el monitoreo de flujos de líquidos inmiscibles.

- ♣ Y. Xu, F. Dong, y C. Tan, «Electrical resistance tomography for locating inclusions using analytical boundary element integrals and their partial derivatives», *Eng. Anal. Bound. Elem.*, vol. 34, n.º 10, pp. 876-883, oct. 2010, doi: 10.1016/j.enganabound.2010.05.008. [8]

El documento aborda el desafío de mejorar la precisión en la localización de inclusiones dentro de materiales donde se utiliza la Tomografía de Resistencia Eléctrica (TRE). Se destaca que la TRE es una técnica novedosa que permite obtener imágenes de la conductividad eléctrica sin alterar físicamente el material, siendo especialmente útil para identificar lugares con propiedades eléctricas distintas, conocidas como inclusiones. No obstante, el problema inverso asociado a la TRE está mal condicionado y es no lineal, lo que complica la obtención de soluciones precisas.

Es por esto que se propone el uso del BEM junto con integrales analíticas y sus derivadas parciales, lo que permite ejemplificar el problema, enfocándose en los límites de las inclusiones en lugar de todo el volumen.

Los resultados que se obtienen muestran que hay una mejora significativa en la precisión de la localización de inclusiones y reduce el tamaño de la matriz del sistema, lo que aumenta la eficiencia computacional. Además, la matriz Jacobiana, a partir de derivadas parciales,

es importante para el proceso iterativo de la solución y el método Levenberg-Marquardt que permite la no linealidad del problema.

- ♣ T. Rymarczyk, K. Polakowski, y J. Sikora, «PDE-solved by boundary element method for electrical impedance tomography», *J. Phys. Conf. Ser.*, vol. 1782, n.º 1, p. 012030, feb. 2021, doi: 10.1088/1742-6596/1782/1/012030. [9]

El documento entrega un análisis a la solución del problema de ecuaciones diferenciales parciales, utilizando el método de elementos de contorno (BEM por sus siglas en inglés) para resolver el problema directo. El objetivo del artículo es crear un algoritmo adaptable y aplicable a diferentes tipos de tomografía, con el beneficio de que las condiciones de frontera sean más fáciles de aplicar en BEM que en FEM. Se destaca que el BEM es particularmente útil cuando no se pueden formular condiciones de contorno precisas en el límite exterior de la región de estudio.

Entre los resultados que se presentan, el uso del BEM minimiza el proceso de parametrización y dimensionamiento óptimo de objetos internos, eliminando la necesidad de remallado durante el proceso iterativo. También, los experimentos numéricos confirman la precisión de las imágenes obtenidas, especialmente cuando se utilizan protocolos de medición adyacente, lo que beneficia la localización de objetos cercanos a la frontera externa. (El BEM facilita el manejo de las condiciones de frontera, la optimización y la eficiencia computacional).

- ♣ E. Adam y S. Ammaiyappan, «Survey on Medical Imaging of Electrical Impedance Tomography (EIT) by Variable Current Pattern Methods», *J. ISMAC*, vol. 2, pp. 82-95, may 2021, doi: 10.36548/jismac.2021.2.002. [10]

El artículo presenta un análisis minucioso de los avances de la EIT aplicada a la imagenología médica, enfocándose en métodos de patrones de corriente variable. El objetivo del estudio es revisar métodos de reconstrucción de imágenes, donde se concentra especialmente en el BEM, que modela las fronteras del cuerpo y resuelve problemas asociados a EIT. Los resultados entregados indican que el BEM mejora ampliamente la resolución espacial y reduce los errores en la localización de inclusiones en los tejidos, gracias a la reducción del tamaño de la matriz del sistema y el manejo eficiente de las condiciones de frontera.

El texto indica que combinar algoritmos iterativos, como Levenberg-Marquardt con BEM, permite una mejor convergencia y precisión de la reconstrucción de imágenes, aún más cuando se utilizan configuraciones de corriente variable. En las simulaciones que se hicieron se logra mejorar la estabilidad de los cálculos en presencia de ruidos, lo que permite demostrar la robustez del método para aplicaciones clínicas en tiempo real.

- ♣ D. Liu, D. Gu, D. Smyl, J. Deng, y J. Du, «B-Spline-Based Sharp Feature Preserving Shape Reconstruction Approach for Electrical Impedance Tomography», *IEEE Trans. Med. Imaging*, vol. 38, n.º 11, pp. 2533-2544, nov. 2019, doi: 10.1109/TMI.2019.2905245. [11]

El documento presenta una innovadora forma para la reconstrucción de formas en la EIT utilizando curvas B-spline con un planteamiento en BEM. Por lo tanto, el principal objetivo es mejorar la calidad de imágenes en EIT y conservar las características nítidas de las inclusiones, que son áreas con propiedades eléctricas diferentes. Así, B-spline representa las fronteras de las inclusiones

mediante puntos de control, lo que aumenta la resolución de problemas inversos mal planteados y reduce la necesidad de remallado frecuente

A lo largo del estudio se utilizó un recipiente de agua para las simulaciones y experimentos, donde se prueba que la combinación B-spline con BEM supera a los métodos tradicionales basados en series de Fourier, tanto por la calidad de la imagen como por la preservación de características geométricas.

- ♣ Z. Li, J. Zhang, D. Liu, y J. Du, «CT Image-Guided Electrical Impedance Tomography for Medical Imaging», *IEEE Trans. Med. Imaging*, vol. 39, n.º 6, pp. 1822-1832, jun. 2020, doi: 10.1109/TMI.2019.2958670. [12]

En el documento se presentó una innovadora combinación de Tomografía computarizada (CT) y la TIE para mejorar la calidad de las imágenes en el ámbito de la salud, con un énfasis en el uso del BEM. Se aborda las limitaciones de TIE, en particular su baja resolución espacial, es por lo que se utiliza la CT para guiar y refinar las reconstrucciones de imágenes obtenidas por TIE. El BEM es una herramienta fundamental, en este caso, porque sirve para resolver el problema directo, modelando las fronteras del cuerpo y los cambios de conductividad. Además, el uso de BEM, junto con el enfoque de gradiente cruzado, mejoran ampliamente la resolución de las imágenes de conductividad, específicamente en la recuperación de bordes y detalles finos en inclusiones cercanas a la frontera. Por lo tanto, en el artículo se evidencia que el BEM ayuda a optimizar los cálculos en tiempo real y mejora la estabilidad frente a ruidos de los datos.

- ♣ S. Ren, K. Sun, C. Tan, y F. Dong, «A Two-Stage Deep Learning Method for Robust Shape Reconstruction With Electrical Impedance Tomography», *IEEE Trans. Instrum. Meas.*, vol. 69, n.º 7, pp. 4887-4897, jul. 2020, doi: 10.1109/TIM.2019.2954722. [13]

En el artículo se introduce una nueva forma para mejorar la reconstrucción de formas en TIE mediante un método de dos etapas que se emplea por BEM. Por esto, que para mejorar el método se combina un bloque de pre-construcción que proporciona una reconstrucción lineal del objeto y una red convolucional (CNN) que optimiza la imagen, por lo tanto, se utiliza BEM para modelar las fronteras del dominio y reducir la complejidad computacional. Los métodos que se implementaron se basaron en la creación de un gran conjunto de datos de entrenamiento a partir de simulaciones TIE generadas por imágenes CT de más de 792 pacientes.

Así, los datos obtenidos evidencian que el método TSDL, con la ayuda de BEM, logra una reducción significativa en el error cuadrático medio (RMSE) y una mejora en el índice de similitud estructural (SSIM) en comparación con métodos tradicionales como la Variación Total (TV).

1.2.3 Discusión

La Tomografía de Impedancia Eléctrica (TIE) es una técnica de imagen no invasiva que permite estimar la distribución de propiedades eléctricas en el interior de un medio mediante electrodos colocados en su superficie. En el ámbito médico, esta técnica se ha aplicado en el diagnóstico y tratamiento de enfermedades cerebrales gracias a su capacidad para generar imágenes en tiempo real [1]. Sin embargo, la TIE enfrenta desafíos relacionados con su baja resolución en comparación con otras técnicas, además de la necesidad de mejorar la precisión debido a la heterogeneidad de los tejidos y la influencia de estructuras como el cráneo [2]. La revisión de los artículos evidencia avances importantes en la superación de estas limitaciones, mediante el uso de inteligencia artificial, redes neuronales profundas y técnicas numéricas avanzadas [4], lo que sugiere un gran potencial para futuras aplicaciones clínicas. Estos avances incluyen el uso de algoritmos como el método Nelder-Mead para optimizar los parámetros de reconstrucción en la TIE, mejorando la localización de heterogeneidades [5].

En cuanto a las herramientas y software, investigaciones se destaca el uso del Método de Elementos de Contorno (BEM) como una solución efectiva para reducir la dimensionalidad del problema y mejorar la resolución de las imágenes [9]. El BEM ha mostrado ventajas en la modelización de fronteras del cuerpo, lo que permite resolver problemas directos en la TIE con mayor precisión y eficiencia computacional [10]. Este método ha sido empleado en combinación con algoritmos como Levenberg-Marquardt para optimizar la convergencia en problemas inversos [10]. También se ha demostrado que el BEM mejora la calidad de las imágenes cuando se utiliza con métodos avanzados como B-splines, los que ayudan a preservar las características geométricas nítidas de las inclusiones [11]. Además, el uso del BEM ha sido fundamental en la integración de la tomografía computarizada (CT) con la EIT, permitiendo una mejora significativa en la recuperación de detalles finos en los bordes de las imágenes [12]. Finalmente, estudios recientes han implementado

el BEM en enfoques de aprendizaje profundo, como el método de dos etapas TSDL, logrando mejoras en la precisión y reduciendo errores en la reconstrucción de formas complejas [13].

En ninguno de los trabajos mencionados se habla de la herramienta utilizada para resolver el problema directo de la TIE con BEM. Con respecto a el uso de FEM, si se encontraron referencias a EIDORS en [2] y [5] y se observa que es muy útil para la resolución del problema directo como para el inverso en EIT. Así mismo, EIDORS integra el FEM con regularización, como la regularización de Tikhonov, para estabilizar las soluciones de problemas inversos, que son mal condicionados y no lineales.

EIDORS es un software abierto que es ampliamente utilizado para el estudio de TIE con FEM, de hecho, en Google Scholar se encontraron distintos documentos donde se menciona que el software es muy popular debido a su flexibilidad y capacidad para integrar diversos modelos de elementos finitos y algoritmos de reconstrucción de imágenes [14]. Durante los últimos años la herramienta ha demostrado ser eficaz para la simulación del problema directo y la solución del problema inverso. No obstante, una de las grandes limitaciones observadas en los últimos estudios es la alta demanda computacional de FEM, particularmente en problemas de mayor escala o cuando se necesita una alta resolución espacial [15]. Aunque EIDORS ha evolucionado significativamente en su capacidad para procesar datos y optimizar modelos, sigue presentando retos en la velocidad de procesamiento y en la obtención de imágenes precisas, especialmente en escenarios que requieren resolución en tiempo real. La evolución del software ha sido respaldada por su naturaleza de código abierto, lo que facilita la colaboración internacional y la creación de nuevas versiones con optimizaciones enfocadas en la reducción de artefactos y una mejor visualización [16]. Sin embargo, se necesita seguir desarrollando métodos que reduzcan los tiempos de procesamiento y mejorar la estabilidad de las imágenes ante el ruido, lo que subraya la necesidad de nuevas estrategias en la resolución de problemas inversos en TIE.

Un toolbox de TIE basado en BEM podría contribuir a la investigación al ofrecer una alternativa orientada a simplificar la modelización de problemas complejos. Dado que el BEM trabaja exclusivamente con las fronteras del dominio, se plantea como un enfoque con el potencial de disminuir el tiempo de cálculo y de representar con mayor fidelidad geometrías de contorno. Esto abriría la posibilidad de explorar con mayor alcance aplicaciones avanzadas en TIE, favoreciendo nuevos desarrollos y mejoras tecnológicas. En este contexto, el presente proyecto propone la

comparación de una herramienta computacional para resolver el problema directo de la Tomografía de Impedancia Eléctrica (TIE) mediante el Método de Elementos de Contorno (BEM). Esta herramienta se desarrolla con el propósito de fortalecer la investigación en TIE, brindando una alternativa que permita evaluar sus ventajas y limitaciones frente al método tradicional de Elementos Finitos (FEM).

1.3. Hipótesis de Trabajo

El toolbox BEM-EIT puede resolver el problema directo de Tomografía de Impedancia Eléctrica con resultados similares a los obtenidos mediante el Método de Elementos Finitos implementado en EIDORS.

1.4. Objetivos

1.4.1 Objetivo General

Evaluar el desempeño del toolbox BEM-EIT implementado en MATLAB mediante el Método de Elementos de Contorno para el problema directo de Tomografía de Impedancia Eléctrica, contrastando sus resultados y tiempos de ejecución con respecto a el toolbox EIDORS basado en el Método de Elementos Finitos.

1.4.2 Objetivos Específicos

- Comprender el principio de la Tomografía de Impedancia Eléctrica y destacar su importancia social y medioambiental
- Definir experimentos a realizar con toolbox's (homogéneo y heterogéneo)
- Comparar ambos métodos con respecto a los distintos parámetros del modelo BEM (Conductividad, Impedancia, Corriente y nivel de discretización)
- Evaluar los tiempos de simulación de cada método para determinar las diferencias en desempeño computacional y su influencia en el proceso de modelado
- Determinar la influencia de los parámetros en la salida del BEM según los resultados

1.5. Alcances y Limitaciones

El presente trabajo se enfocará exclusivamente en simulaciones numéricas utilizando Matlab,

específicamente con el software EIDORS y el generador de mallas Netgen, sin realizar pruebas experimentales. Se trabajará con modelos bidimensionales para el análisis de Tomografía de Impedancia Eléctrica (TIE). La evaluación de los resultados se llevará a cabo mediante métricas cuantitativas, permitiendo una comparación objetiva del desempeño de los modelos empleados.

1.6. Temario y Metodología

1.6.1 Temario

En el Capítulo 1 se presenta una introducción general al proyecto, en donde se explican los fundamentos de la Tomografía de Impedancia Eléctrica (TIE) y la motivación para comparar los métodos numéricos FEM (Método de Elementos Finitos) y BEM (Método de Elementos de Contorno). También se incluyen los antecedentes relevantes, los objetivos, los alcances y las limitaciones del estudio.

Capítulo 2 está dedicado al marco teórico. Se profundiza en los principios físicos y matemáticos de la TIE, y se describen los enfoques numéricos utilizados para resolver el problema directo e inverso. Se abordan en detalle las características del software EIDORS (basado en FEM) y del Toolbox BEMEIT (basado en BEM), destacando sus ventajas, limitaciones y aplicaciones.

Capítulo 3 se muestran los resultados obtenidos. En esta sección se describe el diseño de las simulaciones numéricas para casos homogéneos, especificando los parámetros evaluados: conductividad del medio, impedancia de los electrodos, corriente inyectada, número de elementos en el espacio entre electrodos y número de segmentos en los propios electrodos. Además de analizar la precisión de los resultados mediante métricas como la norma de diferencia de voltajes del error absoluto, el error relativo y se incorpora el tiempo de simulación como una métrica adicional para comparar la eficiencia computacional entre los métodos FEM y BEM.

Capítulo 4 se detallan los resultados con inclusión. En esta sección se extiende el análisis a dominios con inclusión, considerando los parámetros adicionales: número de segmentos de la inclusión y conductividad de la inclusión, manteniendo el resto de condiciones equivalentes. Se analizan las mismas métricas de comparación: norma de diferencia de voltajes del error absoluto, error

relativo y tiempo de simulación.

Capítulo 5 se presentan las conclusiones del estudio, destacando las fortalezas y debilidades de cada método según los resultados obtenidos. Asimismo, se discuten las implicancias de utilizar BEM como una alternativa computacionalmente más eficiente en contextos específicos de TIE.

1.6.2 Metodología

La metodología utilizada fue la siguiente: primero se realizó una revisión bibliográfica. La búsqueda se centró en Tomografía de Impedancia Eléctrica (TIE/EIT), formulación del problema directo e inverso, métodos numéricos FEM y BEM, el software EIDORS, estrategias de regularización (p. ej., Tikhonov), impedancia de contacto y configuraciones de electrodos. Se consultaron artículos de ingeniería y biomedicina (p. ej., IEEE Xplore y Scopus), definiendo como ventana temporal 2019 en adelante. Se identificaron 13 documentos cuyo contenido se discute en el Capítulo 1, mientras que en el Capítulo 2 se sistematizan los fundamentos físicos y matemáticos y se describen los enfoques numéricos (FEM/BEM) que sustentan el estudio.

Posteriormente, se efectuó la comparación entre ambos toolboxes bajo condiciones equivalentes, se tomó EIDORS (FEM) como referencia y se replicaron los casos del problema directo en BEM-EIT (BEM) manteniendo la misma geometría circular, el tamaño y la disposición de los electrodos, el patrón de inyección de corriente y las condiciones de contorno, con el fin de aislar el efecto del método numérico. Se verificó la correspondencia físico-geométrica electrodo por electrodo (orden y numeración), así como la consistencia de la corriente inyectada y del modelo de impedancia de contacto en ambos entornos.

Se definieron dos escenarios de prueba, homogéneo y con inclusión. En ambos se realizó un barrido de parámetros: conductividad del medio, impedancia de los electrodos, corriente inyectada, número de elementos en el espacio entre electrodos y número de segmentos por electrodo. En el caso con inclusión se añadieron la conductividad de la inclusión y el número de segmentos de la inclusión, manteniendo el resto de las condiciones constantes para asegurar comparabilidad. Los valores para cada parámetro se muestran en la Tabla 1.1.

Tabla 1.1 Parámetros Físicos

Parámetro Variado	Conjunto de Valores Explorados
Conductividad del Medio	[0.01, 0.05, 0.1, 0.15, 0.5, 1.0, 1.5, 2.0] S/m
Impedancia de Contacto	[0.01, 0.05, 0.1, 0.5, 1, 5, 10] Ω
N° de elementos en el Espacio entre Electrodo	1, 2, ..., 15
N° de Segmentos por Electrodo	1, 2, ..., 15
Corriente Inyectada (corrientes)	[0.005, 0.01, 0.015, 0.02, 0.03] A
Caso con Inclusión	
Conductividad de la Inclusión	[0.01, 0.05, 0.1, 0.15, 0.5, 1.0, 1.5, 2.0] S/m
N° de Segmentos de la inclusión	[4, 8, 16, 20, 32, 64, 128]

La evaluación se llevó a cabo mediante métricas sobre los voltajes de los electrodos: norma de la diferencia de voltajes del error absoluto y error relativo de la norma de voltaje, además del tiempo de simulación como indicador de costo computacional. Para cada parámetro se registraron los vectores de voltaje por patrón de inyección y se agregaron estadísticas descriptivas (mediana y los cuartiles Q1 y Q3), complementadas con visualizaciones que muestran la evolución de las diferencias a lo largo de las 256 mediciones ($16 \cdot 16$) y su relación con la posición de los electrodos.

Finalmente, se organizaron los resultados de la siguiente forma, los experimentos y análisis para el caso homogéneo se presentan en el Capítulo 3, y los correspondientes al caso con inclusión en el Capítulo 4. La interpretación global, las fortalezas y limitaciones de cada enfoque y las implicancias para trabajos futuros se discuten en los capítulos finales.

Capítulo 2. Tomografía de impedancia eléctrica

2.1. Introducción

Este capítulo aborda la tomografía de impedancia eléctrica, explicando su concepto y sus ecuaciones matemáticas. Además, se presentarán el método FEM y un enfoque más reciente, el BEM. También se mencionarán el software de código abierto EIDORS y otra herramienta, el ToolBox.

2.2. Tomografía de impedancia eléctrica

La tomografía de impedancia eléctrica es una técnica no invasiva que permite obtener imágenes de las variaciones de impedancia eléctrica dentro de un volumen de interés. La EIT se realiza mediante reconstrucción matemática de los datos de impedancia eléctrica recopilados de una matriz de electrodos externos. A través de la relación entre corriente y voltaje, es posible reconstruir la distribución interna de un objeto. No obstante, este proceso es complejo debido a su carácter no lineal y mal condicionado, especialmente cuando se dispone de pocas mediciones, lo que complica la obtención de imágenes de alta calidad. Sin embargo, hay aplicaciones en las que no se requiere una reconstrucción precisa de la distribución de la conductividad.

$$\nabla \cdot (\sigma \nabla u) = 0, \text{ en } \Omega \quad (1)$$

$$u + Z_l \sigma \frac{\partial u}{\partial \nu} = U_l, x \in e_l \in \partial\Omega. l = 1, 2, \dots, L \quad (2)$$

$$\int_{e_l} \sigma \frac{\partial u}{\partial \nu} dS = I_l, x \in e_l \in \partial\Omega. l = 1, 2, \dots, L \quad (3)$$

$$\sigma \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0, x \in \partial\Omega \setminus \bigcup_{l=1}^L e_l \quad (4)$$

La ecuación (1) representa la ecuación de Laplace, donde u corresponde al potencial eléctrico y $(\sigma \nabla u)$ al flujo de corriente en el dominio Ω . Esta ecuación establece que, en un medio sin fuentes internas de corriente, la divergencia del flujo de corriente es nula, lo que implica un equilibrio en el flujo eléctrico en cualquier punto dentro del medio. La ecuación (2) se describe la función de Laplace donde u representa el potencial eléctrico, $\frac{\partial u}{\partial \nu}$ la corriente eléctrica. La ecuación (3) se describe como la condición de frontera y el valor de las corrientes inyectadas. La ecuación (4) se describe como la ecuación de borde [13].

2.2.1 Problema directo

El problema directo consiste en calcular los voltajes en los electrodos de medición a partir de una estimulación definida en un entorno con conductividad conocida. Este desafío suele abordarse mediante métodos numéricos, los cuales ofrecen la ventaja de adaptarse de manera flexible a distintas geometrías.

2.2.2 Métodos para la solución del problema directo

Los métodos de reconstrucción para el problema directo han avanzado partiendo de varias configuraciones geométricas con resistencias. Para tratar dominios más complejos y permitir una reconstrucción no lineal, es necesario utilizar procedimientos numéricos. Los enfoques más utilizados se pueden evidenciar en la tabla Tabla 2.1.

Tabla 2.1 Métodos de reconstrucción del problema directo

Métodos	Descripción
Diferencias Finitas (FDM)	Divide el medio de medición y el electrodo en una malla, y la solución se calcula en los puntos de intersección o en los nodos de dicha malla
Elementos Finitos (FEM)	Consiste en dividir un dominio, como una estructura o cuerpo, en subdominios que no se superponen, conocidos como elementos finitos. Cada uno de estos elementos representa una parte del dominio y se define por un conjunto de puntos llamados nodos. Los nodos están interconectados, formando una malla que abarca todo el dominio.
Elementos Contorno (BEM)	En lugar de dividir el dominio en elementos internos, el Método de Elementos de Contorno (BEM) se enfoca en la superficie del objeto o estructura. Esta superficie se segmenta en partes o elementos lineales.

En este trabajo se implementarán tanto el FEM como el BEM. El FEM consiste en dividir el dominio de interés en subdominios pequeños, llamados elementos finitos, donde se resuelven las ecuaciones diferenciales en puntos llamados nodos que forman una malla. Este enfoque es útil para problemas complejos y permite modelar con precisión la distribución interna de propiedades físicas, como la conductividad. Por otro lado, el BEM se centra en discretizar solo la frontera del dominio, lo que reduce significativamente el número de ecuaciones a resolver. Este método es más eficiente en términos de cálculo para ciertos tipos de problemas, especialmente cuando se requiere alta precisión en la definición de las fronteras del objeto, y es ideal para geometrías con contornos irregulares.

2.2.3 Problema inverso

El problema inverso consiste en determinar la conductividad de una región a partir de estimulaciones conocidas y mediciones en su contorno. Para obtener una solución, se divide la región en un número finito de elementos, lo que también se conoce como reconstrucción de imagen. En el caso de la EIT, el objetivo es obtener la distribución de conductividad utilizando el voltaje y la

corriente aplicada. Para ello, se emplea un modelo que predice las observaciones y minimiza la discrepancia entre los voltajes inyectados en los electrodos y los medidos

2.3. Método de elementos finitos

Este método divide el dominio del problema en elementos finitos, los cuales están definidos por un conjunto de puntos nodales. Las variables desconocidas se calculan a través de funciones establecidas en estos puntos. Este enfoque se basa en el principio del mínimo de energía potencial y se utiliza para simular varios fenómenos físicos, como la mecánica de sólidos, la transferencia de calor y el electromagnetismo.

2.4. Software EIDORS

EIDORS (Electrical Impedance and Diffuse Optical Reconstruction Software) es un software de código abierto desarrollado en Matlab, destinado a la reconstrucción de imágenes en Tomografía de Impedancia Eléctrica (EIT). Este programa puede resolver tanto el problema directo como el inverso en EIT, facilitando la creación de imágenes en dos o tres dimensiones que muestran la distribución de la conductividad eléctrica en una región u objeto de interés. EIDORS proporciona diversas funciones que facilitan la reconstrucción de imágenes. Para esto, es necesario utilizar varios comandos que permiten crear modelos donde se realizarán las reconstrucciones de EIT. Estos modelos se fundamentan en datos de potenciales obtenidos de cuerpos simulados, y la reconstrucción de la imagen se lleva a cabo utilizando algoritmos de reconstrucción y regularización

El software utiliza el método de elementos finitos (FEM) para resolver las ecuaciones de Laplace o Poisson en el caso de problemas de EIT. En este enfoque, la región de interés se discretiza en un conjunto de elementos finitos que representan la geometría y las propiedades eléctricas del objeto. Esta discretización permite resolver el problema directo, que implica calcular los potenciales eléctricos en la región a partir de las corrientes aplicadas.

Además, el FEM en EIDORS permite implementar diferentes modelos de conductividad, lo que es esencial para aplicaciones médicas donde las características del tejido pueden variar significativamente. Por ejemplo, se pueden incluir inclusiones de diferentes conductividades para simular tumores u otros tipos de tejidos en estudios de diagnóstico.

EIDORS también incluye herramientas para la regularización y la optimización, que son

cruciales para resolver el problema inverso de la EIT, donde se busca recuperar la distribución de la conductividad a partir de las medidas de voltaje. La regularización ayuda a estabilizar la solución al minimizar la influencia del ruido en los datos, mientras que los algoritmos de optimización, como el método de Levenberg-Marquardt, son utilizados para mejorar la convergencia de las soluciones

2.5. ToolBox BEM-EIT

En este trabajo se evaluó BEM-EIT, un toolbox en MATLAB para resolver el problema directo de TIE mediante una formulación de frontera que impone condiciones de contacto electrodo-medio, incorporando la impedancia de contacto Z_e en los tramos de electrodo. La discretización se realiza exclusivamente sobre el contorno en número de elementos en el espacio entre electrodos (NEEE) y número de segmentos en el electrodo (NSE), a partir de las magnitudes evaluadas en el borde se determina el potencial en el interior del dominio homogéneo. El diseño del toolbox permite replicar, bajo condiciones físicas equivalentes, los mismos escenarios empleados en FEM (geometría circular, 16 electrodos, patrón de inyección y numeración), de modo que las diferencias que se observen en las Fig. 2.1 (a-b) y en los resultados posteriores puedan atribuirse a la formulación (volumétrica vs. superficial) y a sus discretizaciones asociadas, y no a cambios de configuración.

Fig. 2.1a se presenta el modelo FEM generado con EIDORS para un dominio circular homogéneo con $\sigma = 0,01 \text{ S/m}$ y 16 electrodos distribuidos uniformemente sobre el perímetro. La discretización es de toda la región, mediante elementos triangulares, con un refinamiento visible hacia la frontera para representar con mayor fidelidad las variaciones de potencial en las inmediaciones de los electrodos y del contacto electrodo-medio. Dado que la conductividad es constante en todo el dominio, el color de la malla es uniforme, caracterizando un caso estrictamente homogéneo. La numeración de los electrodos se muestra sobre el contorno, habilitando una comparación punto a punto de los voltajes medidos para cada patrón de inyección en secciones siguientes.

Fig. 2.1b se muestra el modelo BEM construido con BEM-EIT bajo condiciones idénticas a las de FEM: misma geometría circular, 16 electrodos en las mismas posiciones y numeración, $\sigma = 0,01 \text{ S/m}$, patrón de inyección y condiciones de contorno equivalentes. A diferencia de FEM, BEM discretiza únicamente la frontera: el contorno se divide en NEEE (línea negra) y NSE que representan los electrodos (marcados en verde), donde se imponen las condiciones de contacto con impedancia

Z_e . En medios homogéneos, la formulación integral de frontera permite evaluar el potencial interior a partir de las magnitudes del borde, evitando el mallado volumétrico y preservando la geometría del contorno y de los electrodos.

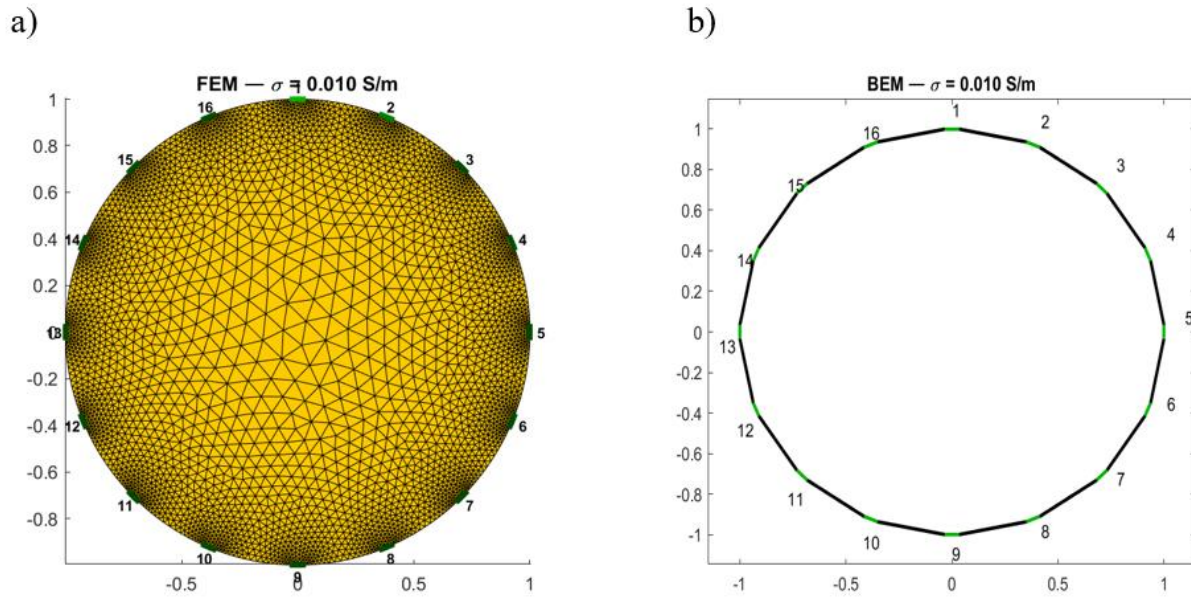


Fig. 2.1 a) Modelo FEM (Eidors) b) Modelo BEM (BEM-EIT) Homogéneo

Capítulo 3. Comparación de modelo FEM y BEM casos homogéneos

3.1. Introducción

En esta sección se presenta la comparación entre el modelo FEM (EIDORS) y BEM (BEM-EIT) para casos homogéneos bidimensionales. Para garantizar la validez del análisis, ambos modelos comparten la misma geometría base circular, el tamaño y disposición de los electrodos, el patrón de inyección de corriente y las condiciones de contorno. Se realiza un barrido sobre distintos parámetros relevantes (conductividad del medio, impedancia de los electrodos, número de segmentos entre electrodos, número de segmentos por electrodo y corriente inyectada), y se cuantifican las diferencias mediante métricas basadas en los voltajes de electrodos (norma de la diferencia de voltajes y error relativo) así como en el tiempo de simulación.

3.2. Homogeneidad de FEM y BEM

En la Fig. 3.1 se muestra la comparación punto a punto de voltajes obtenidos con FEM (Eidors) y BEM (BEM-EIT) para un caso homogéneo, es decir un dominio como para este caso con $\sigma_{medio} = 0,01 S/m$, sin inclusiones ni contrastes internos que podrían alterar el sistema y con geometrías y condiciones de contacto fijas. Es por esto por lo que se evidencian 256 valores, porque el experimento considera 16 patrones de inyección, y para cada patrón, se registran los voltajes en los 16 electrodos: $256 = 16 \cdot 16$. El índice de mediciones k recorre estos datos en bloques de 16, de modo que $k = 16 \cdot (p - 1) + m$, donde p identifica el patrón de inyección y m el electrodo de lectura. La repetición de picos cada 16 muestras reflejan el cambio de patrón y los máximos se asocian, como es esperable, a electrodos cercanos al par inyector. Además, ambas curvas comparten la misma forma y los picos caen en las mismas posiciones dentro de cada bloque; esto indica que el orden de electrodos y el patrón de inyección están correctamente alineados entre FEM y BEM. Los tramos entre picos se mantienen prácticamente constantes, lo que es coherente con un medio homogéneo.

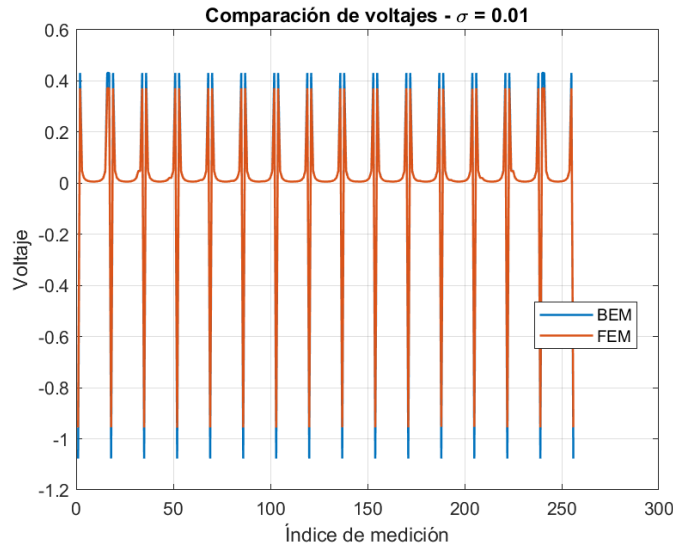


Fig. 3.1 Comparación de voltajes (BEM vs FEM) Homogéneo

3.3. Metodología y métricas de comparación

Para comparar ambos enfoques se utilizaron los voltajes en los electrodos, porque son la salida directa del problema y lo que efectivamente se mide en TIE.

El conjunto de datos se forma apilando 256 mediciones (16 patrones x 16 electrodos) como se muestra en la Fig. 3.1. Si $p = 1, \dots, 16$ es el patrón y $m = 1, \dots, 16$ el electrodo se usa el índice lineal.

$$k = 16 \cdot (p - 1) + m, \quad k = 1, \dots, 256 \quad (6)$$

y las series a comparar son $V_{FEM}[k]$ y $V_{BEM}[k]$. La comparación es punto a punto mediante la señal

$$\Delta V[k] = V_{FEM}[k] - V_{BEM}[k] \quad (7)$$

La métrica central es la norma euclídea de esa diferencia o error absoluto de la norma de voltaje (EANV)

$$EANV = \|\Delta V\|_2 = \left(\sum_{k=1}^{256} (\Delta V[k])^2 \right)^{1/2} = \sqrt{(V_{BEM} - V_{FEM})^T (V_{BEM} - V_{FEM})} \quad (8)$$

Que resume en un único escalar la discrepancia global sin cancelaciones de signo y otorgando el mismo peso a todos los patrones y electrodos. Como el nivel de señal puede variar al barrer conductividad, impedancia de contacto o corriente, se informa además el error relativo de la norma de voltaje (ERNV),

$$ERNV = \frac{\|V_{BEM} - V_{FEM}\|_2}{\|V_{FEM}\|_2} \quad (9)$$

Con FEM como referencia por su uso extendido. Este cociente es adimensional y permite comparar escenarios con distintos niveles absolutos de voltaje. Cuando se requiere mayor detalle, ambas métricas se calculan también por patrón (restringiendo las sumas a los 16 índices de cada p) para localizar discrepancias específicas.

Además del error en voltajes, se empleó el tiempo de simulación como medida del costo computacional relevante para TIE, determina la viabilidad de barridos de parámetros, el nivel de discretización practicable y, en última instancia, el uso del método en escenarios reales. Para que la comparación sea justa, el tiempo se midió bajo el mismo entorno y se repitió varias veces por configuración. Con el fin de reducir la influencia de fluctuaciones del sistema (cachés, carga del procesador, etc.), se aplicaron estadísticos robustos para caracterizar los resultados.

El valor representativo reportado en las gráficas es la mediana, definida como el percentil 50 de la muestra de tiempos:

$$t_{50} = \text{mediana}(t_1, t_2, \dots, t_{15}) \quad (10)$$

Mientras que la dispersión se muestra mediante la banda intercuartílica Q1-Q3, formada por los percentiles 25 y 75

$$Q1 = P_{25}(t_1, t_2, \dots, t_{15}), \quad Q3 = P_{75}(t_1, t_2, \dots, t_{15}) \quad (11)$$

Por tanto, las curvas de las figuras correspondientes muestran la mediana t_{15} en función del parámetro explorado (por ejemplo, la conductividad σ), acompañada de una banda sombreada que representa el intervalo [Q1, Q3]. Este rango resume la variabilidad típica de las 15 repeticiones y evita que valores atípicos o ejecuciones anómalas distorsionen las conclusiones, motivo por el cual se prefirió a los promedios simples.

3.4. Resultados de comparación bajo distintos parámetros

En las siguientes subsecciones se presentan los resultados obtenidos al variar los distintos parámetros físicos y geométricos que influyen en la comparación entre los modelos FEM y BEM. Cada análisis muestra la evolución de las métricas de error absoluto (EANV), error relativo (ERNV) y el tiempo de simulación frente al parámetro en estudio.

3.4.1 Conductividades del medio

Se estudió cómo la conductividad del medio σ afectó la concordancia entre FEM y BEM en un dominio homogéneo. Para ello, σ_{medio} se barrió [0,01; 0,05; 0,10; 0,15; 0,5; 1,0; 1,5; 2,0] S/m, manteniendo fijas la geometría circular con 16 electrodos, su numeración y patrón de inyección, la impedancia de contacto Z_e y la discretización de cada método.

La Fig. 3.2 mostró ambas métricas en función de σ_{medio} la curva azul correspondió al EANV (eje izquierdo, en voltios) y la naranja al ERNV (eje derecho, en porcentaje). En ambos casos se observó una tendencia decreciente a medida que aumentó la conductividad.

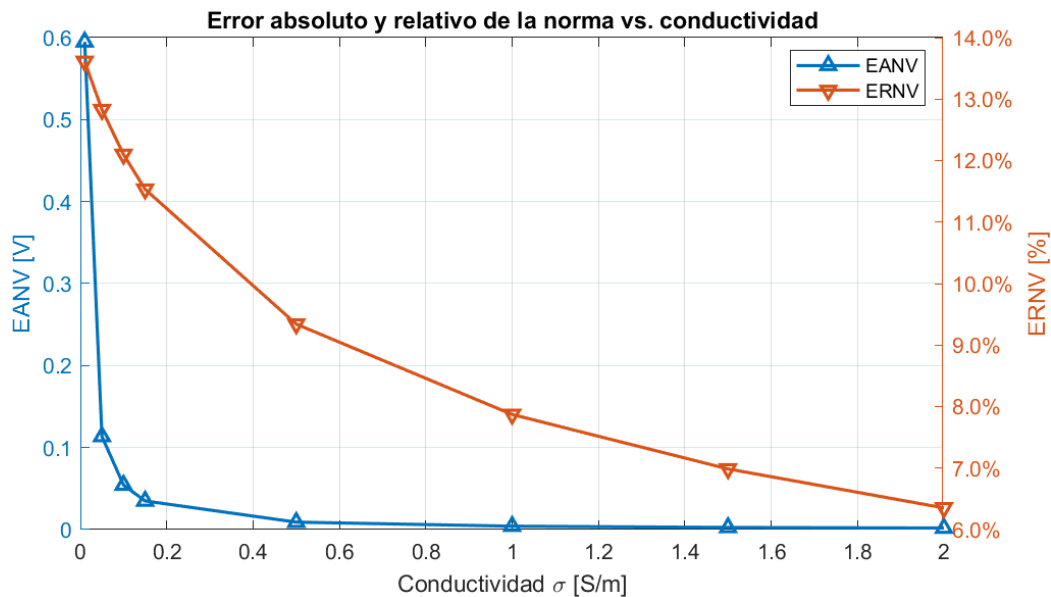


Fig. 3.2 EANV y ERNV vs. conductividad del medio (Homogéneo)

Al aumentar σ_{medio} desde 0,01 hasta 2,0 S/m, el EANV disminuyó en un 99,7% (de 0,5949 a 0,0019 V), lo que implica más de dos órdenes de magnitud de mejora. El ERNV también se redujo, aproximadamente a la mitad de 13,6% a 6,35%. Esto es coherente con la física del problema a corriente inyectada fija: al aumentar σ_{medio} , la resistencia efectiva del dominio disminuyó y los niveles de voltaje en el borde se redujeron.

Desde σ cercana a 1,0 S/m, el EANV quedó por debajo de 0,005 V, lo que en la práctica significa que las curvas de voltaje de FEM y BEM son casi indistinguibles. En este escenario, pequeños detalles de cómo discretizamos el contorno en BEM y la malla cercana a los electrodos en FEM influyen menos. En el extremo opuesto, con σ_{medio} igual a 0,01 S/m, el nivel de voltaje en el borde es más alto y los gradientes cerca de los electrodos son más pronunciados, por tanto, pequeñas diferencias de discretización o de modelación se traducen en discrepancias absolutas mayores, lo que explica el máximo inicial del EANV sin atribuirlo a un método en particular.

Sobre los mismos valores usados para EANV/ERNV, se midió el tiempo de simulación y se reportó con mediana y Q1–Q3. La Fig. 3.3 muestra las medianas de FEM (azul) y BEM (morado) frente a σ_{medio} , con bandas Q1–Q3. Del gráfico se aprecia que, a lo largo de todo el rango de σ_{medio} , ambos métodos no cambiaron en gran medida para las distintas conductividades.

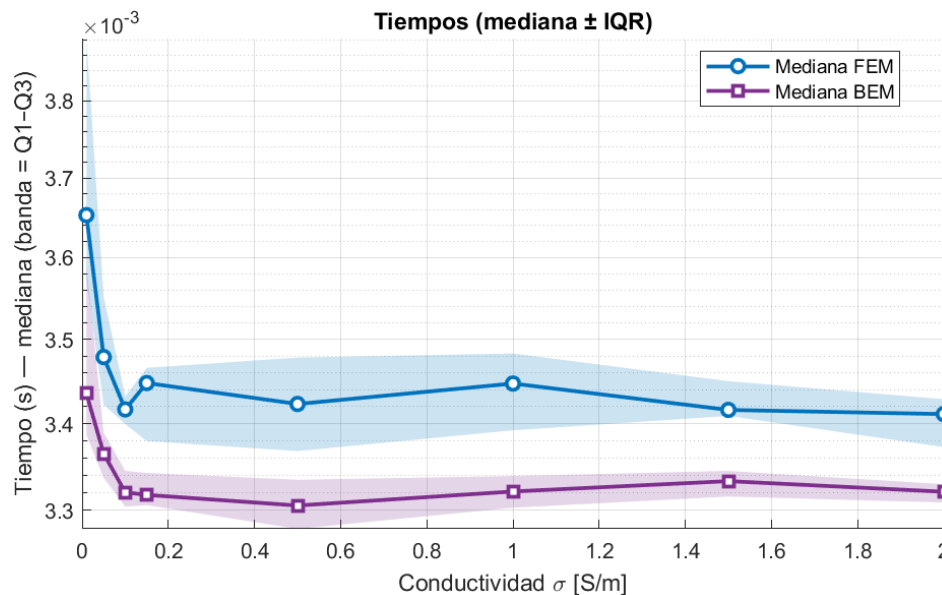


Fig. 3.3 Tiempos (s) de FEM y BEM con mediana y banda Q1-Q3 en función de la conductividad del medio (Homogéneo)

En todo el barrido $\sigma_{medio} = [0,01; 0,05; 0,10; 0,15; 0,5; 1,0; 1,5; 2,0] S/m$ los tiempos medianos se mantuvieron $\approx 3,3$ a $3,4 ms$ para ambos métodos, sin tendencia con σ_{medio} , las bandas Q1–Q3 fueron estrechas y, en general, se solaparon, indicando rendimientos equivalentes. Esto era esperable, variar σ_{medio} no altera la topología ni el tamaño del sistema (FEM: matriz dispersa fija; BEM: matriz densa de igual dimensión), que son los factores que dominan el coste de la resolución lineal.

3.4.2 Impedancias de contacto

Se analizó cómo la impedancia de contacto Z_e afectó la concordancia entre FEM y BEM en un medio homogéneo. Se barrió Z_e en $[0,01, 0,05, 0,1, 0,5, 1,1, 5, 2, \dots, 10] \Omega$, manteniéndose fijas la geometría circular con 16 electrodos, su numeración y patrón de inyección, la conductividad del medio $\sigma = 0,01 S/m$ y la discretización propia de cada método.

La Fig. 3.4 mostró ambas métricas en función de Z_e la curva azul correspondió EANV (eje izquierdo, en voltios) y la curva naranja al ERNV (eje derecho, en porcentaje). En ambos casos se observó una disminución pronunciada para $Z_e \leq 1 \Omega$ y un descenso más suave y sostenido para valores mayores.

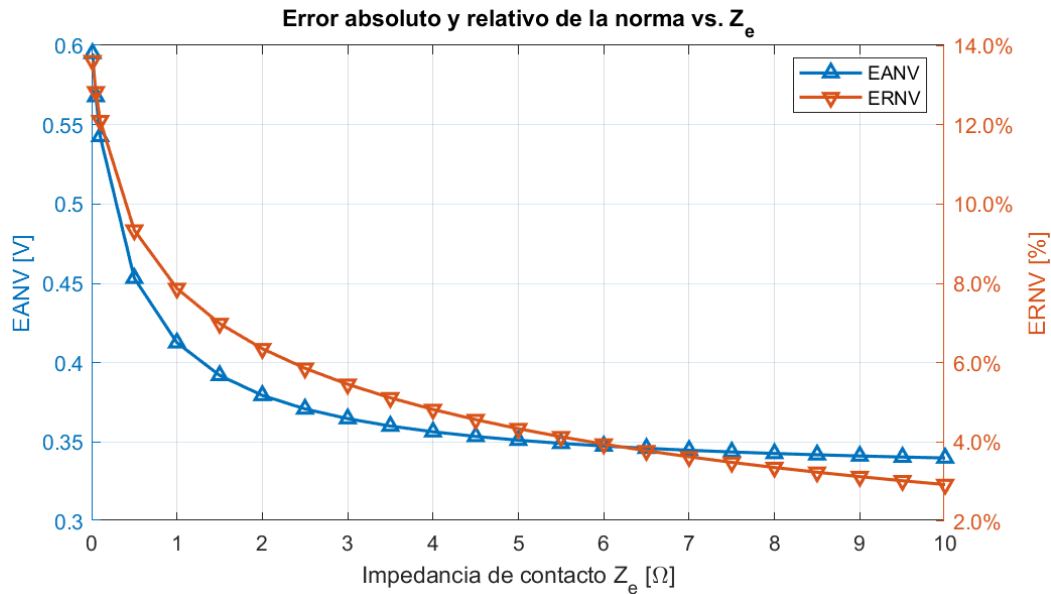


Fig. 3.4 EANV y ERNV vs. Impedancia de contacto Z_e (Homogéneo)

Al aumentar Z_e de 0,01 a 10 Ω , ambos errores disminuyeron de manera sostenida: el absoluto pasó de $\sim 0,59$ V a $\sim 0,34$ V y el relativo de 13,6 % a ≈ 3 %. La caída fue más marcada entre 0,01 y 1 Ω y luego las curvas se aplanaron. Con corriente fija, una porción mayor del voltaje se concentra en el contacto del electrodo con el medio y menos en el interior, por tanto, el borde refleja menos las diferencias internas y el error absoluto cae. El error relativo baja más porque no solo disminuye la diferencia entre modelos, también baja el voltaje de referencia del borde, por eso que la proporción diferencia respecto del voltaje se hace menor. En consecuencia, Z_e altos favorecen la concordancia entre métodos y dejan discrepancias pequeñas en relación con el nivel de señal.

Bajo los mismos valores de Z_e empleado para EANV/ERNV se cronometró la resolución de FEM y BEM. Cada condición se resume con la mediana y los cuartiles Q1–Q3. La Fig. 3.5 traza las medianas de tiempo de FEM (azul) y BEM (morado) frente a Z_e , con sus bandas Q1–Q3. Del gráfico se desprende que ambos métodos se mantienen prácticamente iguales para ambos métodos con pequeñas variaciones al inicio de los valores de impedancia de contacto.

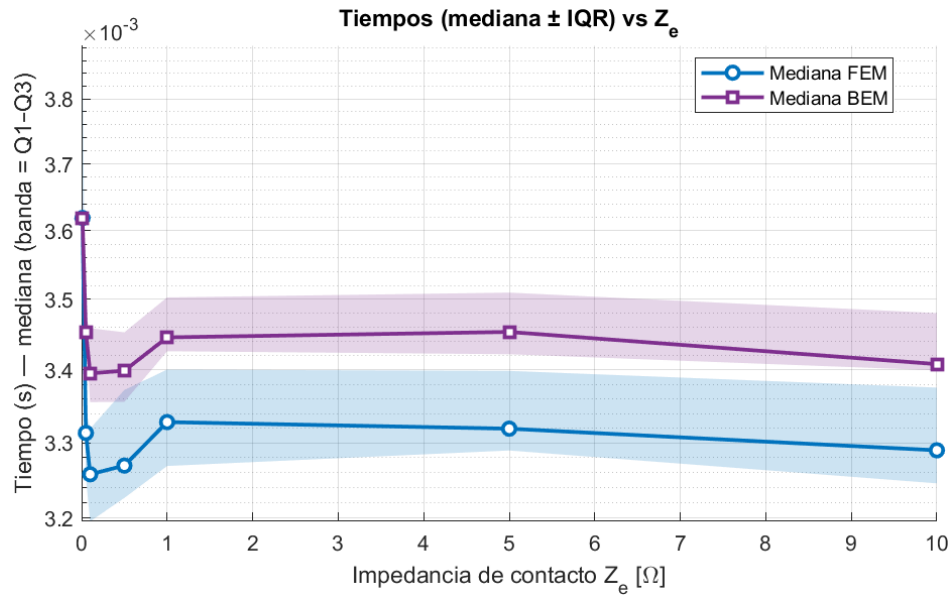


Fig. 3.5 Tiempos (s) de FEM y BEM con mediana y banda Q1-Q3 en función de impedancia de contacto Z_e

En FEM la mediana se mantuvo cerca de 3,3 ms con una variación pequeña entre el inicio y $Z_e = 10$ Ω . En BEM la mediana descendió desde cerca de 3,6 ms en $Z_e = 0,01$ Ω hasta alrededor de 3,4 ms en $Z_e = 10$ Ω . Las bandas Q1–Q3 son estrechas y se solapan desde valores intermedios de Z_e , aunque las medianas siguen separadas con BEM sistemáticamente por encima. Este patrón es

coherente con que cambiar Z_e ajusta la condición de contacto de los electrodos, pero no modifica el tamaño ni la estructura de los sistemas lineales, por ende, los tiempos varían poco o bien casi no cambian.

En este dominio homogéneo, FEM y BEM resolvieron en el rango aproximado de 3,3 a 3,5 ms, con una pequeña ventaja de FEM en todo el barrido.

3.4.3 Números de elementos en el espacio entre electrodos (NEEE)

Se evaluó cómo el NEEE afectó la concordancia FEM–BEM en un caso homogéneo. Se variaron $NEEE = 1, \dots, 15$ manteniendo fijas la geometría con 16 electrodos, el patrón de inyección, $\sigma = 0,01 \text{ S/m}$, $Z_e = 0,01 \Omega$, y la discretización de FEM. En BEM, este parámetro controló el detalle del contorno en los tramos inter-electrodo.

La Fig. 3.6 mostró el EANV (eje izquierdo, azul) y el error relativo (eje derecho, naranja) en función de NEEE. Ambas curvas aumentaron y tendieron a una diferencia constante.

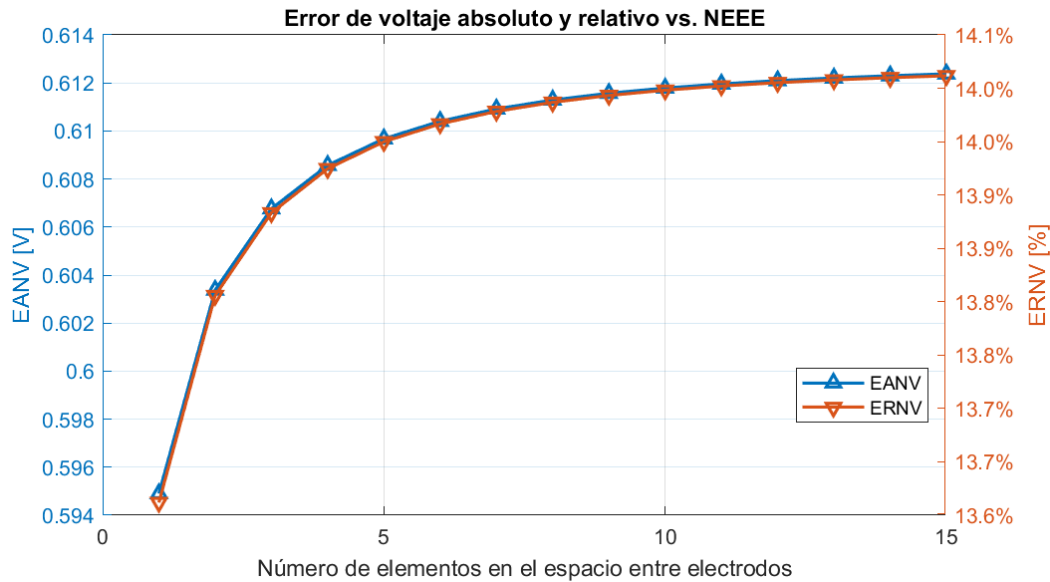


Fig. 3.6 EANV y ERNV vs. NEEE (Homogéneo)

Al aumentar el número de elementos entre electrodos de 1 a 15, el error absoluto de la norma de voltaje creció de 0,5949 a 0,6124 V (un incremento de $\sim 0,017$ V), mientras que el error relativo de la normal de voltaje pasó de 13,61% a 14,01%. El cambio principal se concentró en el paso de 1 a 2 elementos; desde 6 en adelante las curvas se mantuvieron casi planas. En sí, el aumento fue pequeño comparado con las variaciones observadas al barrer conductividad o impedancia de contacto.

Esta respuesta se explicó, porque al refinar NEEE, BEM describió con más detalle el contorno entre electrodos, FEM se mantuvo sin cambios en esa zona. Ese desbalance de resolución de borde hizo que la diferencia BEM–FEM aumentara un poco al comienzo y luego se estabilizara cuando el contorno de BEM ya no aportó información nueva. Esto no significa que BEM “empeorara al refinar”, sino que, con un interior homogéneo y Z_e bajo, el mayor detalle en el borde de un método se reflejó en una discrepancia ligeramente mayor hasta alcanzar la saturación. Con esto se cierran las normas para NEEE y se pasa a los tiempos.

Usando las mismas configuraciones que para EANV/ERNV, se registró el tiempo de ejecución de FEM y BEM y, en cada punto, se reporta la mediana con su banda Q1–Q3. La Fig. 3.7 muestra las medianas de FEM (azul) y BEM (morado) frente al número de segmentos entre electrodos ($NEEE = 1 \dots 15$), con las bandas Q1–Q3 alrededor. Visualmente, FEM permanece casi horizontal mientras BEM aumenta de forma marcada al crecer NEEE.

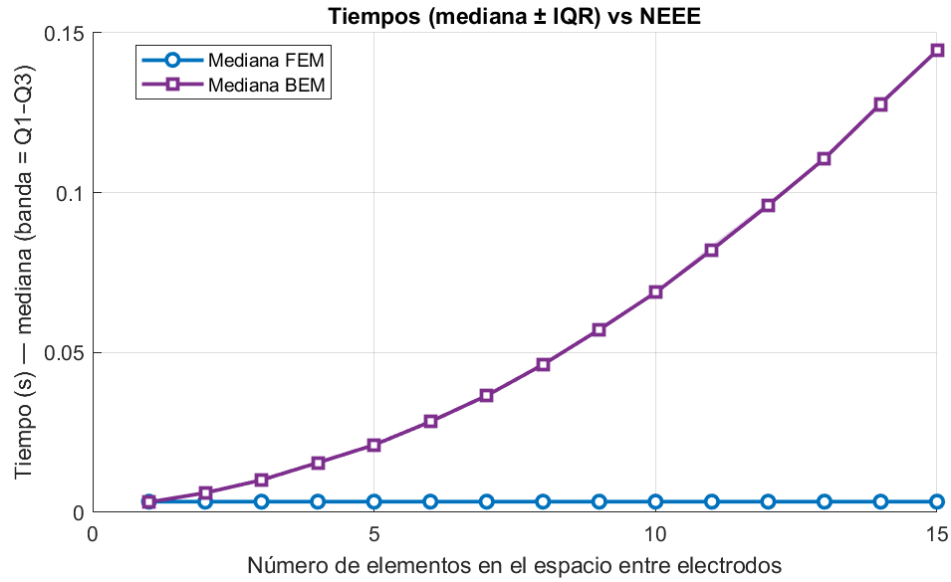


Fig. 3.7 Tiempos (s) de FEM y BEM con mediana y banda Q1-Q3 en función de NEEE

En el Método de Elementos Finitos (FEM), la mediana del tiempo de simulación se mantuvo prácticamente constante en torno a 0.0033 s para todos los valores de NEEE. Esto era esperable, ya que el FEM modela y calcula el campo de potencial en toda la región interna del objeto. Subdividir solo los tramos de la frontera sin electrodo no cambia la cantidad total de incógnitas (nodos) dentro del volumen ni la estructura dispersa de la matriz principal que debe resolverse. Por lo tanto, el costo computacional del modelo no varió al modificar el NEEE. Para BEM, en cambio, la mediana aumentó con NEEE, fue de 0,0032 s con un segmento, $\sim 0,021$ s con 5, $\sim 0,069$ s con 10 y $\sim 0,144$ s con 15. Las bandas Q1–Q3 se mantuvieron acotadas alrededor de cada mediana. La razón es debido a que cada nuevo segmento en el espacio entre electrodos añadió grados de libertad o más incógnitas sobre la frontera y la resolución de la matriz densa de BEM se volvió más costosa a medida que creció ese tamaño.

3.4.4 Números de segmentos por electrodo (NSE)

En este caso se evaluó cómo el número de segmentos por electrodo (NSE) afectó la concordancia FEM–BEM en un caso homogéneo. Se variaron $NSE = 1, \dots, 15$ manteniéndose fijos $\sigma = 0,01 \text{ S/m}$, $Z_e = 0,01 \Omega$, el número de electrodos (16), el patrón de inyección y la discretización de FEM.

La Fig. 3.8 mostró el error absoluto de la norma voltaje, eje izquierdo, azul) y el error relativo de la norma de voltaje (eje derecho, naranja) en función de NSE. Ambas curvas disminuyeron con fuerza al comienzo y luego presentaron rendimientos decrecientes; la zona de cambio de pendiente se ubicó aproximadamente entre 4 y 6 segmentos por electrodo.

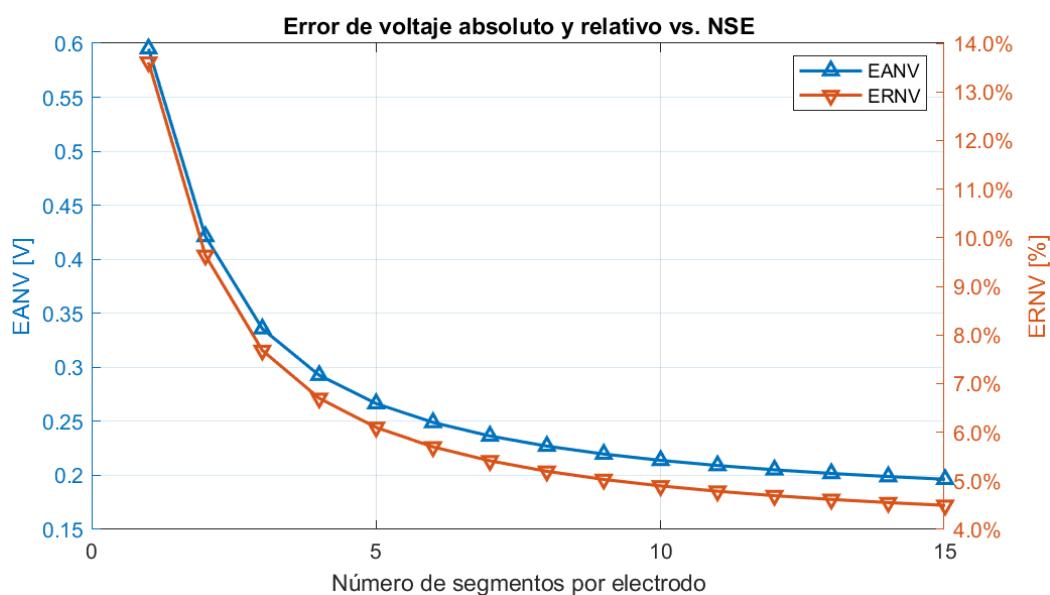


Fig. 3.8 EANV y ERNV vs. NSE (Homogéneo)

Al aumentar NSE de 1 a 15, EANV bajó de 0,5949 a 0,1964 V (reducción de ~67 %) y el error relativo disminuyó de 13,61% a 4,50%. El descenso principal ocurrió entre 1 a 4 segmentos, desde 6 en adelante la mejora fue menor y sostenida (por ejemplo, de 10 a 15 segmentos el absoluto solo bajó de 0,2139 a 0,1964 V).

Esto ocurre, porque, en BEM, NSE controla cuántos segmentos describen cada electrodo. Con NSE bajo el electrodo queda tosco y la inyección se reparte de forma menos precisa en sus extremos. Al aumentar NSE el borde del electrodo se resuelve mejor y la distribución de corriente en el contacto queda más ajustada a la condición física, mientras FEM permanece sin cambios. Entonces, la discrepancia FEM–BEM cae con fuerza hasta que el electrodo queda bien descrito, lo que ocurre alrededor de 4 a 6 segmentos, y después las mejoras son marginales.

Con las mismas configuraciones usadas para EANV/ERNV, se midió el tiempo de ejecución de FEM y BEM para cada valor de $NSE = 1, \dots, 15$. En cada condición se reportó la mediana con su banda Q1–Q3. La Fig. 3.9 muestra las medianas de FEM (azul) y BEM (morado) frente a NSE, junto con sus bandas Q1–Q3. Visualmente: la curva de FEM es casi horizontal mientras que la de BEM aumenta de forma marcada a medida que crece el NSE.

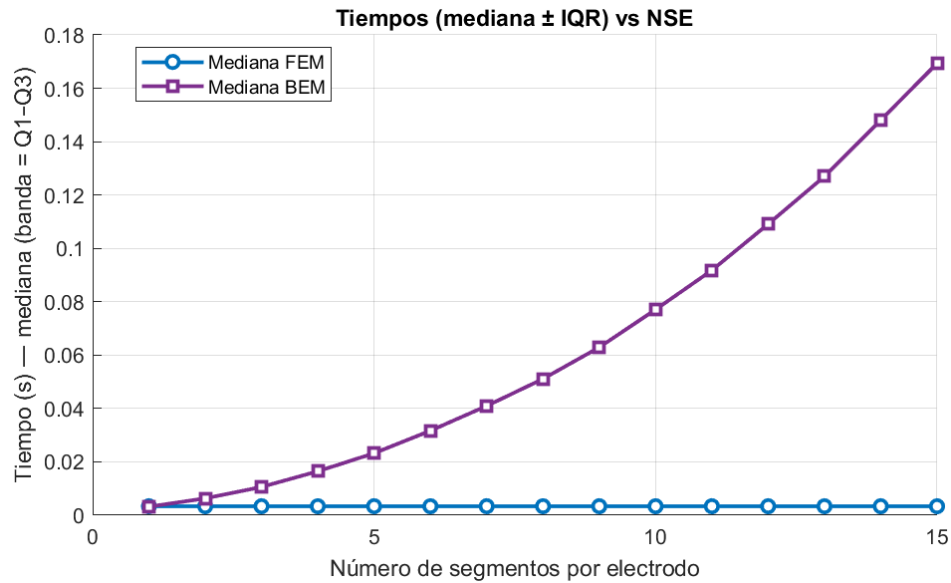


Fig. 3.9 Tiempos (s) de FEM y BEM con mediana y banda Q1-Q3 en función de NSE

En todo el rango de $NSE = 1, \dots, 15$, FEM mantuvo la mediana prácticamente plana en $\sim 3,4 \text{ ms}$, con bandas Q1–Q3 estrechas, lo que indicó una ejecución estable, esto era esperable porque refinar el contorno del electrodo no cambia los grados de libertad del volumen ni la estructura dispersa de su matriz. En contraste, BEM mostró un aumento marcado: la mediana pasó de $\sim 3,2 \text{ ms}$ con un segmento por electrodo a $\sim 170 \text{ ms}$ con 15 segmentos por electrodo, con Q1–Q3 acotadas alrededor de cada punto. La causa es debida a que cada subdivisión añade nodos de frontera y la matriz densa de contorno crece en tamaño y en costo de factorización de forma más que lineal. En conjunto, NSE fue neutro para FEM y el principal determinante del costo en BEM.

3.4.5 Corriente inyectada

Se estudió cómo la corriente inyectada I afectó la concordancia entre FEM y BEM en un caso homogéneo. Se variaron $I = [0,005; 0,010; 0,015; 0,020; 0,030]A$, manteniéndose fijas la geometría con 16 electrodos $\sigma = 0,01 S/m$, $Z_e = 0,01 \Omega$, el patrón de inyección y las discretizaciones.

La Fig. 3.10 mostró el error absoluto de la norma de voltaje, (eje izquierdo, azul) y el error relativo de la norma de voltaje (eje derecho, naranja) en función de I . El error absoluto creció en forma lineal y el error relativo se mantuvo constante.

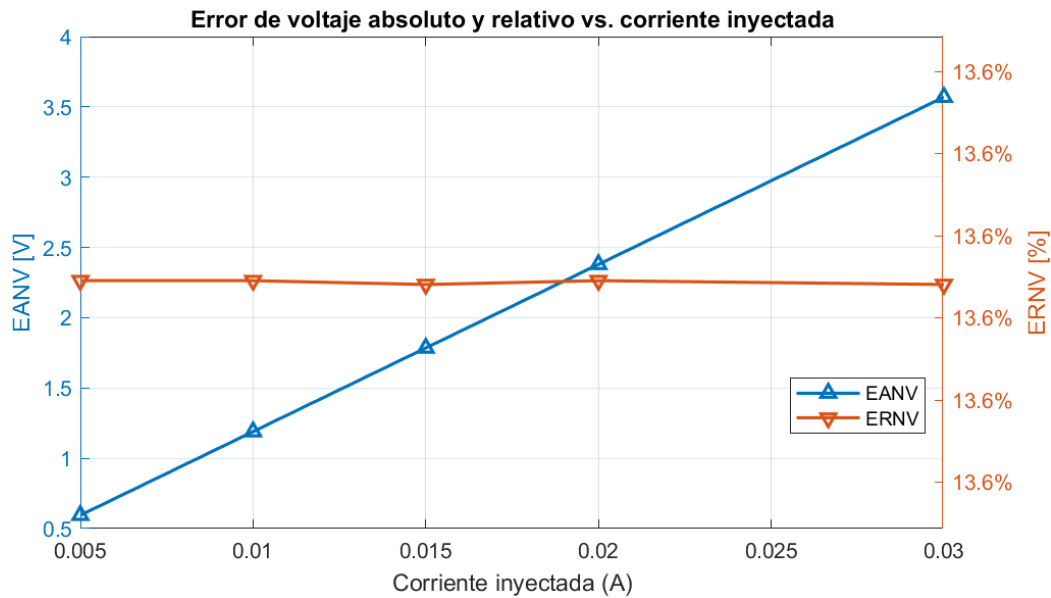


Fig. 3.10 EANV y ERNV vs. Corriente inyectada (Homogéneo)

Al aumentar I de 5 a 30 mA , EANV pasó de 0,5949 a 3,5694 V , es decir, se multiplicó por seis, igual que la corriente. La razón $\|\Delta V\|_2/I$ se mantuvo cercana a 118,98 V/A en todos los puntos. En paralelo, el ERNV permaneció constante en 13,61% a lo largo del barrido.

En términos físicos, esto fue lo esperable para un problema directo lineal con corrientes inyectadas. Con σ , Z_e y discretizaciones fijas, los voltajes de borde son proporcionales a I ; por lo mismo, la diferencia entre métodos también escala con I . Como no se modificó cómo FEM y BEM representan la zona de electrodos ni el contorno (malla en FEM, tramos en BEM), el patrón de discrepancia quedó igual y solo cambió su magnitud por ende creció linealmente el error absoluto y

no cambió el relativo (crecieron por igual la señal y la diferencia). De haberse variado la resolución en la superficie (NSE/NEEE) o la impedancia de contacto, entonces sí se habría alterado la proporción entre ambos métodos y el error relativo habría cambiado.

Con las mismas configuraciones usadas para EANV/ERNV al variar la corriente inyectada $I = [0,005; 0,010; 0,015; 0,020; 0,030]$ A, se registró el tiempo de simulación de FEM y BEM. Cada punto se resume con la mediana y sus cuantiles Q1–Q3. La Fig. 3.11 muestra las medianas de tiempo de FEM (azul) y BEM (morado) frente a I , junto a sus bandas Q1–Q3. Visualmente, ambas curvas son casi horizontales

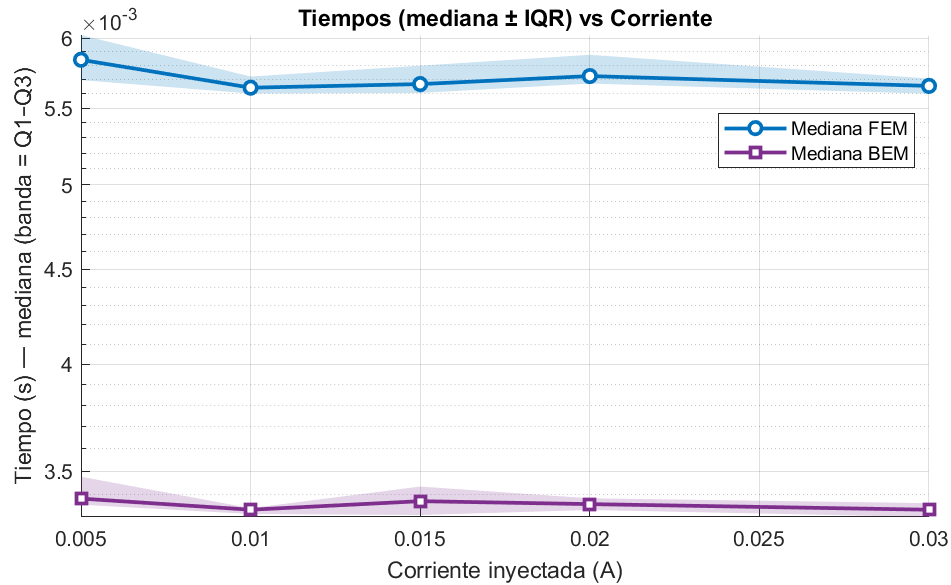


Fig. 3.11 Tiempos (s) de FEM y BEM con mediana y banda Q1-Q3 en función de la corriente inyectada

Los tiempos fueron prácticamente invariantes con la corriente. FEM osciló en un rango estrecho, de 5,6 a 5,8 *ms*, con bandas Q1–Q3 pequeñas, BEM se mantuvo entre 3,3 y 3,4 *ms*, también con bandas estrechas. Esta planitud era esperable, porque, al cambiar I solo se escala el vector de carga, pero no cambia la matriz que se factoriza (mismo tamaño y estructura para FEM y para BEM).

3.5. Resumen caso Homogéneo

Los resultados de los distintos experimentos se resumen de manera general en la Tabla 3.1. En esta se sintetizan los efectos de los distintos parámetros físicos y geométricos sobre las métricas de comparación (EANV, ERNV) y los tiempos de simulación para ambos métodos. La tabla permite visualizar de forma compacta las tendencias observadas en las gráficas y facilita identificar los casos más favorables y los de mayor costo computacional.

Tabla 3.1 Resumen de tendencias de métricas y tiempos según parámetros del modelo caso homogéneo

Parámetro / Métricas de comparación	EANV	ERNV	Tiempo FEM	Tiempo BEM
Conductividad del Medio (σ_{medio})	Disminuye, a mayor σ_{medio} , menor EANV.	Disminuye, a mayor σ_{medio} , menor ERNV.	Sin cambios	Sin cambios
Impedancia de Contacto (Z_e)	Disminuye, a mayor Z_e , menor EANV.	Disminuye, a mayor Z_e , menor ERNV.	Sin cambios	Sin cambios
N° de Elementos entre Electrodo (NEEE)	Cambios menores tras el paso inicial de discretización.	Cambios menores tras el paso inicial de discretización.	Sin cambios	Aumenta con NEEE.
N° de Segmentos por Electrodo (NSE)	Disminuye con mayor detalle y luego variación mínima.	Disminuye con mayor detalle y luego variación mínima.	Sin cambios	Aumenta con NSE.
Corriente Inyectada (I)	Aumenta: Proporcional a I.	Constante, ERNV se mantiene estable.	Sin cambios	Sin cambios

En términos de concordancia, los mejores resultados se obtuvieron al aumentar la conductividad del medio y la impedancia de contacto, lo que redujo de forma sostenida tanto el error absoluto como el relativo. Las mayores diferencias entre los métodos se observaron en medios con baja conductividad y contactos más resistivos, donde la formulación de contorno del BEM se vuelve más sensible a los cambios de potencial en la superficie.

Al analizar la discretización, se observó que refinar los segmentos por electrodo NSE mejora el acuerdo entre ambos métodos hasta alcanzar una zona de estabilidad. Un nivel intermedio de detalle entre 4 y 6 segmentos por electrodo entregó los mejores resultados, con valores de error absoluto cercanos a 0,19 V y error relativo alrededor de 4,5 %. Aumentar los elementos entre electrodos NEEE generó mejoras solo en el paso inicial de 1 a 2 y luego el efecto se mantuvo casi constante, lo que indica que un refinamiento excesivo no aporta beneficios adicionales en el resultado.

En cuanto al rendimiento computacional, los tiempos más bajos se alcanzaron con configuraciones de baja discretización, donde ambos métodos operaron en el mismo orden de milisegundos. A medida que se incrementaron el NEEE y el NSE, el tiempo de simulación del BEM aumentó progresivamente, mientras que el FEM se mantuvo prácticamente constante, lo que confirma que el tiempo de cálculo en BEM depende directamente del tamaño de la matriz del sistema.

El análisis con variación de la corriente inyectada mostró que ambos métodos mantienen un comportamiento lineal. El error absoluto aumentó de manera proporcional a la corriente aplicada, mientras que el error relativo y los tiempos se mantuvieron estables. Además, las curvas de EANV y ERNV presentaron una forma muy similar, ya que el error relativo es una normalización del error absoluto respecto a la norma de referencia de FEM, la cual cambia muy poco entre configuraciones.

En conjunto, el caso homogéneo demuestra que el toolbox BEM logra un buen nivel de concordancia con FEM en los voltajes obtenidos y en las tendencias físicas del modelo. Los resultados indican que un nivel intermedio de discretización, con NSE entre 4 y 6 y NEEE entre 2 y 3, ofrece un equilibrio adecuado entre el detalle del modelo y el tiempo de cálculo, consolidando al BEM como una alternativa práctica para el problema directo de TIE en medios homogéneos.

Capítulo 4. Comparación de modelo FEM y BEM casos heterogéneos

4.1. Introducción

En esta sección se presenta la comparación entre el modelo FEM (EIDORS) y BEM (BEM-EIT) para casos bidimensionales con inclusión. Al igual que en los escenarios homogéneos, ambos modelos comparten la misma geometría base circular, el tamaño y disposición de los electrodos, el patrón de inyección de corriente y las condiciones de contorno, de manera que la evaluación se centre únicamente en las diferencias derivadas del método numérico. El análisis considera un barrido de parámetros relevantes (conductividad del medio, impedancia de los electrodos, número de segmentos entre electrodos, número de segmentos por electrodo, corriente inyectada, conductividad de la inclusión y número de segmentos de la inclusión). Las diferencias entre los resultados se cuantifican mediante métricas basadas en los voltajes de los electrodos (norma de la diferencia de voltajes del error absoluto y relativo), complementadas con la medición del tiempo de simulación como indicador de eficiencia computacional.

4.2. Heterogeneidad FEM y BEM

En la Fig. 4.1a se presenta el modelo FEM generado con EIDORS para un dominio circular con fondo homogéneo $\sigma_{medio} = 0,01 S/m$ y una inclusión de $\sigma_{inc} = 1 S/m$, ubicada próxima al electrodo 5 como se muestra en la imagen. La malla mostró refinamiento tanto en la frontera externa (para representar con mayor fidelidad las variaciones de potencial en la zona de contacto) como en el contorno de la inclusión, donde se concentraron gradientes más intensos. Se mantuvieron las mismas condiciones que en el caso homogéneo (16 electrodos, igual numeración y patrón de inyección, misma Z_e y parámetros de discretización definidos en la metodología). El contraste de σ_{medio} y σ_{inc} quedó explícito en el mapa de colores y la cercanía al electrodo 5 se indicó para facilitar la lectura de voltajes en las secciones siguientes.

En la Fig. 4.1b se mostró el modelo BEM construido con BEM-EIT bajo condiciones equivalentes a FEM: misma geometría, 16 electrodos en las mismas posiciones y numeración

$\sigma_{medio} = 0,01 \text{ S/m}$ y una inclusión de $\sigma_{inc} = 1 \text{ S/m}$, ubicada cerca del electrodo 5, además del mismo patrón de inyección y Z_e . A diferencia de FEM, BEM discretizó únicamente las fronteras: el contorno externo (segmentos inter-electrodos NEEE y tramos de electrodo NSE, en negro/verde) y el contorno de la inclusión (círculo rojo). Para la inclusión se utilizaron exactamente 20 segmentos, valor que se mantuvo fijo en todos los análisis de este capítulo a fin de asegurar comparabilidad entre barridos. Con esta formulación se evaluó el potencial interior a partir de magnitudes de borde, preservando con alta fidelidad la geometría del contorno y de la inclusión, así como su proximidad al electrodo 5 para la comparación posterior de voltajes.

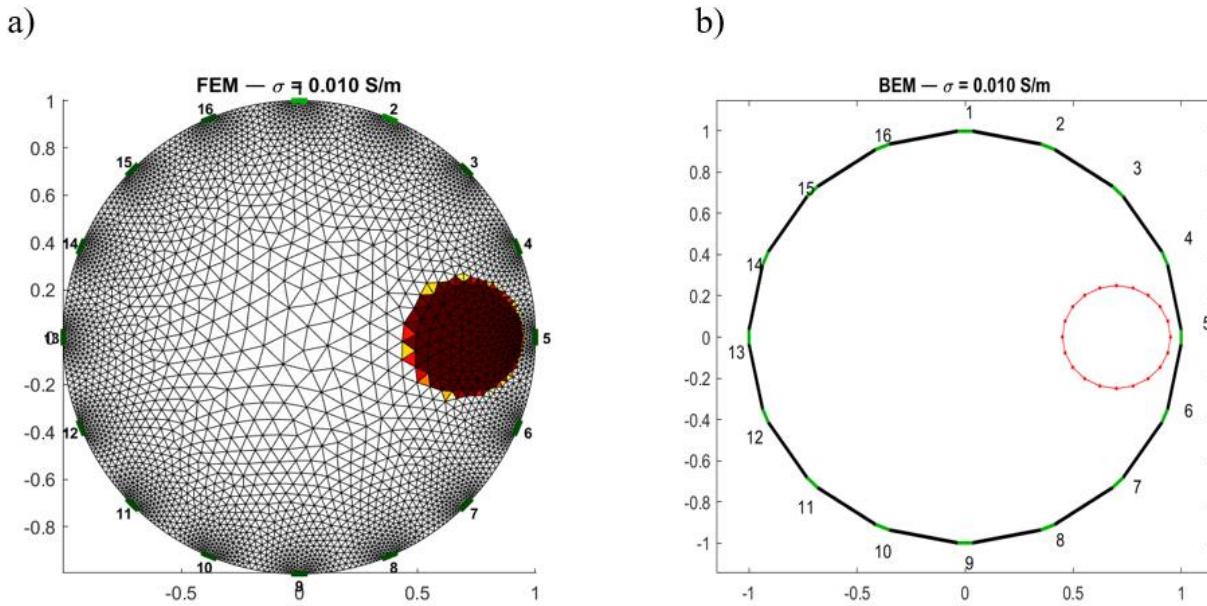


Fig. 4.1 a) Modelo FEM (Eidors) b) Modelo BEM (BEM-EIT) Heterogéneo

En la Fig. 4.2 se presentó la comparación punto a punto de los voltajes de borde obtenidos con BEM y FEM para el caso con inclusión: $\sigma_{medio} = 0,01 \text{ S/m}$ y una inclusión de $\sigma_{inc} = 1 \text{ S/m}$, ubicada cerca del electrodo 5. Se mostraron 256 mediciones ($16 \text{ patrones} \times 16 \text{ electrodos}$); el índice de medición siguió $k = 16 \cdot (p - 1) + m$, donde p fue el patrón y m el electrodo. Ambas curvas repitieron picos cada 16 muestras y los máximos aparecieron en las mismas posiciones dentro de cada bloque, lo que confirmó la correcta sincronización del orden de electrodos y del patrón de inyección entre métodos. En relación con el caso homogéneo, se observaron variaciones locales de amplitud en los bloques cuyos pares inyectores quedaron próximos al electrodo 5, en los bloques alejados la forma se mantuvo similar. Esta modulación fue coherente con el efecto de la inclusión más conductiva, que desvió corriente en su entorno y modificó las caídas de potencial medidas por los electrodos cercanos.

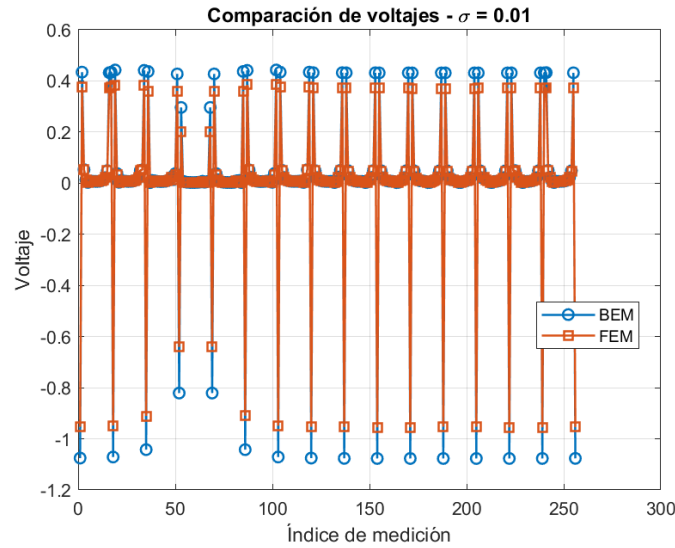


Fig. 4.2 Comparación de voltajes (BEM vs FEM) Heterogéneo

Sobre esta base visual, y para cuantificar la concordancia, se mantuvieron las mismas métricas usadas anteriormente y definidas en la metodología: el error absoluto de la norma de voltaje $EANV = \|\Delta V\|_2$ y el error relativo de la norma de voltaje $ERNV = \|\Delta V\|_2 / \|\Delta V_{FEM}\|_2$. Cuando fue pertinente, estos indicadores se calcularon por patrón para localizar diferencias en torno a la inclusión. Además, se conservó el tiempo de simulación (mediana y Q1–Q3).

4.3. Resultados de comparación bajo distintos parámetros

En las siguientes subsecciones se presentan los resultados obtenidos para el caso heterogéneo, donde se incorpora una inclusión con distinta conductividad dentro del dominio. Se analizan los efectos de los principales parámetros físicos y geométricos sobre las métricas de comparación ($EANV$ y $ERNV$) y sobre los tiempos de simulación

4.3.1 Conductividades del medio

Se evaluó cómo la conductividad del medio afectó la concordancia entre FEM y BEM en un dominio con inclusión de $\sigma_{inc} = 1 \text{ S/m}$ ubicada cerca del electrodo 5. Se barrieron $\sigma_{medio} = [0,01; 0,05; 0,10; 0,15; 0,5; 1,0; 1,5; 2,0] \text{ S/m}$, manteniendo fijas la geometría con 16 electrodos, el

patrón de inyección, Z_e y las discretizaciones. En BEM, el contorno de la inclusión se representó con 20 segmentos (constante en todo el capítulo). La comparación se cuantificó con EANV y ERNV.

La Fig. 4.3 mostró dos curvas en función de σ_{medio} : en azul, el error absoluto (eje izquierdo, V) y, en naranja, el error relativo (eje derecho, %). Ambas disminuyeron con σ_{medio} ; la caída del EANV fue abrupta en los primeros puntos y quedó por debajo de 0,005 V desde $\sigma_{medio} \approx 1 \text{ S/m}$.

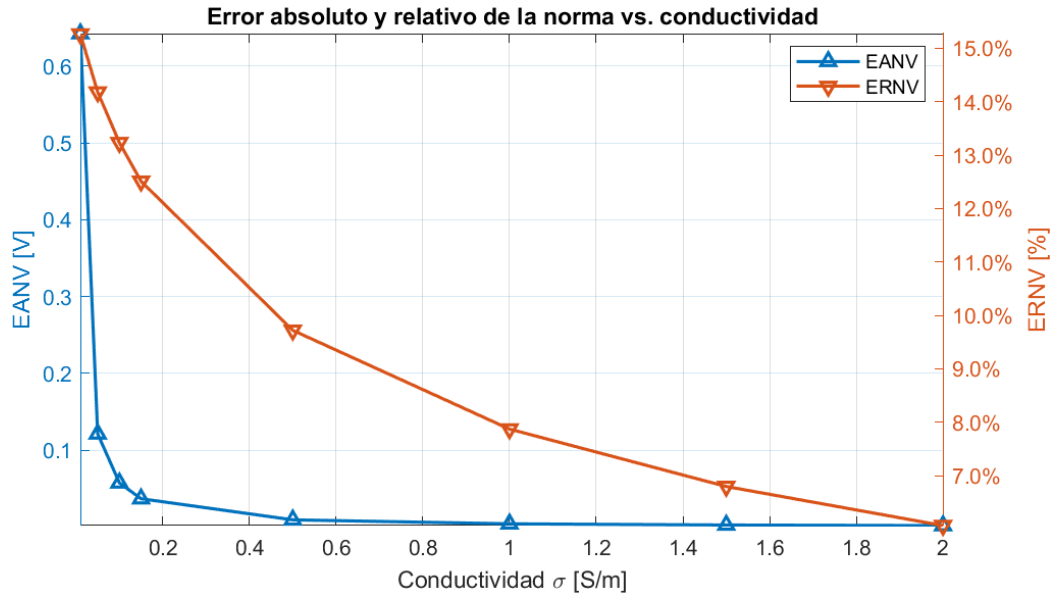


Fig. 4.3 EANV y ERNV vs. conductividad del medio (Heterogéneo)

Al pasar de $\sigma_{medio} = 0,01$ a $2,0 \text{ S/m}$, el EANV bajó de $0,6422 \text{ V}$ a $0,00184 \text{ V}$ más de dos órdenes de magnitud. El ERNV descendió de $15,27\%$ a $6,07\%$ reduciendo un poco más de la mitad. El ERNV descendió de $0,01$ y $0,05 \text{ S/m}$ (de $0,6422$ a $0,1212 \text{ V}$) a partir de $\sigma_{medio} \geq 1,0 \text{ S/m}$ el EANV fue muy bajo y el ERNV siguió una pendiente suave.

Cuando el medio fue poco conductor $\sigma_{medio} = 0,01 \text{ S/m}$, la inclusión de 1 S/m cercana al electrodo 5 concentró la corriente en su locación y elevó los voltajes de borde, por eso, pequeñas diferencias entre FEM (volumen) y BEM (frontera) se reflejaron con fuerza. Al aumentar σ_{medio} el contraste con la inclusión se redujo hasta igualarse en $\sigma_{inc} = 1 \text{ S/m}$ y, con corriente fija, los voltajes de borde bajaron. El error absoluto cayó rápido y el error relativo disminuyó de forma sostenida. Incluso para $\sigma_{medio} > 1,0 \text{ S/m}$, el contorno se comportó de manera más regular y las métricas siguieron descendiendo.

En comparación con el caso homogéneo de la Fig. 3.2, las tendencias fueron similares y las magnitudes iniciales algo mayores por el contraste local alrededor de la inclusión. Para $\sigma_{medio} = 0,01 \text{ S/m}$ el EANV partió más alto con inclusión que sin inclusión (0,6422 V frente a 0,5949 V) y el ERNV también fue mayor en el arranque (15,27 % frente a 13,6 %). Al aumentar σ_{medio} ambos casos convergieron de forma comparable.

Con la inclusión activa y las mismas corridas usadas para EANV/ERNV, se midieron los tiempos para σ_{medio} en cada condición se reportó la mediana y las bandas Q1–Q3. En la Fig. 4.4 se presentan las medianas de FEM (azul) y BEM (morado) frente a σ_{medio} con sus bandas Q1–Q3, ambas curvas se observan casi horizontales y BEM queda por encima de FEM en todo el rango.

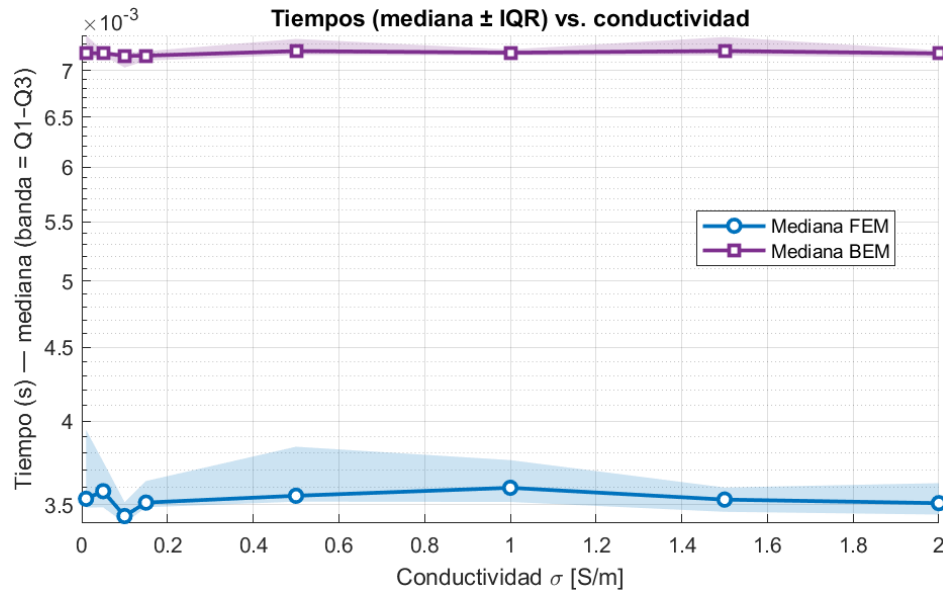


Fig. 4.4 Tiempos (s) de FEM y BEM con mediana y banda Q1-Q3 en función de σ del medio (Heterogéneo)

Los tiempos de FEM se mantuvieron planos entre 3,4 y 3,6 ms, con bandas Q1–Q3 estrechas ($\approx 0,1$ a $0,5 \text{ ms}$). En BEM la mediana fue prácticamente constante en 7,2 ms para todas las σ_{medio} , con bandas Q1–Q3 pequeñas ($\approx 0,1$ a $0,3 \text{ ms}$). Esta es esperable, porque al cambiar la conductividad no altera el tamaño ni la estructura del sistema. La inclusión explica el mayor nivel de tiempos del BEM: añade un contorno interno y, por tanto, más grados de libertad de frontera, una vez fijada esa segmentación, variar σ del medio no modifica el tiempo.

Con inclusión, σ del medio no afectó el tiempo: FEM $\approx 3,5 \text{ ms}$ y BEM $\approx 7,2 \text{ ms}$ casi constantes. Frente al caso homogéneo de la Fig. 3.3, FEM quedó en un nivel similar; BEM resultó más lento ($\approx 2 \times$) por la frontera adicional de la inclusión. En términos de rendimiento, ajustar σ sirve para el análisis físico, no para acelerar la simulación; el tiempo depende sobre todo de cuántas fronteras/segmentos se modelan.

4.3.2 Impedancia de contacto

Se analizó el efecto de la impedancia de contacto Z_e en $[0,01; 0,05; 0,1; 0,5; 1; 1,5; 2; \dots; 10] \Omega$ sobre la concordancia FEM–BEM en un dominio con inclusión de $\sigma_{inc} = 1 \text{ S/m}$ ubicada cerca del electrodo 5. La geometría (16 electrodos, orden y patrón de inyección), la conductividad de fondo, y las discretizaciones se mantuvieron fijas, en BEM el contorno de la inclusión se representó con 20 segmentos en todo el barrido. La comparación se cuantificó con EANV y ERNV.

La Fig. 4.5 mostró el error absoluto (azul, eje izquierdo) y el error relativo (naranja, eje derecho) en función de Z_e . Ambas curvas disminuyeron al aumentar Z_e , con una caída rápida para valores bajos y un descenso gradual hacia 10Ω .

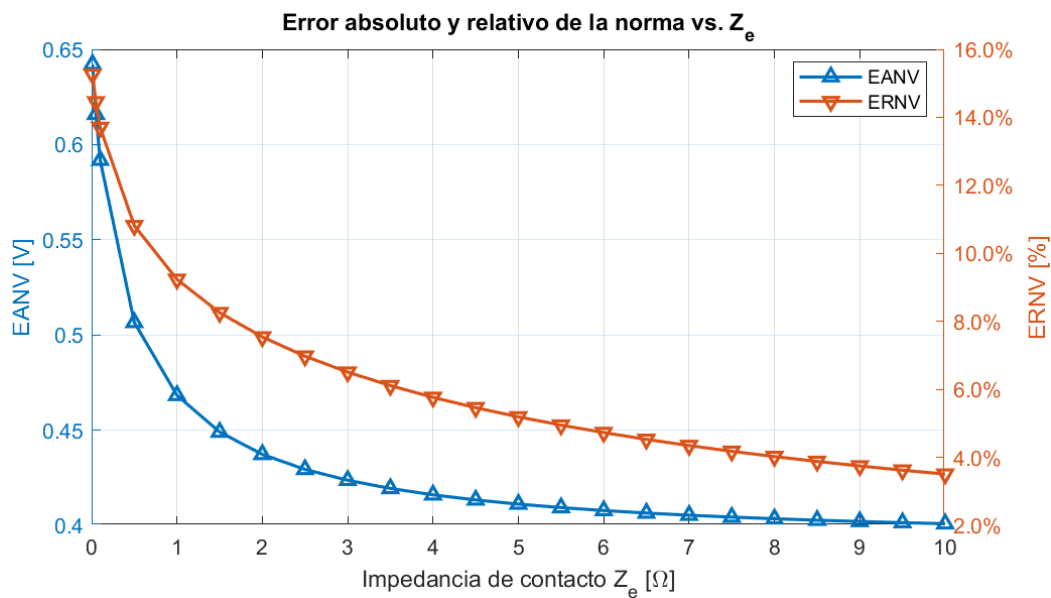


Fig. 4.5 EANV y ERNV vs. Impedancia de contacto Z_e (Heterogéneo)

Con $Z_e = 0,01 \Omega$ se observó el máximo del barrido $E_{ANV} = 0,642$ y $ER_{NV} = 15,3\%$. Al llevar Z_e a 10Ω , E_{ANV} bajó a $\approx 0,401 V$ (reducción cercana al 38 %) y el relativo a $\approx 3,5 \%$ (reducción de $\sim 77 \%$). El tramo más marcado ocurrió entre $0,01$ y 1Ω , desde allí las curvas se aplanaron lentamente.

Con Z_e bajo, E_{ANV} y ER_{NV} alcanzaron sus máximos y luego disminuyeron de forma monótona al aumentar Z_e . Por tanto, la discrepancia entre métodos es más sensible cuando el acoplamiento electrodo medio es fuerte. Al crecer Z_e , ese acoplamiento se debilita, por tanto, la señal de borde depende menos de detalles locales de discretización en contorno y malla, por ende, las diferencias entre FEM y BEM se reducen.

Lo anterior coincidió con el caso homogéneo de la Fig. 3.4, aunque con inclusión los niveles fueron algo mayores en todo el rango. Por ejemplo, a 10Ω el E_{ANV} fue $\sim 0,40 V$ con inclusión frente a $\sim 0,34 V$ sin inclusión. Esta diferencia residual se asocia a gradientes adicionales cerca de la interfaz inclusión medio. Con esto se da termino a los errores para Z_e con inclusión y a continuación se revisan los tiempos.

Con la inclusión activa y las mismas corridas usadas para E_{ANV}/ER_{NV} , se midieron los tiempos para Z_e . En cada condición se reportó la mediana y las bandas Q1–Q3. En la Fig. 4.6 se presentan las medianas de FEM (azul) y BEM (morado) frente a Z_e , junto con sus bandas Q1–Q3; ambas curvas se aprecian prácticamente horizontales, con BEM por encima de FEM en todo el rango.

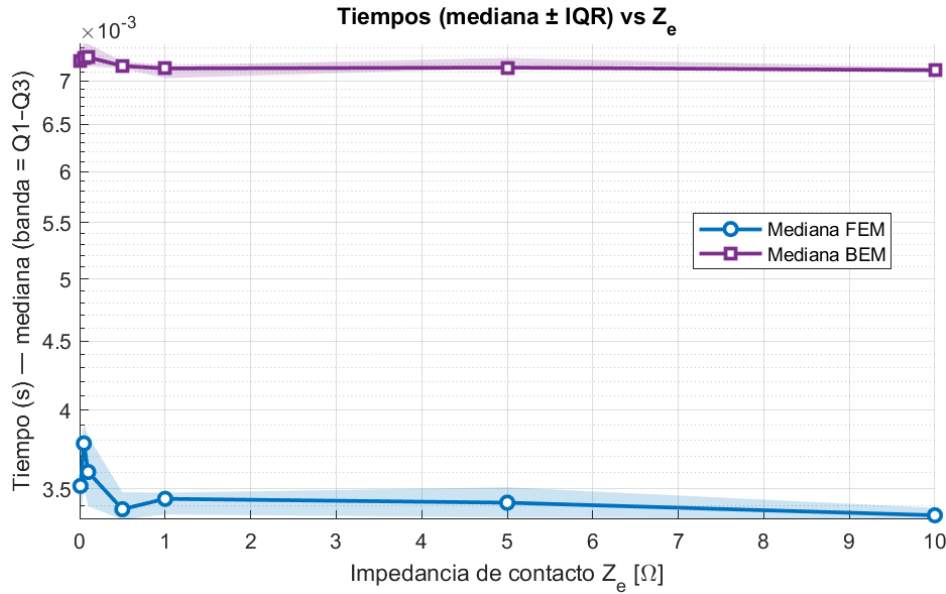


Fig. 4.6 Tiempos (s) de FEM y BEM con mediana y banda Q1-Q3 en función de la impedancia de contacto (Heterogéneo)

Los tiempos permanecieron prácticamente constantes al variar Z_e . En FEM, las medianas quedaron en torno a 3,3 a 3,8 *ms* (con Q1–Q3 estrechos, del orden de 0,1 a 0,5 *ms*). En BEM, las medianas se mantuvieron alrededor de 7,1 a 7,3 *ms* (Q1–Q3 de 0,1 a 0,3 *ms*). Cambiar Z_e solo no modifica el tamaño ni la estructura del sistema lineal. La ligera variación observada en los extremos de Z_e quedó contenida dentro de Q1–Q3 y no sugirió un efecto sistemático de la impedancia.

El patrón plano con Z_e se mantuvo respecto del caso homogéneo de la Fig. 3.5 la impedancia no fue un factor que cambiara el tiempo de cómputo. La única diferencia fue el nivel con inclusión, BEM operó alrededor de 7,2 *ms* (frente a ~3,3 *ms* sin inclusión) por el contorno interno adicional, FEM quedó en valores similares a los del caso homogéneo. Para reducir tiempos, conviene actuar sobre la discretización (segmentación de electrodos o de la inclusión) más que sobre Z_e .

4.3.3 Números de elementos en el espacio entre electrodos (NEEE)

Se analizó el efecto de $NEEE = 1, \dots, 15$ en un caso con inclusión $\sigma_{inc} = 1 \text{ S/m}$ próxima al electrodo 5. Se mantuvieron fijos la geometría con 16 electrodos, el patrón de inyección, σ_{medio}, Z_e y el resto de la discretización (en particular, NSE y la inclusión con 20 segmentos en BEM).

La Fig. 4.7 mostró el error absoluto de la norma de voltaje (azul, eje izquierdo) y el error relativo de la norma de voltaje (naranja, eje derecho) en función de NEEE. Ambas curvas resultaron casi planas, con una mejora pequeña al pasar de 1 a 2 elementos y estabilidad después.

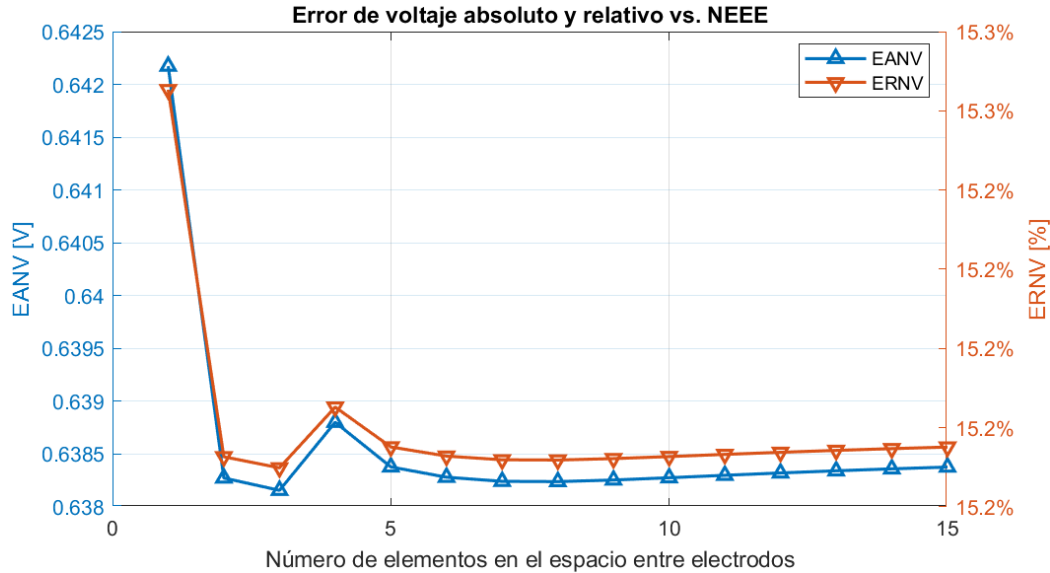


Fig. 4.7 EANV y ERNV vs. NEEE (Heterogéneo)

Al aumentar NEEE de 1 a 15, el error absoluto descendió levemente de 0,64217 a 0,63838 V ($-0,0038\text{ V}$, $\approx 0,6\%$) y el error relativo de 15,27 % a 15,18 % ($-0,09$ puntos porcentuales). La corrección efectiva se concentró en el paso 1 a 2, desde 5 en adelante ambos indicadores se mantuvieron prácticamente constantes, con variaciones en el cuarto decimal (por ejemplo, 0,6382 – 0,6384 V en el absoluto).

NEEE controló solo los arcos entre electrodos, donde no hubo inyección y el potencial cambió de forma suave. Con $NEEE = 1$ el arco quedó tosco y apareció un pequeño sesgo; al pasar a 2 se corrigió casi todo. Desde 3 en adelante el contorno ya estuvo bien descrito y añadir elementos casi no alteró los valores (las variaciones quedaron en el cuarto decimal). Aún con la inclusión cerca del electrodo 5, su efecto se concentró en los electrodos, no en los arcos pasivos; por eso NEEE movió muy poco la discrepancia tras el primer paso. En términos prácticos, $NEEE = 2 - 3$ fue suficiente; aumentarlo más solo refinó el dibujo sin impacto apreciable en las métricas.

Ahora bien, en NEEE igual a 4 se ve un alza leve. Lo más probable es que la forma en que se dividió el arco coincidió con los bordes de los electrodos, por tanto, pequeñas diferencias entre cómo

FEM y BEM describen esa zona se amplifican. Es decir, es un efecto de alineación y no un cambio real del comportamiento. Al aumentar NEEE esa coincidencia se pierde, por ende, el error vuelve al nivel estable. Para confirmarlo se puede correr un poco la división del arco o refinar cerca de los bordes, así el pico debiera moverse o desaparecer.

Con inclusión, aumentar NEEE solo produjo mejoras marginales tras el salto 1 – 2, luego las métricas quedaron prácticamente constantes. En el caso homogéneo de la Fig. 3.6 habíamos visto un efecto que tendía a diferencias constantes.

Con la inclusión y bajo las mismas corridas usadas para EANV/ERNV, se midió el tiempo para $NEEE = 1, \dots, 15$. En cada caso se reportó mediana y bandas Q1–Q3. En la Fig. 4.8 se presentan las medianas de FEM (azul) y BEM (morado) según el número de segmentos entre electrodos, con sus bandas Q1–Q3, la serie de FEM se ve casi horizontal, mientras que BEM crece con el número de segmentos.

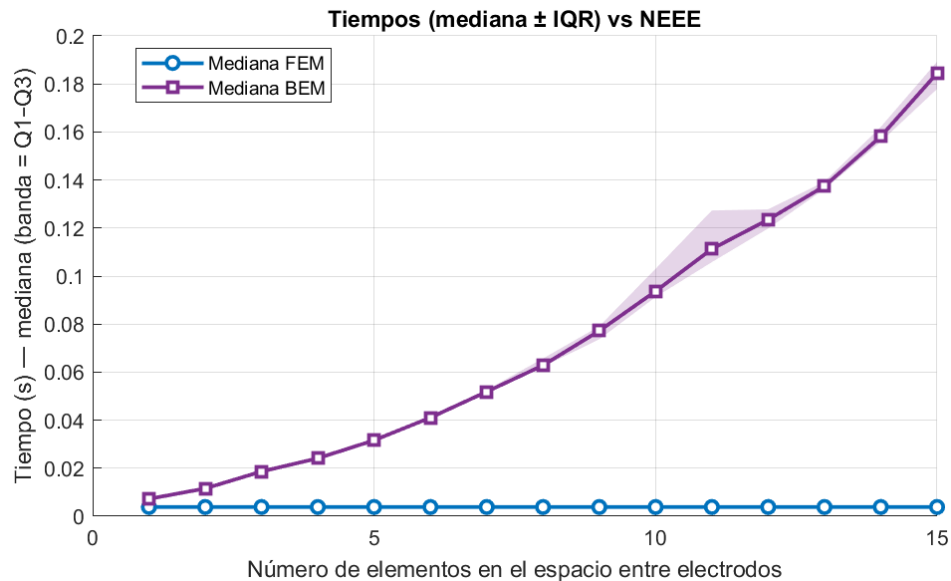


Fig. 4.8 Tiempos (s) de FEM y BEM con mediana y banda Q1-Q3 en función de NEEE (Heterogéneo)

FEM se mantuvo estable alrededor de 3,8 ms en toda la serie, con bandas Q1–Q3 estrechas y prácticamente constantes. En BEM, la mediana aumentó desde 7,2 ms con 1 elemento hasta 184 ms con 15 elementos, las bandas Q1–Q3 también se abrieron hacia el final (p. ej., del orden de 0,5 ms al comienzo a ≈ 11 ms en los valores más altos). Así pues, añadir segmentos entre electrodos no cambia

el sistema de FEM, pero en BEM cada nuevo tramo de borde introduce más nodos de contorno y más pares de tramos que “se ven” entre sí, eso multiplica integrales y operaciones en la matriz densa y el costo computacional se encarece rápido.

El patrón repite lo visto sin inclusión de la Fig. 3.7, FEM es insensible a NEEE, mientras BEM crece con el número de segmentos. Con inclusión, BEM parte más alto y termina mucho más alto por el contorno interno adicional, o sea, la inclusión.

4.3.4 Números de segmentos por electrodo (NSE)

En el escenario con inclusión, se evaluó el efecto de aumentar los segmentos por electrodo (NSE) de 1 a 15. Se mantuvieron fijas la geometría circular con 16 electrodos, el patrón de inyección y la impedancia de contacto; el medio quedó en $\sigma_{medio} = 0,01 \text{ S/m}$ y la inclusión (cerca del electrodo 5) en $\sigma_{inc} = 1 \text{ S/m}$, discretizada en 20 segmentos. Las comparaciones se hicieron con las mismas métricas de voltaje ya utilizadas.

La Fig. 4.9 mostró el EANV (eje izquierdo, azul) y el ERNV (eje derecho, naranja) en función de NSE. Ambas curvas descendieron con fuerza al inicio y luego fueron aplanándose conforme se añadieron más segmentos.

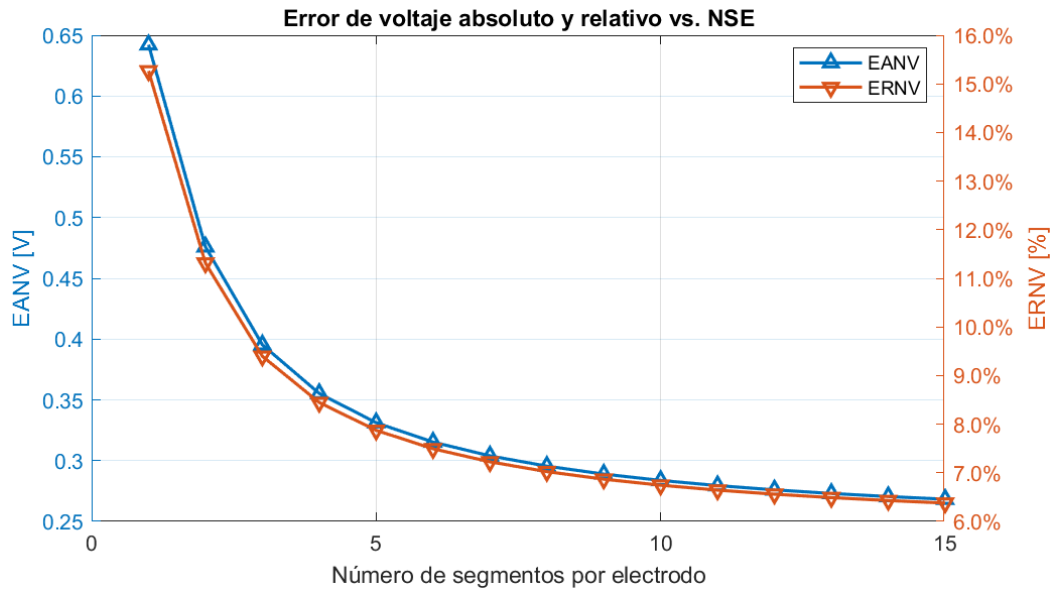


Fig. 4.9 EANV y ERNV vs. NSE (Heterogéneo)

El error absoluto se redujo de 0,64217 V ($NSE = 1$) a 0,26828 V ($NSE = 15$), una disminución de $\approx 58\%$. El mayor salto ocurrió entre 1 a 2 segmentos (0,64217 a 0,47592 V); con 3 a 4 segmentos siguió bajando con rapidez, y desde 5 a 6 segmentos los descensos fueron progresivamente pequeños hasta estabilizarse cerca de 0,27 V. El error relativo mostró el mismo patrón, pasó de 15,27 % a 6,38 % ($\approx 58\%$ de reducción), con la mejora más marcada en los primeros pasos y ajustes menores a partir de 5 a 6 segmentos.

Con inclusión, refinar el electrodo redujo la discrepancia FEM–BEM y el beneficio principal se obtuvo entre 1 a 6 segmentos; desde ahí las mejoras fueron pequeñas. En total, NSE de 1 a 15 bajó el EANV de 0,642 a 0,268 V y el relativo de 15,27 % a 6,38 % ($\approx 58\%$ en ambos). El caso fue similar al homogéneo de la Fig. 3.8, aunque allí la reducción fue algo mayor ($\approx 67\%$): con inclusión permanecieron diferencias residuales ligadas a la interfaz inclusión–medio que no se eliminaban solo refinando el electrodo.

Con los mismos valores usados para EANV/ERNV y con inclusión, se midió el tiempo para $NSE = 1, \dots, 15$, reportando mediana y bandas Q1–Q3. En la Fig. 4.10 se presentan las medianas de FEM (azul) y BEM (morado) frente a NSE; la serie azul FEM luce casi horizontal mientras la morada BEM aumenta de forma marcada a medida que se refinan los electrodos.

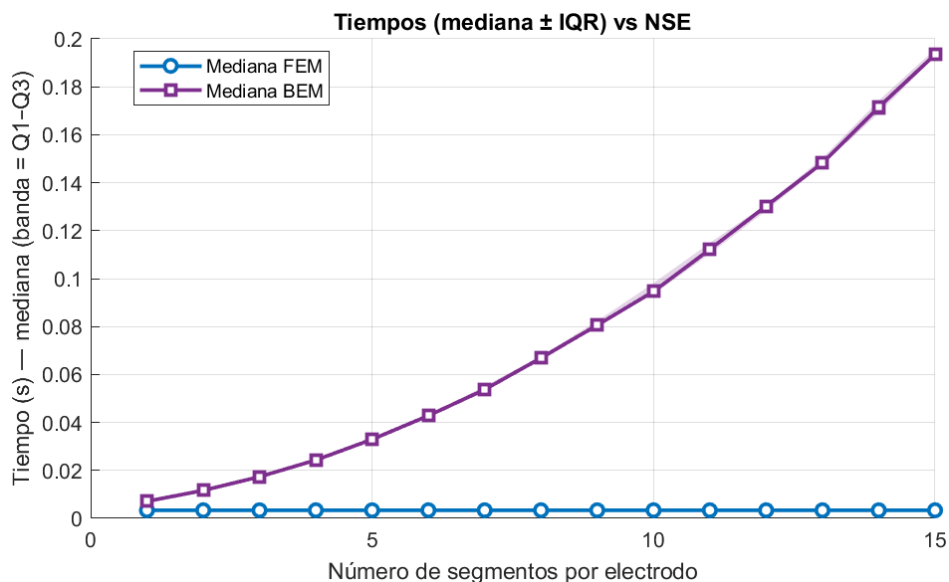


Fig. 4.10 Tiempos (s) de FEM y BEM con mediana y banda Q1-Q3 en función de NSE (Heterogéneo)

El tiempo de FEM se mantuvo cerca de $3,4\text{ ms}$ en toda la serie, con Q1–Q3 ajustados y estables: refinar el electrodo no cambia el tamaño del sistema volumétrico y, por tanto, el coste del solve. En BEM, la mediana creció desde $7,1\text{ ms}$ con un segmento por electrodo hasta $\approx 0,19\text{ s}$ con 15 segmentos, hitos intermedios, $0,024\text{ s}$ con 4 segmentos, $0,067\text{ s}$ con 8, $0,095\text{ s}$ con 10 y $0,172\text{ s}$ con 14. Las bandas Q1–Q3 fueron pequeñas al inicio y se ampliaron ligeramente al final, coherente con un sistema de contorno cada vez mayor: más segmentos, más nodos de borde, más pares que interactúan, más integrales y operaciones. En paralelo (recordando la sección de errores), el refinamiento del electrodo sí mejora la concordancia FEM–BEM, pero el coste temporal de esa mejora recae casi por completo en BEM.

El patrón coincide con el caso homogéneo de la Fig. 3.9, FEM permanece plano y BEM crece con el número de segmentos por electrodo. Con inclusión, BEM parte desde un nivel más alto (por el contorno interno de la inclusión) y termina también más alto.

4.3.5 Corriente inyectada

Se evaluó cómo la corriente inyectada I afectó la concordancia entre FEM y BEM en presencia de una inclusión de $\sigma_{inc} = 1 \text{ S/m}$ cercana al electrodo 5. Se variaron $I = [5, 10, 15, 20, 30] \text{ mA}$ y se mantuvieron fijos la geometría con 16 electrodos, el orden y patrón de inyección, $\sigma_{medio} = 0,01 \text{ S/m}$, Z_e y las discretizaciones (en BEM, el contorno de la inclusión con 20 segmentos).

La Fig. 4.11 mostró el EANV (eje izquierdo, azul) y el ERNV (eje derecho, naranja) en función de I . El EANV creció prácticamente en línea recta y el ERNV permaneció casi constante.

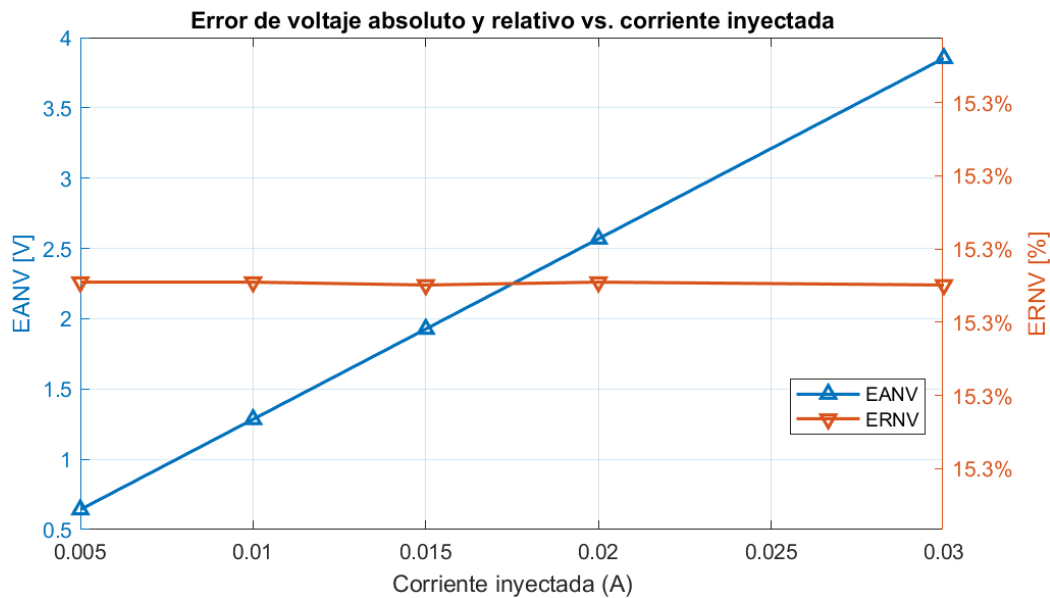


Fig. 4.11 EANV y ERNV vs. Corriente inyectada (Heterogéneo)

Al aumentar I de 5 a 30 mA , el EANV pasó de 0,642 V a 3,853 V : se multiplicó en la misma proporción que la corriente y el cociente $\|\Delta V\|_2/I$ se mantuvo $\approx 128,4 \text{ V/A}$ en todo el rango. En paralelo, el ERNV se mantuvo estable en $\sim 15,27\%$; no se observaron quiebres de tendencia ni cambios de pendiente.

El problema directo de TIE es lineal respecto de I , con geometría, Z_e , σ_{medio} y discretizaciones fijas, los voltajes de borde son proporcionales a la corriente. Por lo mismo, la diferencia entre FEM y BEM también escaló con I al igual que en el caso homogéneo de la Fig. 3.10.

Con inclusión y las mismas corridas usadas para EANV/ERNV, se midió el tiempo al variar la corriente inyectada I . en cada punto se reporta mediana y bandas Q1–Q3. En la Fig. 4.12 se presentan las medianas de tiempo de FEM (azul) y BEM (morado) frente a I , ambas series se aprecian prácticamente horizontales.

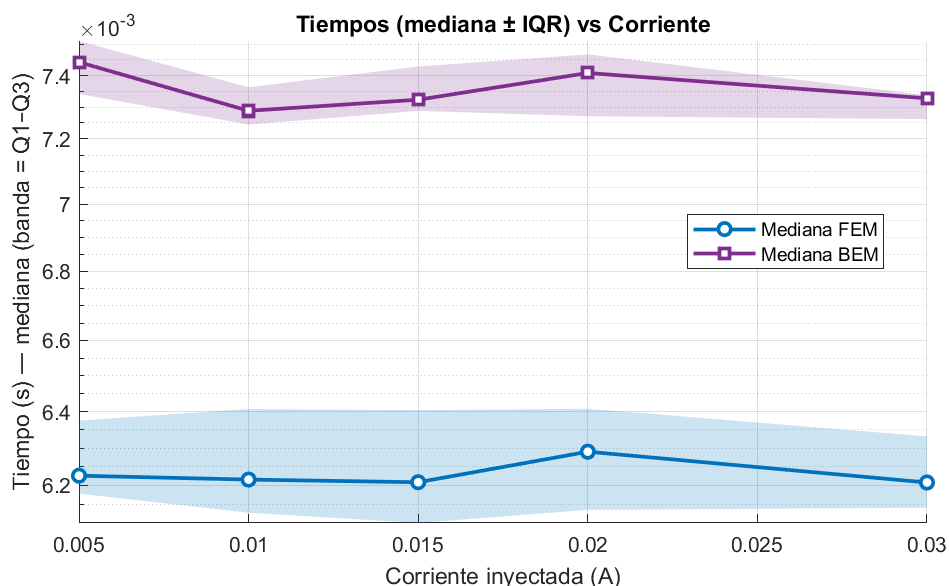


Fig. 4.12 Tiempos (s) de FEM y BEM con mediana y banda Q1-Q3 en función de la corriente inyectada (Heterogéneo)

Los tiempos quedaron planos con la corriente. FEM osciló entre 6,2 y 6,3 ms (bandas Q1–Q3 $\approx 0,1 - 0,3$ ms): 6,2 ms para 0,005 a 0,015 A, 6,3 ms en 0,020 A y vuelve a 6,2 ms en 0,030 A. BEM se mantuvo entre 7,3 y 7,4 ms (Q1–Q3 $\approx 0,1$ a 0,2 ms) a lo largo de todo el barrido. La lectura es directa, cambiar I solo modifica el vector fuente, las matrices que se factorizan no cambian, así que el coste de la simulación permanece esencialmente constante.

El patrón coincide con el caso sin inclusión de la Fig. 3.11 (tiempos independientes de I), pero el nivel base es mayor con inclusión: FEM pasa de $\sim 5,7$ a 6,0 ms (homogéneo) a $\sim 6,2$ ms, y BEM de $\sim 3,3$ a 3,4 ms a $\sim 7,3$ a 7,4 ms, debido al contorno interno adicional.

4.3.6 Conductividades de la inclusión

Se evaluó cómo cambió la concordancia FEM–BEM al variar la conductividad de la inclusión σ_{inc} en los valores $[0,01; 0,05; 0,10; 0,15; 0,5; 1,0; 1,5; 2,0]$ S/m manteniendo fijo el resto de la configuración: $\sigma_{medio} = 0,01$ S/m , Z_e , geometría circular con 16 electrodos y patrón de inyección. La inclusión estuvo próxima al electrodo 5 y, en BEM, su contorno se representó con 20 segmentos en todo el barrido.

La Fig. 4.13 mostró el EANV (azul, eje izquierdo) y el ERNV (naranja, eje derecho) en función de σ_{inc} . Ambas curvas aumentaron con σ_{inc} y toma valores constantes al llegar a conductividades más altas.

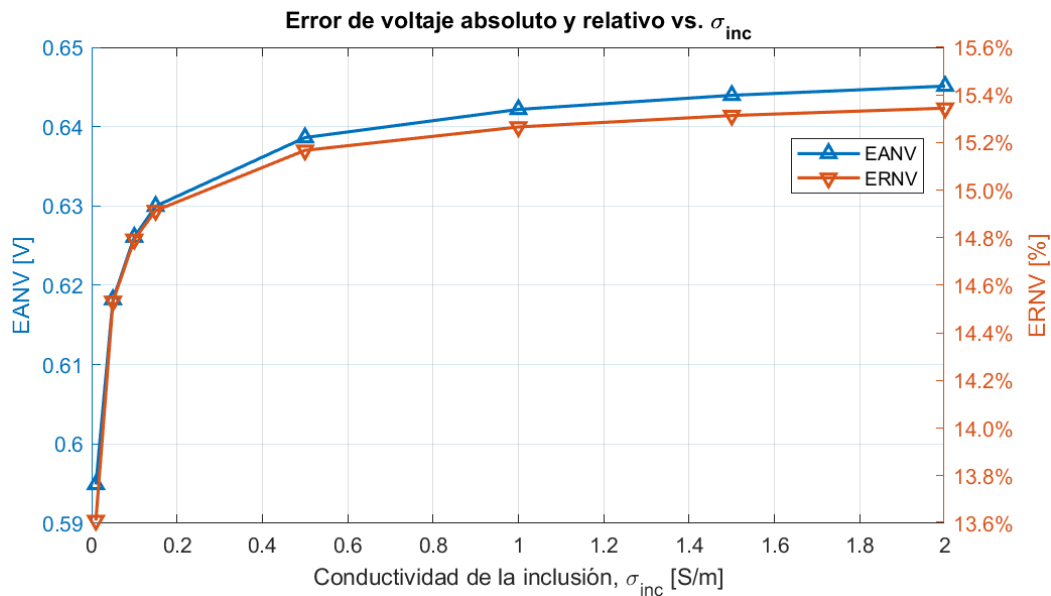


Fig. 4.13 EANV y ERNV vs. Conductividad de la inclusión (Heterogéneo)

El EANV subió de 0,59490 V con $\sigma_{inc} = 0,01$ S/m a 0,64511 V con $\sigma_{inc} = 2$ S/m (incremento de 0,05021 V , $\approx 8,4$ %). Casi la mitad del aumento ocurrió en el primer paso, 0,01 a 0,05 S/m (de 0,59490 a 0,61821 V), desde 0,5 S/m en adelante los cambios fueron muy pequeños (del orden de milésimas de voltaje). El error relativo pasó de 13,61 % a 15,35 % (+1,74 puntos porcentuales, $\approx 12,7$ % relativo), con el mayor crecimiento también en los primeros niveles de σ_{inc} .

Con σ_{inc} igual al fondo el problema es casi homogéneo y la discrepancia es baja. Al aumentar σ_{inc} la inclusión conduce mejor, concentra corriente y genera gradientes más fuertes en su interfaz

cercana al electrodo cinco. Esa zona es sensible a cómo cada método representa la superficie y por eso los errores suben con rapidez al inicio. Cuando la inclusión ya es mucho más conductora que el fondo, el patrón de corrientes cambia poco y las métricas tienden a estabilizarse. Esto invierte lo observado al aumentar la conductividad del medio, donde el contraste disminuyó y los errores bajaron. Por tanto, en este escenario el factor clave es el contraste con el fondo y la proximidad al borde, más que el valor absoluto de σ_{inc} una vez superado el umbral en que el comportamiento se estabiliza. Por otra parte, pasamos al análisis del tiempo de simulación de σ_{inc} .

Con inclusión activa y manteniendo las mismas corridas usadas para EANV/ERNV, se midieron tiempos al variar la conductividad de la inclusión. En cada punto se reporta mediana y bandas Q1–Q3. En la Fig. 4.14 se presentan las medianas de tiempo de FEM (azul) y BEM (morado) frente a σ_{inc} , ambas series se aprecian prácticamente planas, con BEM por encima de FEM en todo el rango.

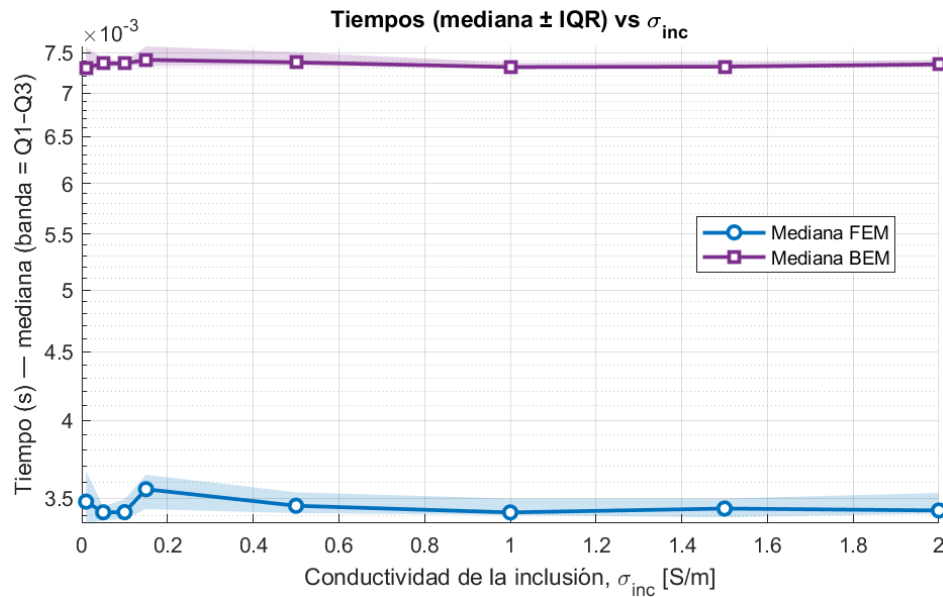


Fig. 4.14 Tiempos (s) de FEM y BEM con mediana y banda Q1-Q3 en función de la conductividad de la inclusión (Heterogéneo)

Los tiempos fueron casi constantes con σ_{inc} . FEM se mantuvo en torno a 3,4 a 3,6 ms con bandas Q1–Q3 estrechas ($\approx 0,1 - 0,3$ ms). BEM quedó alrededor de 7,3 a 7,5 ms, también con bandas Q1–Q3 pequeñas ($\approx 0,1$ a $0,3$ ms). Esto se debe a que cambiar la conductividad no modifica el tamaño ni la estructura de los sistemas lineales.

4.3.7 Números de segmentos de la inclusión

Se analizó cómo el número de segmentos con que BEM describe la frontera de la inclusión afecta la concordancia FEM–BEM. Se variaron $segs_{inc} = [4, 8, 16, 20, 32, 64, 128]$ manteniendo fijos la geometría con 16 electrodos, el patrón de inyección, Z_e , $\sigma_{medio} = 0,01 \text{ S/m}$ y $\sigma_{inc} = 1 \text{ S/m}$. La inclusión permaneció cerca del electrodo 5. Las métricas fueron las mismas de voltaje ya usadas.

La Fig. 4.15 mostró el error absoluto (azul, eje izquierdo) y el error relativo (naranja, eje derecho) en función de $segs_{inc}$. Ambas curvas cayeron de 4 a 20 – 32 segmentos y, a partir de ahí, cambiaron muy poco.

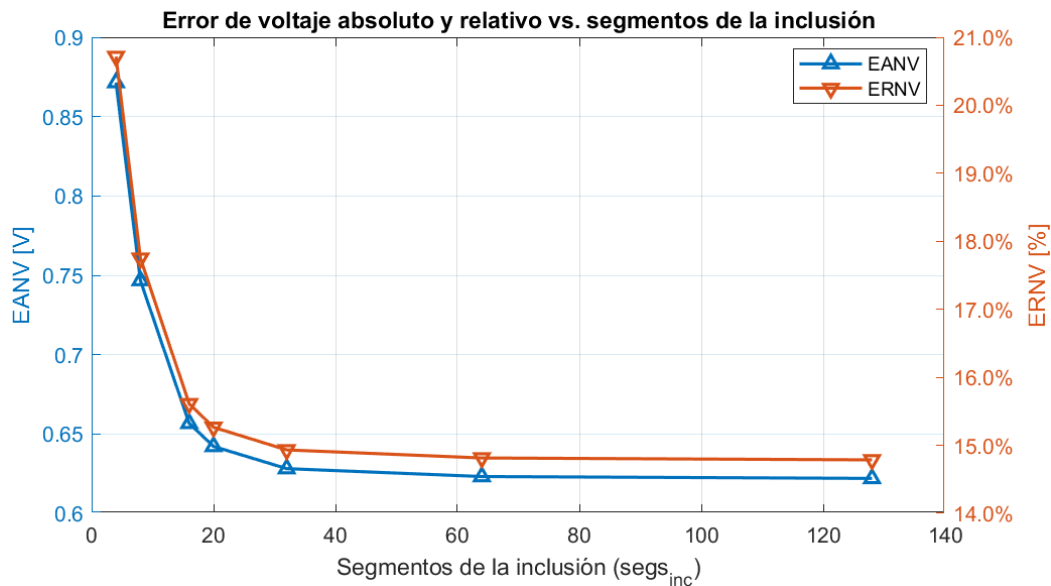


Fig. 4.15 EANV y ERNV vs. Segmentos de la inclusión (Heterogéneo)

El EANV bajó de $0,87147 \text{ V}$ con 4 segmentos a $0,62202 \text{ V}$ con 128 segmentos. La mejora efectiva se concentró al inicio: con 20 segmentos ya estaba en $0,64217 \text{ V}$ y con 32 en $0,62817 \text{ V}$; desde ahí los cambios quedaron en milésimas. El ERNV descendió de $20,72 \%$ a $14,79 \%$, con la

mayor reducción también entre 4 y 20 segmentos y ajustes menores en adelante. En la práctica, 20 a 32 segmentos describieron la inclusión con suficiente detalle.

Con pocos segmentos la inclusión se aproxima por un polígono y aparecen esquinas geométricas que intensifican los gradientes, lo que aumenta la discrepancia con FEM. Al añadir segmentos la frontera se acerca a una circunferencia y el flujo se reparte de manera más realista, por eso los errores disminuyen con rapidez al inicio. Una vez capturada la curvatura con 20 – 32, refinar más cambia muy poco las métricas y la diferencia restante depende sobre todo del tratamiento de los electrodos y de la interfaz inclusión medio.

Con la inclusión activa y las mismas corridas usadas para EANV/ERNV, se midió el tiempo de simulación al variar el número de segmentos con que BEM discretiza el contorno de la inclusión. En la Fig. 4.16 se trazan las medianas de tiempo de FEM (azul) y BEM (morado). La curva azul está casi horizontal en todo el eje $segs_{inc}$, la morada crece de forma pronunciada a medida que aumentan los segmentos; ambas bandas Q1–Q3 son estrechas.

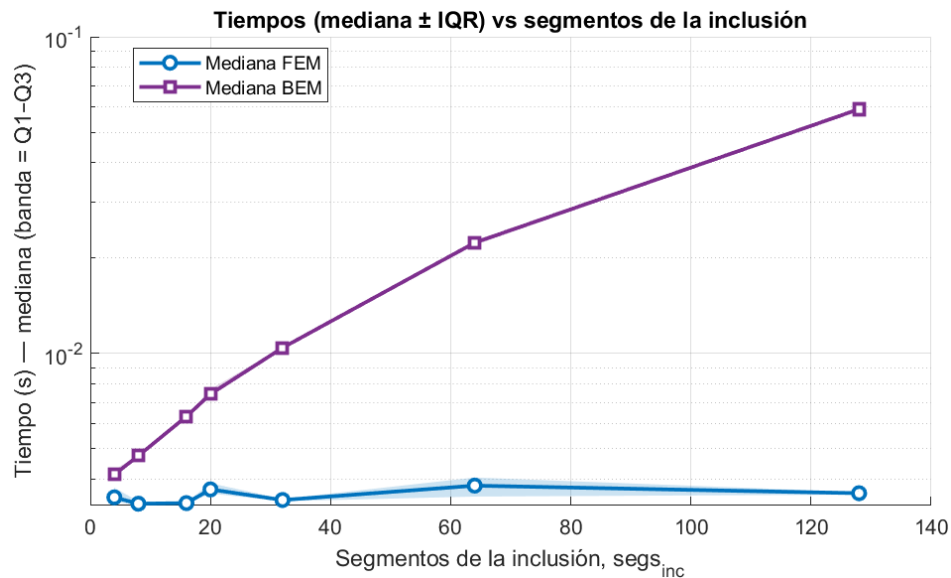


Fig. 4.16 Tiempos (s) de FEM y BEM con mediana y banda Q1-Q3 en función de los segmentos de la inclusión (Heterogéneo)

FEM se mantuvo prácticamente constante, entre 3,4 y 3,8 *ms* en toda la serie, con Q1–Q3 estrechos ($\approx 0,1$ a $0,5$ *ms*), lo que refleja que el coste está fijado por la malla volumétrica, que aquí no cambia. En BEM, en cambio, el tiempo creció de forma marcada al refinar la frontera de la inclusión: 4,1 *ms* con 4 segmentos, 6,3 *ms* con 16, 7,4 *ms* con 20, 10,4 *ms* con 32, 22,4 *ms* con 64 y 59,1 *ms* con 128; las bandas Q1–Q3 siguieron siendo pequeñas ($\approx 0,1$ a $0,7$ *ms*). La razón es estructural, cada segmento adicional añade grados de libertad de contorno y la matriz densa aumenta de tamaño y acoplamientos; ensamblarla y resolverla se encarece más que linealmente.

Asimismo, el costo lo fija la discretización del contorno interno: en BEM el tiempo crece con $segs_{inc}$, mientras FEM se mantiene casi constante. Como los errores ya se estabilizan hacia 20–32 segmentos, ese rango ofrece el mejor compromiso precisión/tiempo.

4.4. Resumen caso Heterogéneo

Todo el análisis anterior se resume en la Tabla 4.1, donde se sintetizan los efectos de los parámetros físicos y geométricos sobre las métricas de comparación (EANV, ERNV) y los tiempos de simulación en el caso heterogéneo. Esta tabla reúne las tendencias observadas en las gráficas y permite identificar los escenarios de mejor y peor desempeño del toolbox BEM frente al modelo FEM.

Tabla 4.1 Resumen de tendencias de métricas y tiempos según parámetros del modelo caso heterogéneo

Parámetro / Métricas de comparación	EANV (Error Absoluto)	ERNV (Error Relativo)	Tiempo FEM (EIDORS)	Tiempo BEM
Conductividad del Medio (σ_{medio})	Disminuye, a mayor σ_{medio} , menor EANV.	Disminuye, a mayor σ_{medio} , menor ERNV.	Sin cambios	Sin cambios
Impedancia de Contacto (Z_e)	Disminuye, a mayor Z_e , menor EANV.	Disminuye, a mayor Z_e , menor ERNV.	Sin cambios	Sin cambios
N° de Elementos entre Electrodo (NEEE)	Cambios menores tras el paso inicial de discretización.	Cambios menores tras el paso inicial de discretización.	Sin cambios	Aumenta con NEEE.
N° de Segmentos por Electrodo (NSE)	Disminuye con mayor detalle y luego variación mínima.	Disminuye con mayor detalle y luego variación mínima.	Sin cambios	Aumenta con NSE.
Corriente Inyectada (I)	Aumenta, proporcional a I.	Constante, ERNV se mantiene constante.	Sin cambios	Sin cambios
Conductividad de la Inclusión (σ_{inc})	EANV tiende a subir y luego presenta variación mínima.	ERNV tiende a subir y luego presenta variación mínima.	Sin cambios	Sin cambios
Segmentos de la Inclusión ($Segs_{inc}$)	Disminuye con mayor detalle y luego variación mínima.	Disminuye con mayor detalle y luego variación mínima.	Sin cambios	Aumenta con $Segs_{inc}$.

El análisis en el caso con inclusión validó la capacidad del toolbox BEM para modelar geometrías internas. Se demostró que refinar la frontera de la inclusión redujo el error de concordancia hasta que se alcanzó una diferencia constante. El beneficio principal se obtuvo al usar entre 20 a 32 segmentos para describir la inclusión. A partir de ese rango, el refinamiento adicional generó una variación mínima en las métricas.

La mayor diferencia relativa se observó con una representación de baja fidelidad en la inclusión. Con 4 segmentos el error relativo (ERNV) alcanzó aproximadamente ~20.72 por ciento, y descendió hacia ~14.79 por ciento al refinar la frontera a 128 segmentos. Este resultado demostró que

la geometría de la frontera interna influye de forma directa en la concordancia cuando el contraste de conductividad con el medio es alto.

Adicionalmente, esta tendencia de concordancia es consistente con la relación observada entre las métricas de error. En varias barridas de los diferentes parámetros, el EANV y el ERNV se desplazaron casi en paralelo. Esto se debe a que el ERNV es el EANV normalizado por la norma de referencia de FEM. Dado que esta norma cambia muy poco entre configuraciones, ambas curvas replican la misma forma, lo que explica por qué los aumentos o descensos del error absoluto se reflejan casi uno a uno en el error relativo.

Respecto a la discretización externa, el NSE mantuvo el mismo comportamiento que en el caso homogéneo, mostrando mejoras al pasar a discretizaciones con mayor detalle y alcanzando un valor casi estable a partir de 4 a 6 elementos. Por su parte, el NEEE continuó con efecto marginal tras el salto de 1 a 2 y luego se mantuvo prácticamente constante.

En términos de rendimiento computacional, las mediciones confirmaron que el tiempo de simulación estuvo gobernado por el tamaño y la estructura de las fronteras en BEM. Los cambios en el número de segmentos (incluyendo la nueva frontera interna) elevaron progresivamente el tiempo de procesamiento en BEM, mientras que el tiempo de FEM se mantuvo prácticamente constante.

En conjunto, los resultados en el caso heterogéneo indican que un nivel intermedio de discretización, con la frontera de la inclusión descrita entre 20 a 32 segmentos y el contorno externo con NSE intermedio y NEEE bajos (2 o 3), ofrece el mejor balance entre la calidad del modelo y el costo computacional para la TIE.

Capítulo 5. Conclusiones

5.1. Sumario

Este trabajo presenta el desarrollo y la evaluación de un esquema comparativo para el problema directo de Tomografía por Impedancia Eléctrica (TIE), contrastando un modelo de Elementos Finitos (FEM, EIDORS) con un toolbox de Elementos de Contorno (BEM-EIT). El objetivo fue caracterizar la concordancia numérica entre ambos enfoques y su costo computacional bajo condiciones controladas, de modo de extraer lineamientos prácticos de uso.

Se construyeron modelos 2D de un dominio circular con 16 electrodos distribuidos uniformemente y patrones de inyección compatibles entre métodos. Se estudiaron dos escenarios: medio homogéneo y medio con inclusión (Heterogéneo) circular ubicada cerca de un electrodo. La inclusión se representó con contorno discretizado en BEM y con la misma geometría en FEM, manteniendo constante la posición para favorecer comparaciones punto a punto. Todas las corridas se ejecutaron fijando geometría, numeración de electrodos y esquema de estimulación.

La comparación se organizó como estudios de un solo factor, manteniendo el resto fijo. En el caso homogéneo se barrieron la conductividad del fondo, la impedancia de contacto y la corriente inyectada, junto con parámetros de discretización de la frontera en BEM: segmentos por electrodo (NSE) y número de elementos en el espacio entre electrodos (NEEE). Para el caso con inclusión se añadieron la conductividad de la inclusión y el número de segmentos del contorno de la inclusión en BEM. En cada condición se generaron vectores de voltaje FEM y BEM perfectamente alineados (16 patrones $\times$ 16 lecturas = 256 mediciones), y se cuantificó la concordancia mediante Error Absoluto de la Norma de Voltaje (EANV) y Error Relativo de la Norma de Voltaje (ERNV). En paralelo, el tiempo de cómputo de cada simulación se resumió con mediana y bandas Q1–Q3.

El informe cubre diseño de los modelos y alineación FEM–BEM, definición de métricas, análisis sistemático en medio homogéneo, repetición del protocolo con inclusión y variaciones específica, y una discusión metodológica que organiza recomendaciones de discretización y de configuración cuando el interés es priorizar precisión, tiempo de cómputo o un equilibrio entre ambos.

5.2. Conclusiones

El proyecto evaluó el desempeño del toolbox BEM-EIT basado en el Método de Elementos de Contorno (BEM) para el problema directo de Tomografía de Impedancia Eléctrica (TIE), contrastando sus resultados y tiempos de simulación con el toolbox EIDORS (FEM). La comparación permitió validar la implementación del toolbox y analizar la influencia de los parámetros físicos y geométricos sobre la precisión y el costo computacional de ambos enfoques.

En el caso homogéneo y heterogéneo, los errores (EANV y ERNV) disminuyeron con el aumento de la conductividad y la impedancia de contacto. Se confirmó la linealidad del modelo con la corriente inyectada, el EANV aumenta proporcionalmente a I , mientras que el ERNV se mantuvo con variación mínima. Evidenciando que ambas herramientas escalan de forma coherente ante cambios en la corriente inyectada. Este comportamiento reafirma la consistencia de la formulación numérica y la correcta correspondencia entre EIDORS (FEM) y BEM-EIT (BEM) en la respuesta de voltajes.

Además, en el caso heterogéneo, la presencia de una inclusión incrementó la sensibilidad a la discretización. La mayor diferencia relativa ($\sim 20,72\%$) se observó con un menor número de segmentos en la inclusión, demostrando que la discretización de la frontera interna es el factor más influyente en la concordancia. No obstante, el BEM-EIT reprodujo consistentemente las tendencias físicas esperadas en los voltajes.

El análisis de rendimiento reveló una divergencia computacional clave. En EIDORS (FEM) se mantuvieron tiempos prácticamente menos variables, mientras que el BEM mostró una dependencia directa y creciente con la discretización debido a su matriz densa. Por esta razón, el BEM-EIT no resultó ser más rápido que el toolbox para FEM en general. Este análisis permitió establecer que un nivel de detalle intermedio (NSE entre 4 y 6, NEEE entre 2 y 3, y 20 a 32 segmentos en la inclusión) logra el equilibrio demostrado entre exactitud numérica y rendimiento temporal.

En conjunto, se concluye que ambos modelos son equivalentes en precisión numérica, reproduciendo de forma similar las tendencias físicas. La única divergencia clara se localizó en el costo computacional, donde la sensibilidad del BEM al refinamiento de frontera contrastó con el costo menos variable del FEM. Finalmente, el estudio valida la hipótesis de trabajo al demostrar la comparabilidad de los resultados del toolbox BEM-EIT para BEM con el de EIDORS para FEM.

5.3. Trabajo Futuro

Como siguiente paso natural, se propone validar experimentalmente los resultados con un tomógrafo. Esto permitiría contrastar voltajes punto a punto y métricas EANV/ERNV con datos reales, estimando además la incertidumbre debida a ruido, deriva térmica y tolerancias de posición.

Bibliografía

- [1] X.-Y. Ke *et al.*, «Advances in electrical impedance tomography-based brain imaging», *Mil. Med. Res.*, vol. 9, n.º 1, p. 10, feb. 2022, doi: 10.1186/s40779-022-00370-7.
- [2] T. A. Khan y S. H. Ling, «Review on Electrical Impedance Tomography: Artificial Intelligence Methods and its Applications», *Algorithms*, vol. 12, n.º 5, Art. n.º 5, may 2019, doi: 10.3390/a12050088.
- [3] E. Ma, «An equilibrium finite element method for electrical impedance tomography», *Eng. Res. Express*, vol. 5, n.º 1, p. 015042, mar. 2023, doi: 10.1088/2631-8695/acb905.
- [4] S. J. Hamilton y A. Hauptmann, «Deep D-Bar: Real-Time Electrical Impedance Tomography Imaging With Deep Neural Networks», *IEEE Trans. Med. Imaging*, vol. 37, n.º 10, pp. 2367-2377, oct. 2018, doi: 10.1109/TMI.2018.2828303.
- [5] J. Dusek y J. Mikulka, «Measurement-Based Domain Parameter Optimization in Electrical Impedance Tomography Imaging», *Sensors*, vol. 21, n.º 7, Art. n.º 7, ene. 2021, doi: 10.3390/s21072507.
- [6] S. N. Makarov *et al.*, «Boundary Element Fast Multipole Method for Modeling Electrical Brain Stimulation with Voltage and Current Electrodes», *J. Neural Eng.*, vol. 18, n.º 4, p. 10.1088/1741-2552/ac17d7, ago. 2021, doi: 10.1088/1741-2552/ac17d7.
- [7] A. K. Khambampati, K. Y. Kim, Y.-G. Lee, y S. Kim, «Boundary element method to estimate the time-varying interfacial boundary in horizontal immiscible liquids flow using electrical resistance tomography», *Appl. Math. Model.*, vol. 40, n.º 2, pp. 1052-1068, ene. 2016, doi: 10.1016/j.apm.2015.06.026.
- [8] Y. Xu, F. Dong, y C. Tan, «Electrical resistance tomography for locating inclusions using analytical boundary element integrals and their partial derivatives», *Eng. Anal. Bound. Elem.*, vol. 34, n.º 10, pp. 876-883, oct. 2010, doi: 10.1016/j.enganabound.2010.05.008.
- [9] E. Adam y S. Ammaiaippan, «Survey on Medical Imaging of Electrical Impedance Tomography (EIT) by Variable Current Pattern Methods», *J. ISMAC*, vol. 2, pp. 82-95, may 2021, doi: 10.36548/jismac.2021.2.002.
- [10] Z. Li, J. Zhang, D. Liu, y J. Du, «CT Image-Guided Electrical Impedance Tomography for Medical Imaging», *IEEE Trans. Med. Imaging*, vol. 39, n.º 6, pp. 1822-1832, jun. 2020, doi: 10.1109/TMI.2019.2958670.
- [11] D. Liu, D. Gu, D. Smyl, J. Deng, y J. Du, «B-Spline-Based Sharp Feature Preserving Shape Reconstruction Approach for Electrical Impedance Tomography», *IEEE Trans. Med. Imaging*, vol. 38, n.º 11, pp. 2533-2544, nov. 2019, doi: 10.1109/TMI.2019.2905245.

- [12] S. Ren, K. Sun, C. Tan, y F. Dong, «A Two-Stage Deep Learning Method for Robust Shape Reconstruction With Electrical Impedance Tomography», *IEEE Trans. Instrum. Meas.*, vol. 69, n.º 7, pp. 4887-4897, jul. 2020, doi: 10.1109/TIM.2019.2954722.
- [13] T. Rymarczyk, K. Polakowski, y J. Sikora, «PDE-solved by boundary element method for electrical impedance tomography», *J. Phys. Conf. Ser.*, vol. 1782, n.º 1, p. 012030, feb. 2021, doi: 10.1088/1742-6596/1782/1/012030.
- [14] A. Adler y W. R. B. Lionheart, «Uses and abuses of EIDORS: an extensible software base for EIT», *Physiol. Meas.*, vol. 27, n.º 5, pp. S25-S42, may 2006, doi: 10.1088/0967-3334/27/5/S03.
- [15] M. Vauhkonen, W. R. B. Lionheart, L. M. Heikkinen, P. J. Vauhkonen, y J. P. Kaipio, «A MATLAB package for the EIDORS project to reconstruct two-dimensional EIT images», *Physiol. Meas.*, vol. 22, n.º 1, p. 107, feb. 2001, doi: 10.1088/0967-3334/22/1/314.
- [16] A. Adler, A. Boyle, F. Braun, M. G. Crabb, B. Grychtol, W. R. B. Lionheart, H. F. J. Tregidgo, and R. Yerworth, “EIDORS Version 3.9,” in Proc. 18th Int. Conf. on Biomedical Applications of Electrical Impedance Tomography (EIT 2017), Jun. 2017.

