

UNIVERSIDAD CATÓLICA DE LA SANTÍSIMA CONCEPCIÓN



**SOBRE LA EXISTENCIA Y ESTABILIDAD DE SOLUCIONES  
PERIÓDICAS EN SISTEMAS HAMILTONIANOS**

*Tesis para optar al grado de  
Magíster en Matemática Aplicada*

**Margarita Quispe Tusco**

**Profesor guía: Dr. Marco Uribe**

**FACULTAD DE INGENIERÍA**  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA Y FÍSICA APLICADAS  
Concepción - Chile  
Octubre - 2018



## AGRADECIMIENTOS

Son muchas las personas a quienes quiero agradecer.

En primer lugar, doy gracias a Dios, por la vida y por haberme permitido llegar a terminar mi trabajo.

Me gustaría expresar mis más sinceros y especial agradecimiento al Profesor Dr. Marco Uribe mi director de tesis, a quién admiro y aprecio mucho, gracias por su ayuda, orientación, comprensión, aliento, consejos, por confiar en mí para realizar este trabajo, por enseñarme matemática, por compartir sus conocimientos y su tiempo para la realización y revisión de esta tesis, por la calidad humana para tratar a las personas y sobre todo gracias por su tiempo que invirtió en mi formación académica, cada vez que necesité siempre estuvo ahí a pesar de sus responsabilidades y finalmente por su cariño y su infinita paciencia conmigo. Muchas gracias por brindarme su amistad.

A los profesores de la comisión evaluativa: Dr. Dante Carrasco y Dra. Johanna García por sus críticas constructivas y sus observaciones que ayudaron a mejorar el escrito.

A todos y cada uno de los profesores y administrativos del Departamento de Matemática y Física Aplicadas por la excelente acogida y de manera especial a la Profesora Dra. Violeta Vivanco por apoyarme, aconsejarme, y sobre todo por sus palabras de aliento muchas gracias.

A la mujer más bella mi madre querida Marcelina, a mis hermanos Reynaldo, Gualberto, Eduardo, J. David y a mi tío Leandro por todo el apoyo, la confianza, consejos y ser mis mejores amigos a pesar de la distancia.

A la Sra. Gladiz por todo el cariño.

Sin todas estas personas no habría sido posible llegar hasta el final.

**Muchas gracias a todos**



# Resumen

En esta tesis, estudiaremos sistemas Hamiltonianos con dos grados de libertad asociado a las funciones hamiltonianas definidas por:

$$H = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2) + V_5(x, y),$$

y

$$\tilde{H} = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2) + \varepsilon V_5(x, y) + \varepsilon^2 V_6(x, y),$$

donde  $V_5(x, y)$  y  $V_6(x, y)$  son polinomios homogéneos de grado cinco y seis, respectivamente.

Nuestro principal objetivo es estudiar analíticamente la existencia y estabilidad de soluciones periódicas en los diferentes niveles de energía positiva  $H = h$  de los sistemas Hamiltonianos asociado a los polinomios  $H$  y  $\tilde{H}$ . La principal herramienta usada para nuestro estudio es el clásico método del promedio.



# Contenidos

<b>Introducción</b>	<b>1</b>
<b>1. Preliminares y Nociones Fundamentales</b>	<b>13</b>
1.1. Motivaciones Físicas y Matemáticas . . . . .	13
1.2. Definición del Problema . . . . .	13
1.2.1. Formulación Lagrangiana y Hamiltoniana . . . . .	14
1.2.2. Significado de la función Hamiltoniana . . . . .	18
1.2.3. Sistema Hamiltoniano con $n$ grados de libertad . . . . .	18
1.2.4. Transformaciones Simpléticas . . . . .	21
<b>2. El Método del Promedio</b>	<b>23</b>
2.1. Descripción del Método del Promedio . . . . .	23
2.1.1. Existencia y Estabilidad de soluciones periódicas . . . . .	23
2.1.2. Teorema de existencia de soluciones vía promedio de primer orden . . . . .	24
2.1.3. Estabilidad de soluciones periódicas para promedio de primer orden . . . . .	33
2.1.4. Teorema de existencia de soluciones vía promedio de segundo orden . . . . .	37
2.1.5. Estabilidad de soluciones periódicas para promedio de segundo orden . . . . .	41
<b>3. Sistemas Hamiltonianos con dos grados de libertad y potencial de   grado cinco</b>	<b>45</b>
3.1. Sistema hamiltoniano con potencial de grado cinco . . . . .	46
3.2. Promedio de primer y segundo orden . . . . .	55

<b>4. Sistema Hamiltoniano con potencial de grado seis</b>	<b>63</b>
4.1. Forma estándar para el promedio de orden 2 . . . . .	63
4.2. Sistema Hamiltoniano con potencial cinco . . . . .	69
4.2.1. Método del promedio de segundo orden . . . . .	70
4.3. Sistema Hamiltoniano con potencial polinomial de grado seis . . . . .	89
4.3.1. El promedio de segundo orden aplicado al sistema hamiltoniano... . . . .	90
<b>5. Ecuaciones diferenciales en time scales</b>	<b>147</b>
5.1. Introducción y resultados básicos . . . . .	147
5.1.1. Conjuntos time scales . . . . .	148
5.2. rd-Continuidad y $\Delta$ -Diferenciabilidad en time scale . . . . .	149
5.2.1. Integrabilidad en time scale . . . . .	153
5.3. Ecuaciones diferenciales y soluciones en time scale . . . . .	156
5.3.1. El logaritmo real generalizado . . . . .	157
5.3.2. La solución del sistema dinámico lineal . . . . .	158
5.3.3. Funciones exponenciales generalizadas . . . . .	159
5.3.4. Sistema Hamiltoniano lineal en time scale . . . . .	162
5.4. Teorema del promedio en time scale . . . . .	163
<b>Conclusiones</b>	<b>173</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>175</b>

# Introducción

La mecánica Hamiltoniana fue introducida por Hamilton en 1833 y es una reformulación de la mecánica clásica. Los sistemas hamiltonianos son la base de la descripción de sistemas físicos, por ejemplo el problema de los  $n$ -cuerpos, problema fundamental de la Mecánica Celeste. Una motivación inicial a este problema fue dada por Newton, al tratar sobre la estabilidad del sistema solar. Un sistema hamiltoniano con  $n$  grados de libertad es un sistema dinámico que describe el movimiento de un sistema mecánico con  $n$  grados de libertad (ver, por ejemplo, los libros de Arnold [64], Abraham-Marsden [59] y Siegel-Moser [7]).

La estabilidad de sistemas hamiltonianos es un tema muy importante en el estudio de la Mecánica Clásica, Mecánica Celeste, Física Atómica, etc. Este problema es difícil de abordar incluso para sistemas hamiltonianos de dos grados de libertad donde, a pesar de ser el caso más simple todavía quedan situaciones especiales sin resolver.

Es conocido que las soluciones periódicas son las soluciones no triviales más simples de un sistema diferencial, y que su estudio es de particular interés porque el movimiento en una vecindad puede determinar su tipo de estabilidad.

El método del promedio es una herramienta clásica que permite estudiar la dinámica de los sistemas diferenciales no lineales. Se ha utilizado para determinar la evolución de las órbitas planetarias bajo la influencia de las interacciones propias de los planetas desde la época de Lagrange y Laplace. La teoría del promedio aparece ya en 1788 con los trabajos de Lagrange en su estudio del problema gravitacional de tres cuerpos como una perturbación del problema de dos cuerpos. La primera

formalización de esta teoría fue hecha en 1928 por Fatou [56]. Importantes contribuciones prácticas y teóricas a la teoría del promedio se hicieron en los años 30 por Bogoliubov y Krylov [55], en 1945 por Bogoliubov [53], y por Bogoliubov y Mitropolsky [54]. Para una exposición más moderna de la teoría del promedio ver el libro de Sanders, Verhulst y Murdock [28].

El método del promedio como herramienta para detectar soluciones periódicas de un sistema diferencial es una de las buenas herramientas analíticas, ver por ejemplo los artículos de , R.D. Euzébio, J. Llibre, [58], J.L.G. Guirao, J. Llibre, J.A. Vera, [35], J. Giné, M. Grau , J. Llibre [26], Llibre, J., Novaes, D.D., Teixeira, M.A. [23], E. Lacombe, J. Llibre [16], D. Carrasco, C. Vidal [14], J. Llibre, A. Makhlouf [37], L. Jiménez, J. Llibre [41], M.M. Dessoky, A.A. Elmandouh, and A. Hobiny [49] entre otros.

Además, el método del promedio se usa para estudiar los ciclos límites que son obtenidos vía bifurcaciones y la integrabilidad de los sistemas diferenciales polinómiales en el plano (ver [27]). Por otro lado, en [61] se estudia un problema de una perturbación de un hamiltoniano y las herramientas que se usan allí para el estudio de soluciones periódicas se basan esencialmente en la teoría del promedio, otros ejemplos pueden ser vistos en [45,19,22].

El problema de estudiar soluciones periódicas de un sistema dinámico continuo ha sido uno de los temas centrales desde Poincaré y Lyapunov. Recientemente, algunas teorías y métodos se han desarrollado para ecuaciones diferenciales en *time scales*, ver por ejemplo, [5, 47, 66, 46]. En esta dirección el método del promedio se ha extendido para localizar soluciones periódicas de sistemas en *time scale* (ver [60]). En [8] se ha estudiado sistemas Hamiltonianos *time scale*; un problema interesante pero poco explorado es utilizar método del promedio en *time scale* para localizar soluciones periódicas de estos sistemas.

Existen otras herramientas para determinar existencia de soluciones periódicas, una de éstas herramientas se conoce como el método de normalización mediante invariantes (ver [38, 11, 29]). Aunque esta herramienta puede ser interesante, en

esta tesis sólo nos centramos en determinar soluciones periódicas vía el método del promedio.

El propósito principal de esta tesis es estudiar familias de soluciones periódicas de sistemas hamiltonianos con dos grados de libertad y determinar el tipo de estabilidad de las soluciones periódicas a través del método del promedio.

### Resultados principales:

En esta tesis se estudia la existencia y el tipo de estabilidad de soluciones periódicas de sistemas hamiltonianos con dos grados de libertad asociado a las funciones hamiltonianas definidas por:

$$H = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2) + V_5(x, y), \quad (1)$$

y

$$\tilde{H} = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2) + \varepsilon V_5(x, y) + \varepsilon^2 V_6(x, y), \quad (2)$$

donde  $x, y, p_x, p_y \in \mathbb{R}$  y  $V_5(x, y), V_6(x, y)$  son polinomios homogéneos de grados cinco y seis respectivamente dados por:

$$\begin{aligned} V_5(x, y) &= \frac{A}{5}x^5 + Bx^3y^2 + \frac{1}{5}Fxy^4, \\ V_6(x, y) &= \frac{\Lambda}{6}x^6 + \frac{1}{2}mx^2y^4 + \frac{\lambda}{6}y^6. \end{aligned}$$

El sistema diferencial hamiltoniano asociado a la función (1) es

$$\begin{aligned} \dot{x} &= p_x, \\ \dot{y} &= p_y, \\ \dot{p}_x &= -x - Ax^4 - 3Bx^2y^2 - \frac{F}{5}y^4, \\ \dot{p}_y &= -y - 2Bx^3y - \frac{4}{5}Fxy^3. \end{aligned} \quad (3)$$

El sistema diferencial hamiltoniano asociado a la función (2) es

$$\begin{aligned}\dot{x} &= p_x, \\ \dot{y} &= p_y, \\ \dot{p}_x &= -x - \varepsilon \left( Ax^4 + 3Bx^2y^2 + \frac{1}{5}Fy^4 \right) - \varepsilon^2 (mxy^4 + \Lambda x^5), \\ \dot{p}_y &= -y - \varepsilon \left( 2Bx^3y + \frac{4}{5}Fxy^3 \right) - \varepsilon^2 (2mx^2y^3 + \lambda y^5).\end{aligned}\tag{4}$$

donde el punto denota la derivada con respecto a la variable independiente  $t$  y  $A, B, F, \Lambda, m$  y  $\lambda$  son parámetros reales. Para el sistema (3) y (4) se estudia la existencia y estabilidad de familias de soluciones periódicas en los diferentes niveles de energía positivo  $H = h$ .

**Observación 0.1** En el hamiltoniano (1) el caso  $F \equiv 0$  fue estudiado por Alberto Castro Ortega en [2]. En esta tesis generalizamos el resultado de Ortega incluyendo el caso  $F \neq 0$ .

Un primer resultado sobre la existencia de soluciones periódicas para el sistema Hamiltoniano (3) es enunciado a continuación.

**Teorema 0.1 (Existencia)** *En cada nivel de energía positiva  $H = h$ , con  $\varepsilon > 0$  suficientemente pequeño,  $A, B$  y  $F$  números reales arbitrarios, el sistema promediado asociado al sistema hamiltoniano (3) tiene familias de soluciones periódicas dada por  $\varphi(t, \varepsilon) = (X(t, \varepsilon), Y(t, \varepsilon), p_X(t, \varepsilon), p_Y(t, \varepsilon))$  con*

$$\begin{aligned}X(t, \varepsilon) &= r^* \cos(t) + O(\varepsilon), \\ Y(t, \varepsilon) &= \sqrt{2h - r^{*2}} \cos(t + \alpha^*) + O(\varepsilon), \\ p_X(t, \varepsilon) &= r^* \sin(t) + O(\varepsilon), \\ p_Y(t, \varepsilon) &= \sqrt{2h - r^{*2}} \sin(t + \alpha^*) + O(\varepsilon),\end{aligned}$$

donde  $(r^*, \alpha^*)$  son ceros de la función promedio. Además las soluciones periódicas son contadas como sigue, existe

(a) al menos dos familias de soluciones periódicas si  $(A, B, F) \in \Omega_{ABF}^1$ , y

$$(r^*, \alpha^*) = \left( 0, \pm \frac{1}{2} \arccos \left( -\frac{100B + 14F}{35B + 40F} \right) \right)$$

(b) *al menos una familia de soluciones periódicas si  $(A, B, F) \in \Omega_{ABF}^2$ , y*

$$(r^*, \alpha^*) = \left( \sqrt{2h}, \frac{1}{2} \arccos \left( \frac{18A^2 - 20AB - 8B^2}{B(7A + 10B)} \right) \right)$$

(c) *al menos una familia de soluciones periódicas si  $(A, B, F) \in \Omega_{ABF}^3$ , y*

$$(r^*, \alpha^*) = \left( \sqrt{\frac{3h(5B + 2F)}{-5A + 5B + 3F}}, 0 \right)$$

(d) *al menos una familia de soluciones periódicas si  $(A, B, F) \in \Omega_{ABF}^4$ , y*

$$(r^*, \alpha^*) = \left( \sqrt{-\frac{h \left( \sqrt{4F(4F - 5A) + 225B^2 - 80BF} + 15B - 6F \right)}{5(A - 5B + F)}}, 0 \right)$$

(e) *al menos una familia de soluciones periódicas si  $(A, B, F) \in \Omega_{ABF}^5$ , y*

$$(r^*, \alpha^*) = \left( \sqrt{\frac{h \left( \sqrt{4F(4F - 5A) + 225B^2 - 80BF} - 15B + 6F \right)}{5(A - 5B + F)}}, 0 \right)$$

(f) *al menos dos familias de soluciones periódicas si  $(A, B, F) \in \Omega_{ABF}^6$ , y*

$$(r^*, \alpha^*) = \left( \sqrt{\frac{18\sqrt[3]{2}L_5^2 - 6\sqrt[3]{L_8}L_5 - 60\sqrt[3]{2}L_4L_6 + \sqrt[3]{4L_8^2}}{30L_4\sqrt[3]{L_8}}}, \pm\pi/2 \right),$$

donde los conjuntos  $\Omega_{ABF}^i$  con  $i = 1, \dots, 6$  y los valores  $L_4, L_5, L_6$  y  $L_8$  son dados en términos de los parámetros  $A, B, F$  y que por su extensión son dados en el capítulo 4 de esta tesis.

Un segundo resultado para el sistema Hamiltoniano (3) dice relación a la estabilidad de soluciones periódicas dadas por el Teorema 0.1.

**Teorema 0.2 (Estabilidad)** *Todas las familias de soluciones periódicas del Teorema 0.1 son inestables.*

Un problema a estudiar en esta tesis es considerar el estudio del sistema diferencial asociado a la función hamiltoniana (2). Note que el sistema (4) depende de seis parámetros reales  $A, B, F, \Lambda, m, \lambda$  por lo que establecer la existencia y estabilidad de soluciones periódicas se hace complejo desde un punto de vista computacional por el número de parámetros incluidos en el sistema. Por tanto nuestro estudio lo dividiremos en los siguientes tres casos:

**Caso 1:**  $F = 0, m = 0, \lambda = 0$ . La función Hamiltoniana (2) que en este caso lo denotaremos por  $H_1$ , se reduce a

$$H_1 = \frac{1}{2} (x^2 + y^2) + \frac{1}{2} (p_x^2 + p_y^2) + \varepsilon \left( \frac{A}{5} x^5 + Bx^3 y^2 \right) + \varepsilon^2 \frac{1}{6} \Lambda x^6. \quad (5)$$

El sistema hamiltoniano asociado a (5) es

$$\begin{aligned} x' &= p_x, \\ y' &= p_y, \\ p_x' &= -x - \varepsilon (Ax^4 + 3Bx^2 y^2) - \varepsilon^2 \Lambda x^5, \\ p_y' &= -y - \varepsilon (2Bx^3 y). \end{aligned} \quad (6)$$

Un tercer resultado en este trabajo dice relación a la existencia de soluciones periódicas de sistema Hamiltoniano (6).

**Teorema 0.3 (Existencia)** *En cada nivel de energía positiva  $H_1 = h$ , con  $\varepsilon > 0$  suficientemente pequeño,  $A, B$  y  $\Lambda$  números reales arbitrarios, el sistema promediado asociado al sistema hamiltoniano (6) tiene familias de soluciones periódicas dadas por  $\varphi(t, \varepsilon) = (x(t, \varepsilon), y(t, \varepsilon), p_x(t, \varepsilon), p_y(t, \varepsilon))$  donde*

$$\begin{aligned} x(t, \varepsilon) &= r^* \cos(t) + O(\varepsilon), \\ y(t, \varepsilon) &= \sqrt{2h - r^{*2}} \cos(t + \alpha^*) + O(\varepsilon), \\ p_x(t, \varepsilon) &= r^* \sin(t) + O(\varepsilon), \\ p_y(t, \varepsilon) &= \sqrt{2h - r^{*2}} \sin(t + \alpha^*) + O(\varepsilon). \end{aligned}$$

*y  $(r^*, \alpha^*)$  son ceros de la función promedio. Además las soluciones periódicas son contadas como sigue, existe*

(a) al menos una familia de soluciones periódicas si  $(A, B, \Lambda) \in \Sigma_{AB\Lambda}^1$ , y

$$(r^*, \alpha^*) = \left( \sqrt{2h}, \frac{1}{2} \arccos \left( \frac{126A^2h - 140ABh - 56B^2h - 50\Lambda}{49ABh + 70B^2h} \right) \right)$$

(b) al menos una familia de soluciones periódicas si  $(A, B, \Lambda) \in \Sigma_{AB\Lambda}^2$ , y

$$(r^*, \alpha^*) = \left( \sqrt{\frac{189Bh(7B - 3A) + 50\Lambda - \sqrt{L_1}}{126(A - 5B)(A - B)}}, 0 \right)$$

(c) al menos una familia de soluciones periódicas si  $(A, B, \Lambda) \in \Sigma_{AB\Lambda}^3$ , y

$$(r^*, \alpha^*) = \left( \sqrt{\frac{189Bh(7B - 3A) + 50\Lambda + \sqrt{L_1}}{126(A - 5B)(A - B)}}, 0 \right)$$

(d) al menos dos familias de soluciones periódicas si  $(A, B, \Lambda) \in \Sigma_{AB\Lambda}^4$ , y

$$(r^*, \alpha^*) = \left( \sqrt{\frac{3Bh(101B - 91A) + 50\Lambda - S}{126A^2 - 364AB + 230B^2}}, \pm\pi/2 \right)$$

(e) al menos dos familias de soluciones periódicas si  $(A, B, \Lambda) \in \Sigma_{AB\Lambda}^5$ , y

$$(r^*, \alpha^*) = \left( \sqrt{\frac{3Bh(101B - 91A) + 50\Lambda + S}{126A^2 - 364AB + 230B^2}}, \pm\pi/2 \right)$$

(f) al menos una familia de soluciones periódicas si  $(A, B, \Lambda) \in \Sigma_{AB\Lambda}^6$ , y

$$(r^*, \alpha^*) = \left( \sqrt{-\frac{3}{7} \left( \frac{105Bh(32A - 49B) - 750\Lambda + \sqrt{L_2}}{467A^2 - 2900AB + 1250B^2} \right)}, -\frac{1}{2} \operatorname{arcsec} \left( \frac{W}{J} \right) \right)$$

(g) al menos una familia de soluciones periódicas si  $(A, B, \Lambda) \in \Sigma_{AB\Lambda}^7$ , y

$$(r^*, \alpha^*) = \left( \sqrt{-\frac{3}{7} \left( \frac{105Bh(32A - 49B) - 750\Lambda + \sqrt{L_2}}{467A^2 - 2900AB + 1250B^2} \right)}, -\frac{1}{2} \operatorname{arcsec} \left( \frac{W_1}{J} \right) \right)$$

(h) al menos una familia de soluciones periódicas si  $(A, B, \Lambda) \in \Sigma_{AB\Lambda}^8$ , y

$$(r^*, \alpha^*) = \left( \sqrt{\frac{3}{7} \left( \frac{105Bh(32A - 49B) - 750\Lambda + \sqrt{L_2}}{467A^2 - 2900AB + 1250B^2} \right)}, -\frac{1}{2} \operatorname{arcsec} \left( \frac{W}{J} \right) \right)$$

(i) al menos una familia de soluciones periódicas sí  $(A, B, \Lambda) \in \Sigma_{AB\Lambda}^9$ , y

$$(r^*, \alpha^*) = \left( \sqrt{\frac{3}{7} \left( \frac{105Bh(32A - 49B) - 750\Lambda + \sqrt{L_2}}{467A^2 - 2900AB + 1250B^2} \right)}, -\frac{1}{2} \operatorname{arcsec} \left( \frac{W_1}{J} \right) \right),$$

donde los conjuntos  $\Sigma_{AB\Lambda}^i$  con  $i = 1, \dots, 9$  y los valores  $L_1, L_2, S, W, W_1, J$  son expresiones en términos de los parámetros  $A, B, \Lambda$  y que por su extensión son dados en el capítulo 4 de esta tesis.

Un cuarto resultado en este trabajo dice relación a la estabilidad de las soluciones periódicas obtenidas en el Teorema 0.3.

**Teorema 0.4 (Estabilidad)** *Todas las familias de soluciones periódicas del Teorema 0.3 son inestables.*

**Caso 2:**  $F = 0, \Lambda = 0, m = 0$ . La función Hamiltoniana (2) que en este caso lo denotaremos por  $H_2$ , se reduce a

$$H_2 = \frac{1}{2} (x^2 + y^2) + \frac{1}{2} (p_x^2 + p_y^2) + \varepsilon \left( \frac{A}{5} x^5 + Bx^3 y^2 \right) + \varepsilon^2 \frac{1}{6} \lambda y^6, \quad (7)$$

El sistema hamiltoniano asociada a (7) es

$$\begin{aligned} x' &= p_x, \\ y' &= p_y, \\ p'_x &= -x - \varepsilon (Ax^4 + 3Bx^2 y^2), \\ p'_y &= -y - \varepsilon (2Bx^3 y) - \varepsilon^2 \lambda y^5. \end{aligned} \quad (8)$$

Un quinto resultado en este trabajo dice relación a la existencia de soluciones periódicas del sistema Hamiltoniano (2).

**Teorema 0.5 (Existencia)** *En cada nivel de energía positiva  $H_2 = h$ , con  $\varepsilon > 0$  suficientemente pequeño,  $A, B$  y  $\lambda$  números reales arbitrarios, el sistema promediado asociado al sistema hamiltoniano (7) tiene familias de soluciones periódicas dadas*

por  $\varphi(t, \varepsilon) = (x(t, \varepsilon), y(t, \varepsilon), p_y(t, \varepsilon), p_y(t, \varepsilon))$  donde

$$\begin{aligned} y(t, \varepsilon) &= r^* \cos(t) + O(\varepsilon), \\ y(t, \varepsilon) &= \sqrt{2h - r^{*2}} \cos(t + \alpha^*) + O(\varepsilon), \\ p_y(t, \varepsilon) &= r^* \sin(t) + O(\varepsilon), \\ p_y(t, \varepsilon) &= \sqrt{2h - r^{*2}} \sin(t + \alpha^*) + O(\varepsilon). \end{aligned}$$

y  $(r^*, \alpha^*)$  son ceros de la función promedio. Además las soluciones periódicas son contadas como sigue, existe

(a) al menos una familia de soluciones periódicas si  $(A, B, \lambda) \in \Delta_{AB\lambda}^1$ , y

$$(r^*, \alpha^*) = \left( \sqrt{2h}, \frac{1}{2} \arccos \left( \frac{18A^2 - 20AB - 8B^2}{B(7A + 10B)} \right) \right)$$

(b) al menos una familia de soluciones periódicas si  $(A, B, \lambda) \in \Delta_{AB\lambda}^2$ , y

$$\begin{aligned} r^* &= \sqrt{\frac{\sqrt[3]{8P_3 + \sqrt{P_2}}(-378Bh(3A - 7B) - 100\lambda + \sqrt[3]{4}\sqrt[3]{8P_3 + \sqrt{P_2}}) - 2\sqrt[3]{2}P_1}{378\sqrt[3]{8P_3 + \sqrt{P_2}}(A - 5B)(A - B)}}, \\ \alpha^* &= 0 \end{aligned}$$

(c) al menos dos familias de soluciones periódicas si  $(A, B, \lambda) \in \Delta_{AB\lambda}^3$ , y

$$(r^*, \alpha^*) = \left( \sqrt{-\frac{100\lambda\sqrt[3]{8P_7 + \sqrt{P_5}} - P_6}{\sqrt[3]{8P_7 + \sqrt{P_5}}(378A^2 - 1092AB + 690B^2)}}, \pm\pi/2 \right)$$

(d) al menos dos familias de soluciones periódicas si  $(A, B, \lambda) \in \Delta_{AB\lambda}^4$ , y

$$(r^*, \alpha^*) = \left( \sqrt{P_9}, \pm \frac{1}{2} \arccos \left( -\frac{49AP_9 + 240Bh - 50BP_9}{180Bh - 90BP_9} \right) \right),$$

donde los conjuntos  $\Delta_{AB\lambda}^i$  con  $i = 1, \dots, 4$  y los valores  $P_1, P_2, P_3, P_5, P_6, P_7$  y  $P_9$  son expresiones en términos de los parámetros  $A, B, \lambda$  y que por su extensión son dados en el capítulo 4 de esta tesis.

Un sexto resultado en este trabajo dice relación a la estabilidad de las soluciones periódicas obtenidas en el Teorema 0.5.

**Teorema 0.6 (Estabilidad)** *Todas las familias de soluciones periódicas del Teorema 0.5 son inestables.*

**Caso 3:**  $F = 0$ ,  $m = 0$ . La función Hamiltoniana (2) que denotaremos por  $H_3$ , se reduce a

$$H_3 = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2) + \varepsilon \left( \frac{A}{5}x^5 + Bx^3y^2 \right) + \varepsilon^2 \left( \frac{1}{6}\Lambda x^6 + \frac{1}{6}\lambda y^6 \right). \quad (9)$$

El sistema hamiltoniano asociada a (9) es

$$\begin{aligned} x' &= p_x, \\ y' &= p_y, \\ p_x' &= -x - \varepsilon(Ax^4 + 3Bx^2y^2) - \varepsilon^2\Lambda x^5, \\ p_y' &= -y - \varepsilon(2Bx^3y) - \varepsilon^2\lambda y^5. \end{aligned} \quad (10)$$

Un séptimo resultado en este trabajo dice relación a la existencia de soluciones periódicas del sistema Hamiltoniano (2).

**Teorema 0.7 (Existencia)** *En cada nivel de energía positiva  $H_3 = h$ , con  $\varepsilon > 0$  suficientemente pequeño,  $A, B, \Lambda$  y  $\lambda$  números reales arbitrarios, el sistema promedio asociado al sistema hamiltoniano (10) tiene familias de soluciones periódicas dada por  $\varphi(t, \varepsilon) = (x(t, \varepsilon), y(t, \varepsilon), p_x(t, \varepsilon), p_y(t, \varepsilon))$ , donde*

$$\begin{aligned} x(t, \varepsilon) &= r^* \cos(t) + O(\varepsilon), \\ y(t, \varepsilon) &= \sqrt{2h - r^{*2}} \cos(t + \alpha^*) + O(\varepsilon), \\ p_x(t, \varepsilon) &= r^* \sin(t) + O(\varepsilon), \\ p_y(t, \varepsilon) &= \sqrt{2h - r^{*2}} \sin(t + \alpha^*) + O(\varepsilon), \end{aligned}$$

y  $(r^*, \alpha^*)$  son ceros de la función promedio. Además las soluciones periódicas son contadas como sigue, existe

(a) al menos una familia de soluciones periódicas si  $(A, B, \Lambda, \lambda) \in \mathcal{U}_{AB\Lambda\lambda}^1$ , y

$$(r^*, \alpha^*) = \left( \sqrt{2h}, \frac{1}{2} \arccos \left( \frac{126A^2h - 140ABh - 56B^2h - 50\Lambda}{7(A + 10B)Bh} \right) \right)$$

(b) al menos una familia de soluciones periódicas si  $(A, B, \Lambda, \lambda) \in \mathcal{U}_{AB\Lambda\lambda}^2$ , y

$$r^* = \sqrt{-\frac{\sqrt[3]{N_1}(378Bh(3A - 7B) + 100(\lambda - \Lambda)) - 2\sqrt[3]{2}N_2 - \sqrt[3]{4(N_1)^2}}{378\sqrt[3]{N_1}(A - 5B)(A - B)}},$$

$$\alpha^* = 0$$

(c) al menos dos familias de soluciones periódicas si  $(A, B, \Lambda, \lambda) \in \mathcal{U}_{AB\Lambda\lambda}^3$ , y

$$r^* = \sqrt{-\frac{\sqrt[3]{N_4}(546ABh - 606B^2h + 100\lambda - 100\Lambda) - 2\sqrt[3]{2}N_5 - \sqrt[3]{4(N_4)^2}}{\sqrt[3]{N_4}(378A^2 - 1092AB + 690B^2)}},$$

$$\alpha^* = \pm \frac{\pi}{2}$$

(d) al menos una familia de soluciones periódicas si  $(A, B, \Lambda, \lambda) \in \mathcal{U}_{AB\Lambda\lambda}^4$ , y

$$r^* = \sqrt{-\frac{180\sqrt[3]{N_7}(7Bh(32A - 49B) + 50(\lambda - \Lambda)) - 1080\sqrt[3]{2}N_9 - \sqrt[3]{4(N_7)^2}}{42\sqrt[3]{N_7}(467A^2 - 2900AB + 1250B^2)}},$$

$$\alpha^* = -\frac{1}{2} \arccos \left( \frac{90B \left( -12\sqrt[3]{N_7}N_{13} + 1080\sqrt[3]{2}N_8 + \sqrt[3]{4(N_7)^2} \right)}{1080\sqrt[3]{2}N_8(49A - 50B) + \sqrt[3]{4(N_7)^2}(49A - 50B) + 180\sqrt[3]{N_7}N_9} \right),$$

donde los conjuntos  $\in \mathcal{U}_{AB\Lambda\lambda}^i$  con  $i = 1, \dots, 4$  y los valores  $N_1, N_2, N_4, N_5, N_7, N_8, N_9$  y  $N_{13}$  son expresiones en términos de los parámetros  $A, B, \Lambda, \lambda$  y que por su extensión son dados en el capítulo 4 de esta tesis.

Finalmente el último resultado en este trabajo dice relación a la estabilidad de las soluciones periódicas obtenidas en el Teorema 0.7.

**Teorema 0.8** *Las dos familias de soluciones periódicas del Teorema 0.7 parte (a) son inestables.*

La estabilidad o Inestabilidad del resto de las soluciones periódicas del Teorema 0.7 no fue posible determinarlas por la complejidad de los cálculos computacionales.

La estructura de éste trabajo es la siguiente:

- En el Capítulo 1 presentamos los preliminares y las nociones fundamentales, se describe la formulación Hamiltoniana y se presenta el sistema hamiltoniano en dimensión 4 que vamos a estudiar.

- En el Capítulo 2 presentamos la teoría del promedio de primer y segundo orden para estudiar soluciones periódicas de un sistema diferencial.
- En el Capítulo 3, consideramos un sistema Hamiltoniano con dos grados de libertad y con función potencial polinomial de grado 5. Para este sistema Hamiltoniano determinamos su forma estándar que permite aplicar la teoría del promedio, indicando en términos de los grados la aplicación de la teoría del promedio de primer orden o de segundo orden.
- En el Capítulo 4, presentamos los resultados principales de esta tesis sobre la existencia y estabilidad de soluciones periódicas del sistema Hamiltoniano polinomial de grado seis usando el método del promedio de segundo orden. Primero proporcionamos las condiciones suficientes en los parámetros para garantizar la existencia de soluciones periódicas para el nivel de energía positiva. Segundo, estudiamos la estabilidad de estas soluciones periódicas.
- Además, en el Capítulo 5, se da una introducción sobre la existencia de soluciones periódicas de sistemas dinámicos en conjuntos de tipo *time scale*, utilizando una generalización del método clásico del promedio.

# Capítulo 1

## Preliminares y Nociones Fundamentales

### 1.1. Motivaciones Físicas y Matemáticas

A lo largo de los últimos años, se usan diferentes métodos para describir la dinámica local de los sistemas hamiltonianos alrededor de sus puntos de equilibrios y soluciones periódicas. La estabilidad alrededor de estos objetos determina el tipo de movimiento en una vecindad de las soluciones. Por esta razón, este trabajo se centra en encontrar familias de soluciones periódicas y estudiar el tipo de estabilidad de dichas soluciones encontradas en sistemas hamiltonianos provenientes de la dinámica galáctica.

### 1.2. Definición del Problema

La mecánica hamiltoniana es una reformulación de la mecánica newtoniana. En esta sección se deducen las ecuaciones de Hamilton a partir de las ecuaciones de Lagrange para un sistema diferencial.

En 1833, el físico y matemático William R. Hamilton, en su ensayo “*On a General Method in Dynamics*” funda la mecánica hamiltoniana basándose en los trabajos anteriores del físico y matemático Joseph-Louis Lagrange Figura (1.1).



Figura 1.1: Retrato de William R. Hamilton y Joseph-Louis Lagrange

Para transformar las ecuaciones diferenciales de Lagrange de un sistema material con  $n$  grados de libertad en un sistema canónico de  $2n$  ecuaciones diferenciales de primer orden existen varias posibilidades. En este trabajo se sigue el procedimiento expuesto en [31] que emplea la transformada de Legendre de la función Lagrangiana.

### 1.2.1. Formulación Lagrangiana y Hamiltoniana

Supongamos que la posición de un sistema mecánico con  $n$  grados de libertad es descrito por  $q = (q_1, \dots, q_n)$  llamada coordenadas generalizadas. Consideremos la función Lagrangiana

$$L(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n, t)$$

donde  $(\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n)$  son las velocidades generalizadas correspondientes. El movimiento del sistema puede ser descrito por:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \quad i = 1, \dots, n. \quad (1.1)$$

Las ecuaciones (1.1) son llamadas las *Ecuaciones de Lagrange* que constituyen un sistema de  $n$ -ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden que determina unívocamente los  $q_i(t)$  siempre que se dieran las  $2n$  condiciones iniciales  $q_1(t_0), \dots, q_i(t_0)$  y  $\dot{q}_1(t_0), \dots, \dot{q}_i(t_0)$  en un instante inicial  $t_0$ . Naturalmente, las ecuaciones de Lagrange pueden ser trivialmente sustituidas por un sistema equivalente de primer orden, simplemente introduciendo las variables  $s_i = \dot{q}_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  y considerando

$q_1, \dots, q_n, s_1, \dots, s_n$  como  $2n$ -variables independientes. Las ecuaciones de movimiento en este caso son:

$$s_i = \dot{q}_i, \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial s_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad (1.2)$$

donde  $L(q, s, t)$  es la función Lagrangiana del sistema (1.2). La formulación Lagrangiana es necesaria para explicar el sistema Hamiltoniano asociado con mayor simpleza.

La formulación Hamiltoniana es la formulación más poderosa de la mecánica que permite investigar los aspectos más fundamentales de la estructura de la mecánica clásica.

### Momentos Canónicos y Ecuaciones de Hamilton:

William Rowan Hamilton mostró, en 1835, que la duplicación simétrica del número de variables independientes es conseguida gracias a la descripción dinámica de  $2n$  cantidades  $q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n$  donde  $p_i$  es el momento canónico conjugado a  $q_i$ , definido por

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}(q, \dot{q}), \quad i = 1, \dots, n. \quad (1.3)$$

Suponemos que la matriz Hessiana  $W = (w_{i,j})$  donde

$$w_{i,j} = \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j}$$

es no singular, esto es,  $\det W \neq 0$  (garantiza que (1.3) tiene solución). Entonces por el Teorema de la función Implícita, el sistema (1.3) puede ser resuelto para las velocidades generalizadas

$$\dot{q}_i = f_i(q, p, t), \quad i = 1, \dots, n.$$

La descripción de la hamiltoniana implica la sustitución de las variables  $(q, \dot{q})$  por  $(q, p)$  introduciendo una función  $H(q, p, t)$  en lugar de la Lagrangiana  $L(q, \dot{q}, t)$  para generar la dinámica. Tal cambio de descripción se realiza mediante una transformación de Legendre, que en el presente contexto consiste en la sustitución de las

velocidades generalizadas por los momentos canónicos como variables básicas. La función de Hamilton o, simplemente Hamiltoniana  $H(q, p, t)$  es definida por

$$H(q, p, t) = \sum_{i=1}^n \dot{q}_i p_i - L(q, \dot{q}_i, t), \quad i = 1, \dots, n. \quad (1.4)$$

Calculando la diferencial  $dH$  de (1.4) tenemos

$$dH = \sum_{i=1}^n \left( d\dot{q}_i p_i + \dot{q}_i dp_i \right) - \left\{ \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i \right) + \frac{\partial L}{\partial t} dt \right\}. \quad (1.5)$$

En virtud de la definición de los momentos canónicos dados en (1.3) y de las ecuaciones de Lagrange, se tiene

$$\underbrace{\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right)}_{p_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \Rightarrow \dot{p}_i = \frac{\partial L}{\partial q_i}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Luego la ecuación (1.5) se reduce a

$$dH = \sum_{i=1}^n (\dot{q}_i dp_i - \dot{p}_i dq_i) + \frac{\partial L}{\partial t} dt.$$

Por otro lado

$$dH = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial H}{\partial \dot{q}_i} dq_i + \frac{\partial H}{\partial \dot{p}_i} dp_i \right) + \frac{\partial H}{\partial t} dt.$$

Comparando estas dos últimas ecuaciones se obtienen

$$\begin{aligned} \dot{q}_i &= \frac{\partial H}{\partial p_i}, \\ \dot{p}_i &= -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad i = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Las ecuaciones (1.6) son conocidas como *ecuaciones de Hamilton* o *ecuaciones canónicas de Hamilton*, y forman un sistema de  $2n$  ecuaciones diferenciales de primer orden equivalentes a las ecuaciones de Lagrange. Además tenemos la relación de dependencia temporal, es decir

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}.$$

En la formulación Hamiltoniana en lugar del espacio de configuraciones introducimos el espacio de fase. Las cantidades  $(q, p)$  llamadas variables canónicas en el espacio

cartesiano de dimensión  $2n$  cuyos puntos son representados por las  $2n$ -uplas  $(q, p) = (q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)$  es llamado espacio de fase. Un punto en el espacio de fase determina completamente el estado de un sistema mecánico, esto es la posición y velocidad de las partículas. Geométricamente un movimiento del sistema mecánico también puede ser representado como una curva en el espacio de fase (ver Figura 1.2).

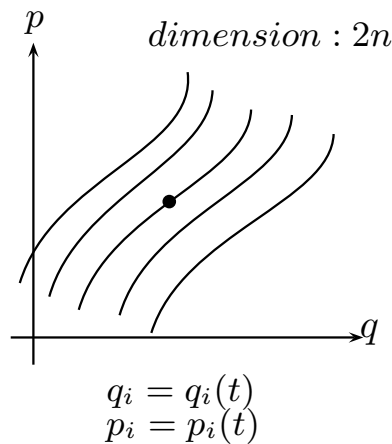


Figura 1.2: Espacio de Fase

Supongamos que la función Lagrangiana es

$$L(q, \dot{q}) = T(q, \dot{q}) - V(q) \quad (1.7)$$

donde  $T(q, \dot{q})$  es la energía cinética que es función cuadrática de las variables generalizadas y  $V(q)$  la energía potencial que no depende de las velocidades. Derivando (1.7) se tiene

$$\underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}}_{p_i}(q, \dot{q}) = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}(q, \dot{q}) - \cancel{\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_i}(q)},$$

es decir

$$p_i = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}(q, \dot{q}).$$

De (1.4)

$$H(q, p, t) = \sum_{i=1}^n \dot{q}_i \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}(q, \dot{q}) - (T(q, \dot{q}) - V(q)). \quad (1.8)$$

Por el Teorema de Euler para funciones homogéneas (ver[52]) tenemos

$$\sum_{i=1}^n \dot{q}_i \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}(q, \dot{q}) = 2T(q, \dot{q}). \quad (1.9)$$

Por tanto

$$H(q, p, t) = T(q, \dot{q}) + V(q),$$

donde  $H$  representa la energía total del sistema.

### 1.2.2. Significado de la función Hamiltoniana

Para entender el significado físico de la función Hamiltoniana se calcula la derivada total de  $H$  respecto a  $t$ :

$$\frac{dH}{dt} = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial H}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial H}{\partial p_i} \dot{p}_i \right) + \frac{\partial H}{\partial t}.$$

Sustituyendo las derivadas de las coordenadas y los momentos generalizados por las ecuaciones de Hamilton se obtiene:

$$\frac{dH}{dt} = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) + \frac{\partial H}{\partial t}.$$

Por tanto, la derivada total respecto al tiempo de la hamiltoniana es igual a la derivada parcial de la hamiltoniana respecto al tiempo:

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t}.$$

Si el Hamiltoniano, o la Lagrangiana, no dependen del tiempo, entonces resulta que  $H(q, p)$ , es una constante del movimiento, en este caso la función Hamiltoniana  $H(q, p)$  es llamada una *integral primera*.

### 1.2.3. Sistema Hamiltoniano con $n$ grados de libertad

El formalismo hamiltoniano es la estructura matemática natural en la que se desarrolla la teoría de los sistemas mecánicos conservativos. Un *sistema hamiltoniano*

es un sistema de  $2n$  ecuaciones diferenciales ordinarias de la forma

$$\begin{aligned}\dot{q}_i &= \frac{\partial H}{\partial p_i}(q, p, t), \\ \dot{p}_i &= -\frac{\partial H}{\partial q_i}(q, p, t), \quad i = 1, \dots, n,\end{aligned}\tag{1.10}$$

donde  $H = H(q, p, t)$ , llamado hamiltoniano, es una función suave de valor real definida en un conjunto abierto  $U$  de  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ . Los vectores  $q = (q_1, \dots, q_n)$  y  $p = (p_1, \dots, p_n)$  son llamados *posición* y *momento*, respectivamente, y  $t$  es el tiempo. Las variables  $q$  y  $p$  se dice que son *variables conjugadas*:  $p$  es conjugado con  $q$ . El entero  $n$  es el número de *grados de libertad* del sistema.

**Observación 1.1** En el caso  $n = 2$ , se tiene un sistema Hamiltoniano con dos grados de libertad:

$$\begin{aligned}\dot{q}_1 &= \frac{\partial H}{\partial p_1}, & \dot{p}_1 &= -\frac{\partial H}{\partial q_1}, \\ \dot{q}_2 &= \frac{\partial H}{\partial p_2}, & \dot{p}_2 &= -\frac{\partial H}{\partial q_2},\end{aligned}\tag{1.11}$$

donde  $H : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$  es la función Hamiltoniana de (1.11),  $q_1, q_2$  son las coordenadas generalizadas y  $p_1, p_2$  son los momentos conjugados (ver [21]).

Un sistema hamiltoniano con dos grados de libertad puede exhibir una dinámica compleja y rica, siendo así adecuado para modelar una gran variedad de fenómenos físicos tales como comportamientos periódicos, cuasiperiódicos y caótico (ver [10]). El bien conocido Hamiltoniano Hénon-Heiles, constituye un modelo para el movimiento galáctico, (ver [50]). El problema planar de tres cuerpos [34], el problema de Stormer [42], algunos sistemas de plasma estacionarios [65], entre muchos otros, son descritos por sistemas Hamiltonianos con dos grados de libertad. De manera general, consideremos el vector  $z$ , la matriz  $J$  simétrica de  $2n \times 2n$ , y el gradiente  $\nabla H$  dados por

$$z = \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}, \quad \nabla H = \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial z_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial H}{\partial z_{2n}} \end{pmatrix},$$

donde  $0$  es la matriz nula de  $n \times n$  e  $I$  es la matriz identidad de  $n \times n$ . El sistema (1.10) se convierte en

$$\dot{z} = J\nabla H(t, z). \quad (1.12)$$

Por el Teorema de existencia y unicidad de ecuaciones diferenciales: para cada  $(t_0, z_0) \in U$ , existe una única solución  $z = \varphi(t, t_0, z_0)$  de (1.12) definida para  $t$  cerca de  $t_0$  que satisface la condición inicial  $\varphi(t_0, t_0, z_0) = z_0$ . La función  $\varphi$  es una aplicación definida desde una vecindad abierta  $V$  de  $(t_0, t_0, z_0) \in \mathbb{R}^{2n+2}$  en  $\mathbb{R}^{2n}$ . La función  $\varphi(t_0, t_0, z_0)$  es suave en todos sus argumentos, y entonces  $\varphi$  es  $C^\infty$  si las ecuaciones son  $C^\infty$ , y es analítica si las ecuaciones son analíticas. La solución  $\varphi(t, t_0, z_0)$  es llamado la solución general.

En el caso especial cuando  $H$  es independiente de  $t$ , de modo que  $H : U \rightarrow \mathbb{R}$  donde  $U$  es un conjunto abierto en  $\mathbb{R}^{2n}$ , las ecuaciones diferenciales (1.12) son autónomas, y el sistema hamiltoniano se llama conservativo. Por lo general, la dependencia  $t_0$  se cae y solo se considera  $\varphi(t, z_0)$ , donde  $\varphi(t, z_0)$  es la solución de (1.12) que satisface  $\varphi(0, z_0) = z_0$ . La solución  $\varphi(t, z_0)$  es *T-periódica* con  $T > 0$  si y sólo si  $\varphi(T, z_0) = z_0$  y  $\varphi(t, z_0) \neq z_0$  para  $t \in (0, T)$ . Las soluciones se representan como curvas parametrizadas en  $U \subseteq \mathbb{R}^{2n}$ , y el conjunto  $U$  es llamado *espacio de fase*. Por el Teorema de existencia y unicidad, hay una curva única que pasa por cada punto en  $U$  y por la unicidad, dos de estas curvas solución no se pueden cruzar en  $U$ .

Las superficies de nivel  $J^{-1}(c) \subseteq \mathbb{R}^{2n}$ , donde  $c$  es una constante, son conjuntos invariantes, es decir, son conjuntos tales que si una solución comienza en el conjunto, permanece en el conjunto. En general, los conjuntos de nivel son variedades de dimensión  $2n - 1$ , y así con una integral  $F$ , las soluciones se encuentran en el conjunto  $F^{-1}(c)$ , que es de dimensión  $2n - 1$ .

**Definición 1.1** Se dice que un sistema hamiltoniano es *integrable* si tiene  $n$  integrales primeras (independientes), donde  $n$  es el número de grados de libertad.

A continuación enunciamos algunos teoremas que serán útiles en los próximos capítulos.

Consideremos la ecuación

$$x' = A(t)x, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (1.13)$$

con  $A(t)$  una matriz  $n \times n$  real, continua  $T$ -periódica  $A(t+T) = A(t)$ . Una ecuación como (1.13) puede obtener soluciones tanto periódicas como no periódicas.

El Teorema de Floquet que enunciaremos a continuación es un resultado importante que se utiliza para probar la estabilidad de soluciones periódicas vía el teorema del promedio.

**Teorema 1.1 (Floquet)** Consideremos la ecuación (1.13)  $x' = A(t)x$  con  $A(t)$  una matriz  $n \times n$  real, continua  $T$ -periódica. Cada matriz fundamental  $\Phi(t)$  de la ecuación (1.13) puede escribirse como el producto de dos matrices  $n \times n$

$$X(t) = P(t)e^{Bt}$$

con  $P(t)$ ,  $T$ -periódica y  $B$  una matriz constante  $n \times n$ .

**Demostración.** La demostración de este teorema se puede ver en [17]. □

### 1.2.4. Transformaciones Simpléticas

Un aspecto importante en el mundo simpléctico es el estudio de las transformaciones simpléctica, es decir, las aplicaciones entre variedades simplécticas que conservan áreas orientadas.

Sea

$$\begin{aligned} \Xi : U &\rightarrow \mathbb{R}^{2n} \\ (t, z) &\rightarrow \zeta = \Xi(t, z) \end{aligned}$$

una función suave donde  $U$  es un conjunto abierto en  $\mathbb{R}^{2n+1}$ ,  $\Xi$  es llamado una función simpléctica (o transformación) si el jacobiano de  $\Xi$  con respecto a  $z$ ,  $D_z \Xi(t, z) = \frac{\partial \Xi}{\partial z}$ , es una matriz simpléctica para todo  $(t, z) \in U$ . A veces se usa la notación  $D_z \Xi$  para el jacobiano de  $\Xi$ , y a veces la notación  $\frac{\partial \Xi}{\partial z}$ .

Así  $\Xi$  es simpléctico si y sólo si

$$\frac{\partial \Xi}{\partial z} J \frac{\partial \Xi^T}{\partial z} = J. \tag{1.14}$$

Recuerde que si una matriz es simpléctica, entonces también lo es su transpuesta, por lo tanto, podríamos transponer fácilmente el primer factor en (1.14). Debido a

que el producto de dos matrices simplécticas es simpléctico, la composición de dos funciones simplécticas es simpléctica por la regla de la cadena de diferenciación. Debido a que una matriz simpléctica es invertible y su inversa es simpléctica, el teorema de la función inversa implica que una función simpléctica es invertible localmente y su inversa,  $Z(t, \zeta)$ , es simpléctica donde se define. Debido a que el determinante de una matriz simpléctica es  $+1$ , la transformación es la orientación y la conservación del volumen. Si la transformación  $z \rightarrow \zeta = \Xi(t, z)$  se considera un cambio de variable, entonces se llama coordenadas simplécticas o canónicas.

Si en lugar de satisfacer (1.14), la transformación  $\zeta = \Xi(t, z)$  satisface

$$J = \mu \frac{\partial \Xi}{\partial z} J \frac{\partial \Xi^T}{\partial z}, \quad (1.15)$$

donde  $\mu$  es un número constante no cero, entonces  $\zeta = \Xi(t, z)$  es llamado una transformación lineal con multiplicidad  $\mu$  (ver [38]).

### Teoría del grado de Brouwer en $\mathbb{R}^n$

El siguiente lema debido a [1] desempeña un papel crucial en la prueba del Teorema del promedio en su forma clásica así como en *time scale*. El caso del teorema del promedio para *time scale* se verá en el capítulo 5 de esta tesis.

**Lema 1** Para un subconjunto abierto acotado  $V \subset \mathbb{R}^n$ , asumimos que  $F_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , para  $i = 0, \dots, k$ , y  $R : \bar{V} \times [-\varepsilon_0, \varepsilon_0] \rightarrow \mathbb{R}^n$  son continuas, y dados por

$$\begin{aligned} F(\cdot, \varepsilon) &= F_0(\cdot) + \varepsilon F_1(\cdot) + \varepsilon^2 F_1(\cdot) + \dots + \varepsilon^k F_k(\cdot), \\ G(\cdot, \varepsilon) &= F_0(\cdot, \varepsilon) + \varepsilon^{k+1} R(\cdot, \varepsilon). \end{aligned}$$

Supongamos que  $F(z, \varepsilon) \neq 0$  para todo  $z \in \partial V$ ,  $\varepsilon \in [-\varepsilon_0, \varepsilon] - 0$ . Entonces, para  $|\varepsilon| > 0$  suficientemente pequeño, el grado de Brouwer  $\deg(F(\cdot, \varepsilon), V, 0)$  está bien definido y

$$\deg(F(\cdot, \varepsilon), V, 0) = \deg(G(\cdot, \varepsilon), V, 0).$$

**Demostración.** La demostración de este lema se puede ver en [1]. □

# Capítulo 2

## El Método del Promedio

### 2.1. Descripción del Método del Promedio

En este capítulo presentaremos los Teoremas clásicos de la teoría del promedio hasta orden 2 en dimensión  $n$  con el propósito de estudiar soluciones periódicas de un sistema diferencial. Para una introducción general a la teoría del promedio, ver por ejemplo [17, 33, 30, 32].

#### 2.1.1. Existencia y Estabilidad de soluciones periódicas

Consideremos el siguiente sistema diferencial

$$x' = F(t, x, \varepsilon), \tag{2.1}$$

con  $x \in D$ , donde  $D$  es un subconjunto abierto y acotado de  $\mathbb{R}^n$ ,  $t \geq 0$  y  $F : \mathbb{R} \times D \times (-\varepsilon_0, \varepsilon_0) \rightarrow \mathbb{R}^n$  es una función continua,  $T$ -periódica en la primera variable  $t$ , localmente lipschitz en la segunda variable. Para cada  $z \in D$ , denotemos por  $x(\cdot, z, \varepsilon) : [0, t_z) \rightarrow \mathbb{R}^n$  una solución de (2.1) con la condición inicial  $x(0, z, \varepsilon) = z$ . El valor  $T$  es llamado el *período* y podemos suponer que  $T < t_z$ , para todo  $z \in D$ . Recordemos que una solución periódica satisface  $x(t+T, z, \varepsilon) = x(t, z, \varepsilon)$  para todo  $t$ , y consideremos la función  $f : D \times (-\varepsilon_0, \varepsilon_0) \rightarrow \mathbb{R}^n$  definida por

$$f(z, \varepsilon) = \int_0^T F(s, x(s, z, \varepsilon), \varepsilon) ds. \tag{2.2}$$

A partir de (2.1) y (2.2) podemos redefinir  $f$  de la siguiente forma

$$\int_0^T x'(s, z, \varepsilon) ds = \int_0^T F(s, x(s, z, \varepsilon), \varepsilon) ds.$$

Por tanto

$$f(z, \varepsilon) = x(T, z, \varepsilon) - x(0, z, \varepsilon). \quad (2.3)$$

Por continuidad de soluciones, el problema de encontrar soluciones  $T$ -periódicas del sistema (2.1), se reduce a encontrar ceros de la función  $f$  definida en (2.3), así cada  $(z_\varepsilon, \varepsilon)$  tal que  $f(z_\varepsilon, \varepsilon) = 0$  nos permite determinar la existencia de una solución  $T$ -periódica  $x(\cdot, z_\varepsilon, \varepsilon)$  del sistema (2.1).

La prueba de los resultados que presentamos a continuación han sido obtenidos en [32, sección 2.2].

### 2.1.2. Teorema de existencia de soluciones vía promedio de primer orden

Consideremos el siguiente sistema diferencial de orden arbitrario  $k$  en dimensión  $n$  dado por:

$$\begin{aligned} x' &= \sum_{i=0}^k \varepsilon^i F_i(t, x) + \varepsilon^{k+1} R(t, x, \varepsilon), \\ x(0) &= x_0, \end{aligned} \quad (2.4)$$

con  $x \in D$ , donde  $D$  es un subconjunto abierto de  $\mathbb{R}^n$ ,  $t \geq 0$  y donde  $F_i : \mathbb{R} \times D \rightarrow \mathbb{R}^n$  y  $R : \mathbb{R} \times D \times (-\varepsilon_0, \varepsilon_0) \rightarrow \mathbb{R}^n$ , son funciones Localmente Lipschitz y  $T$ -periódicas en la primera variable  $t$ .

Para  $k = 1$  tenemos el siguiente sistema diferencial de primer orden

$$\begin{aligned} x' &= \varepsilon F_1(t, x) + \varepsilon^2 R(t, x, \varepsilon), \\ x(0) &= x_0. \end{aligned} \quad (2.5)$$

El sistema diferencial promedio asociado al sistema (2.5) es definido en  $D$  por:

$$\begin{aligned} z' &= \varepsilon f_1(z), \\ z(0) &= x_0, \end{aligned} \quad (2.6)$$

donde

$$f_1(z) = \frac{1}{T} \int_0^T F_1(s, z) ds. \quad (2.7)$$

Podemos observar que las soluciones de equilibrio del sistema (2.6) son ceros de la función  $f_1$ .

**Teorema 2.1 (Existencia)** Consideremos los problemas de valores iniciales (2.5) y (2.6). Supongamos que:

- a) Las funciones  $F_1, R, D_x F_1, D_x R, D_x^2 F_1, D_\varepsilon R$  son definidas, continuas y acotadas por una constante  $M$  (independiente de  $\varepsilon$ ) en  $[0, \infty) \times D$  y  $-\varepsilon_0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$ .
- b) Las funciones  $F_1$  y  $R$  son  $T$ -periódicas en  $t$  ( $T$  independiente de  $\varepsilon$ ).

Entonces, si  $p$  es una solución de equilibrio del sistema promediado (2.6), que satisface

$$\det(D_x f_1(z)) \Big|_{z=p} \neq 0,$$

con  $D_x f_1(\cdot)$  la matriz Jacobiana de  $f_1$ , entonces para  $|\varepsilon| > 0$  suficientemente pequeño, existe una solución  $T$ -periódica,  $\varphi(\cdot, \varepsilon) = x(\cdot, z, \varepsilon)$  del sistema (2.5) tal que  $\varphi(0, \varepsilon) \rightarrow p$  cuando  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

**Demostración.** Sea  $V$  una vecindad de  $p$  tal que  $f_1(z) \neq 0$  para  $z \in V - \{p\}$ , es decir,  $p$  es un cero aislado de la función promedio (2.7). Para todo  $z \in \bar{V}$ , existe  $\varepsilon_0 > 0$  tal que si  $\varepsilon \in [-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$  cada solución  $x(\cdot, z, \varepsilon)$  de (2.5) está bien definido en  $[0, T]$ . Además, considerando  $h_z < t_z$  con  $h_z = \inf\{T, \frac{b}{M(\varepsilon)}\}$  donde  $M(\varepsilon) = \sup\{|\varepsilon F_1(t, x) + \varepsilon^2 R(t, x, \varepsilon)|\}$  se tiene

$$|\varepsilon F_1(t, x) + \varepsilon^2 R(t, x, \varepsilon)| \leq M(\varepsilon),$$

para todo  $t \in [0, T]$ , para cada  $x$  tal que  $|x - z| \leq b$  y para todo  $z \in \bar{V}$ . Entonces para  $|\varepsilon|$  suficientemente pequeño  $M(\varepsilon)$  puede ser arbitrariamente grande, tal que  $h_z = T$  para todo  $z \in \bar{V}$ . Así aseguramos la existencia y unicidad de las soluciones de (2.5). Además, dado que  $\varepsilon > 0$  es suficientemente pequeño, existe un compacto  $K \subset D$  tal que  $x(t, z, \varepsilon) \in K$  para todo  $t \in [0, T]$ ,  $z \in \bar{V}$  y  $\varepsilon \in [-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$ .

Por otro lado para  $t \in [0, T]$ ,  $z \in \bar{V}$  y  $\varepsilon \in [-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$ , por continuidad de  $F_1$ ,  $R$  y la relación  $x(0, z, \varepsilon) = z$  se tiene

$$x(t, z, \varepsilon) = z + \varepsilon \int_0^t F_1(s, x(s, z, \varepsilon)) ds + \varepsilon^2 \int_0^t R(s, x(s, z, \varepsilon), \varepsilon) ds, \quad (2.8)$$

pues:

$$\begin{aligned} x'(t, z, \varepsilon) &= F(t, x(s, z, \varepsilon), \varepsilon) \\ \int_0^t x'(s, z, \varepsilon) ds &= \int_0^t F(s, x(s, z, \varepsilon), \varepsilon) ds \\ x(t, z, \varepsilon) - \underbrace{x(0, z, \varepsilon)}_z &= \varepsilon \int_0^t F_1(s, x(s, z, \varepsilon)) ds + \varepsilon^2 \int_0^t R(s, x(s, z, \varepsilon), \varepsilon) ds, \end{aligned}$$

y para  $\varepsilon = 0$  tenemos  $x(t, z, 0) = z$ . Definamos la función  $h$  por

$$h(\varepsilon) = F_1(t, x(t, z, \varepsilon)). \quad (2.9)$$

Observe que la función  $h$  depende sólo de  $\varepsilon$ . Debido a que la función  $F_1(t, x(t, z, \varepsilon))$  es de clase  $C^1$ , la función  $h$  es de clase  $C^1$  en una vecindad de  $\varepsilon = 0$ . Por el desarrollo de serie de Taylor de  $h$  en torno a  $\varepsilon = 0$  se tiene

$$h(\varepsilon) = h(0) + h'(0)\varepsilon + O(\varepsilon^2), \quad (2.10)$$

donde  $\frac{O(\varepsilon^2)}{\varepsilon} \rightarrow 0$  cuando  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Considerando (2.8) tenemos que  $h(0) = F_1(t, x(t, z, 0)) = F_1(t, z)$ . Derivando (2.9) y (2.8) con respecto a  $\varepsilon$  obtenemos

$$h'(\varepsilon) = \cancel{D_t F_1(t, x(t, z, \varepsilon))} + D_x F_1(t, x(t, z, \varepsilon)) \cdot \frac{\partial}{\partial \varepsilon} x(t, z, \varepsilon),$$

y

$$\frac{\partial}{\partial \varepsilon} x(t, x, \varepsilon) = \int_0^t F_1(s, x(t, z, \varepsilon)) ds + 2\varepsilon \int_0^t R(s, x(s, x, \varepsilon), \varepsilon) ds,$$

evaluando las relaciones anteriores en  $\varepsilon = 0$  obtenemos

$$h'(0) = D_x F_1(t, x(t, z, \varepsilon)) \Big|_{\varepsilon=0} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} x(t, z, 0),$$

y

$$\frac{\partial}{\partial \varepsilon} x(t, x, 0) = \int_0^t F_1(s, \underbrace{x(t, z, 0)}_z) ds = \int_0^t F_1(s, z) ds.$$

De donde

$$h'(0) = D_z F_1(t, z) \int_0^t F_1(s, z) ds.$$

Así (2.10) es

$$F_1(t, x(t, z, \varepsilon)) = F_1(t, z) + \varepsilon D_z F_1(t, z) \cdot \int_0^t F_1(s, z) ds + O(\varepsilon^2). \quad (2.11)$$

De (2.3) como la función promedio  $f(z, \varepsilon) = x(T, z, \varepsilon) - x(0, z, \varepsilon)$ , esto equivale a

$$f(z, \varepsilon) = \varepsilon \int_0^T F_1(s, x(s, z, \varepsilon)) ds + \varepsilon^2 \int_0^T R(s, x(s, z, \varepsilon), \varepsilon) ds. \quad (2.12)$$

Considerando (2.11) podemos reescribir la ecuación (2.12) como

$$\begin{aligned} f(z, \varepsilon) &= \varepsilon \int_0^T \left[ F_1(t, z) + \varepsilon D_z F_1(t, z) \cdot \int_0^t F_1(s, z) ds + O(\varepsilon^2) \right] ds \\ &\quad + \varepsilon^2 \int_0^T R(s, x(s, z, \varepsilon), \varepsilon) ds, \\ &= \varepsilon \int_0^T [F_1(t, z) + F_1(t, x(t, z, \varepsilon)) - F_1(t, z)] ds + \varepsilon^2 \int_0^T R(s, x(s, z, \varepsilon), \varepsilon) ds, \end{aligned}$$

de donde

$$f(z, \varepsilon) = \varepsilon \int_0^T F_1(s, z) ds + \varepsilon^2 \int_0^T R(s, x(s, z, \varepsilon), \varepsilon) ds.$$

Así la función  $f$  puede ser escrito en la forma  $f(z, \varepsilon) = \varepsilon f_1(z) + O(\varepsilon^2)$ , en  $\bar{V} \times [-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$  con  $f_1$  dada por (2.7). En efecto, observe que existe un subconjunto compacto  $K$  de  $D$  tal que  $x(t, z, \varepsilon) \in K$  para todo  $t \in [0, T]$ ,  $z \in \bar{V}$  y  $\varepsilon \in [-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$ . Entonces por la continuidad de  $R$  en  $[0, T] \times K \times [-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$  existe  $M_K > 0$  tal que  $|R(t, x(t, z, \varepsilon), \varepsilon)| \leq M_K$ , o sea

$$0 \leq \varepsilon^2 \int_0^T |R(s, x(s, z, \varepsilon), \varepsilon)| ds \leq \varepsilon^2 \int_0^T M_K ds = \varepsilon^2 T M_K = O(\varepsilon^2),$$

de esta forma

$$f(z, \varepsilon) = \varepsilon \underbrace{\int_0^T F_1(s, z) ds}_{f_1(z)} + O(\varepsilon^2).$$

Así

$$f(z, \varepsilon) = \varepsilon f_1(z) + O(\varepsilon^2).$$

Definamos una función auxiliar  $\bar{f} : D \times (-\varepsilon_0, \varepsilon_0) \rightarrow \mathbb{R}^n$  de clase  $C^1$  dado por  $\bar{f}(z, \varepsilon) = \frac{f(z, \varepsilon)}{\varepsilon}$  con  $\varepsilon \neq 0$ , es decir

$$\bar{f}(z, \varepsilon) = f_1(z) + O(\varepsilon).$$

Como  $(p, 0) \in D \times (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$  tal que  $\bar{f}(p, 0) = f_1(p) + O(0) = 0$ . Además  $\det D_z \bar{f}(p, 0) \neq 0$ , entonces por el Teorema de la función Implícita, existe  $\bar{\varepsilon} > 0$  tal que para todo  $\varepsilon \in (-\bar{\varepsilon}_0, \bar{\varepsilon}_0)$  existe una única función  $z_\varepsilon$  tal que

$$\bar{f}(z_\varepsilon(\varepsilon), \varepsilon) = 0 \quad \text{y} \quad z_\varepsilon(0) = p.$$

Luego para todo  $\varepsilon \in (-\bar{\varepsilon}_0, \bar{\varepsilon}_0)$  obtenemos que

$$\bar{f}(z_\varepsilon, \varepsilon) = 0 \Rightarrow f_1(z_\varepsilon, \varepsilon) = 0.$$

Por las ecuaciones (2.8) y (2.12) se sigue que  $x(T, z_\varepsilon, \varepsilon) = x(0, z_\varepsilon, \varepsilon)$ . Por lo tanto, para  $\varepsilon \rightarrow 0$  existe una solución periódica  $\varphi(\cdot, \varepsilon) = x(\cdot, z_\varepsilon, \varepsilon)$  del sistema diferencial (2.5). Por otro lado, considerando nuevamente (2.12), tenemos

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f(z_\varepsilon, \varepsilon) \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (x(T, z_\varepsilon, \varepsilon) - x(0, z_\varepsilon, \varepsilon)) \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} x(T, z_\varepsilon, \varepsilon) - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} x(0, z_\varepsilon, \varepsilon) \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} x(T, z_\varepsilon, \varepsilon) - z_\varepsilon(0) \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} x(T, z_\varepsilon, \varepsilon) - p. \end{aligned}$$

Así tenemos que  $x(T, z_\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow p$  cuando  $\varepsilon \rightarrow 0$ , por tanto el Teorema queda demostrado.  $\square$

A continuación presentaremos dos ejemplos donde se aplica el Teorema del promedio de primer orden, para determinar soluciones periódicas.

### **Ejemplo 2.1 (La ecuación de Van der Pol)**

La ecuación que modela al oscilador de Van der Pol viene definida por

$$x'' + x = \varepsilon(1 - x^2)x'. \quad (2.13)$$

Considerando el cambio de variables  $x' = y$ , puede escribirse como el sistema diferencial

$$\begin{aligned}x' &= y, \\y' &= -x + \varepsilon(1 - x^2)y.\end{aligned}$$

Este sistema escrito en su forma matricial es

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix} + \varepsilon \begin{pmatrix} 0 \\ (1 - x^2)y \end{pmatrix}. \quad (2.14)$$

Como las funciones  $F = \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix}$  y  $R = \begin{pmatrix} 0 \\ (1 - x^2)y \end{pmatrix}$  no satisfacen la periodicidad necesaria dada por el Teorema 2.1, introduzcamos el cambio en coordenadas polares  $(r, \theta)$  tal que  $x = r \cos \theta$ ,  $y = r \sin \theta$ , derivando respecto del tiempo  $t$ , obtenemos

$$\begin{aligned}x' &= r' \cos \theta - r\theta' \sin \theta \\y' &= r' \sin \theta + r\theta' \cos \theta,\end{aligned}$$

resolviendo el sistema anterior respecto a  $r'$  y  $\theta'$ , obtenemos

$$\begin{aligned}r' &= \varepsilon r(1 - r^2 \cos^2 \theta) \sin^2 \theta \\ \theta' &= -1 + \varepsilon \cos \theta(1 - r^2 \cos^2 \theta) \sin \theta.\end{aligned}$$

Introduciendo la variable  $\theta$  como la nueva variable independiente del sistema se sigue que

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{(1 - r^2 \cos^2 \theta)r \sin^2 \theta}{-1 + \varepsilon(1 - r^2 \cos^2 \theta) \sin \theta \cos \theta}.$$

Si definimos  $g(\varepsilon) = \frac{(1 - r^2 \cos^2 \theta)r \sin^2 \theta}{-1 + \varepsilon(1 - r^2 \cos^2 \theta) \sin \theta \cos \theta}$  con  $g(0) = 0$ , por el desarrollo de Taylor de  $g(\varepsilon)$  alrededor de  $\varepsilon = 0$  se tiene

$$g(\varepsilon) = g(0) + g'(0)\varepsilon + O(\varepsilon^2) \quad \text{con } g'(0) = r \sin^2 \theta(r^2 \cos^2 \theta - 1),$$

de donde

$$g(\varepsilon) = \varepsilon r \sin^2 \theta(r^2 \cos^2 \theta - 1) + O(\varepsilon^2),$$

de esta forma

$$\frac{dr}{d\theta} = \varepsilon r \underbrace{\sin^2 \theta (r^2 \cos^2 \theta - 1)}_{F(\theta, r)} + O(\varepsilon^2).$$

Observemos que este sistema tiene la forma estándar dada por el sistema diferencial (2.5), luego podemos aplicar el Teorema 2.1, si tomamos  $x = r, t = \theta, T = 2\pi$ ,  $F(t, x) = r \sin^2 \theta (r^2 \cos^2 \theta - 1)$  y  $D = (0, +\infty)$ . Además la función  $F(\theta, r)$  es  $2\pi$ -periódica en  $\theta$  y satisface las hipótesis del Teorema del Promedio de primer orden. La función promedio viene dada por

$$\begin{aligned} f(r) &= \int_0^{2\pi} r \sin^2 \theta (r^2 \cos^2 \theta - 1) d\theta \\ &= \frac{1}{4} \pi r (r^2 - 4). \end{aligned} \quad (2.15)$$

Resolviendo  $f(r) = 0$  se tiene las singularidades

$$r_1 = 0, r_2 = 2, r_3 = -2,$$

además

$$\frac{df}{dr} = \frac{\pi r^2}{2} + \frac{1}{4} \pi r (r^2 - 4),$$

donde claramente  $f'(r_i) \neq 0$  para  $i = 2, 3$  y  $r_2 \in D$  ( $r_1, r_3$  no están en  $D$ ). De esta forma aplicando el Teorema 2.1 podemos concluir que para  $\varepsilon \rightarrow 0$  existe una solución  $2\pi$ -periódica del sistema (2.13) con  $r(\varepsilon) \rightarrow 2$  cuando  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

### Ejemplo 2.2 (Bifurcación Poincaré - Andronov- Hopf)

Consideremos el sistema diferencial

$$y' = g(y, \lambda), \quad (2.16)$$

donde  $y \in \mathbb{R}^n$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}^p$ ,  $g \in C^r$  en una vecindad del punto fijo en  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$ , supongamos que  $(y, \lambda) = (y_0, \lambda_0)$  es un punto fijo, es decir  $g(y_0, \lambda_0) = 0$ , ¿Cómo varía la dinámica del sistema (2.16) para  $\lambda \sim \lambda_0$ ?

Supongamos que el sistema lineal

$$\zeta' = D_y g(y_0, \lambda_0) \zeta, \quad \zeta \in \mathbb{R}^n,$$

donde  $D_y g(y_0, \lambda_0)$  tiene dos autovalores con parte real nula y el resto de los autovalores con parte real no nula. La dinámica de (2.16) cerca de  $(y_0, \lambda_0)$  es determinado por el campo de vectores restringido a la variedad central, que en este caso es de dimensión dos:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{Re}\lambda(\mu) & \operatorname{Im}\lambda(\mu) \\ \operatorname{Im}\lambda(\mu) & \operatorname{Re}\lambda(\mu) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_1(x, y, \mu) \\ f_2(x, y, \mu) \end{pmatrix}, \quad (2.17)$$

donde  $(x, y, \mu) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ,  $f_1, f_2$  son funciones lineales en  $x, y$ . La forma normal de (2.17) es

$$\begin{aligned} x' &= \alpha(\mu)x - \omega(\mu)y + (a(\mu)x - b(\mu)y)(x^2 + y^2) + \mathcal{O}(|x, y|^5), \\ y' &= \omega(\mu)x + \alpha(\mu)y + (b(\mu)x + a(\mu)y)(x^2 + y^2) + \mathcal{O}(|x, y|^5). \end{aligned} \quad (2.18)$$

Usando coordenadas polares  $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ , el sistema (2.18) puede ser escrito como

$$\begin{aligned} r' &= \alpha(\mu) + a(\mu)r^3 + \mathcal{O}(r^5), \\ \theta' &= \omega(\mu) + b(\mu)r^2 + \mathcal{O}(r^4). \end{aligned} \quad (2.19)$$

Por el desarrollo de Taylor de las funciones  $\alpha(\mu), a(\mu), \omega(\mu), b(\mu)$  en una vecindad de  $\mu = 0$ , el sistema (2.19) se reescribe como:

$$\begin{aligned} r' &= \alpha'(0)\mu r + a(0)r^3 + \mathcal{O}(\mu^2 r; \mu r^3), \\ \theta' &= \omega(0) + \omega'(0)\mu + b(0)r^2 + \mathcal{O}(\mu^2; \mu r^2; r^4). \end{aligned} \quad (2.20)$$

Haciendo  $\alpha'(0) = d, a(0) = a, \omega(0) = \omega, \omega'(0) = c, b(0) = b$ , reescribimos el sistema (2.20) como

$$\begin{aligned} r' &= d\mu r + ar^3 + \mathcal{O}(\mu^2 r, \mu^3 r, r^5), \\ \theta' &= \omega + c\mu + br^2 + \mathcal{O}(\mu^2, \mu r^2, r^4). \end{aligned} \quad (2.21)$$

Dado el cambio de coordenadas,  $r \rightarrow \varepsilon r, \theta \rightarrow \frac{\theta}{\varepsilon}, t \rightarrow \frac{t}{\varepsilon}, \mu \rightarrow \varepsilon^2 \mu$  (re-escalando) se tiene

$$\begin{aligned} r' &= \varepsilon(d\mu r + ar^3) + \mathcal{O}(\varepsilon^3) \\ \theta' &= \omega + \mathcal{O}(\varepsilon^2). \end{aligned}$$

Introduciendo la variable  $\theta$  como la nueva variable independiente se sigue que

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{\varepsilon(d\mu r + ar^3) + O(\varepsilon^3)}{w + O(\varepsilon^2)}.$$

Si definimos  $g(\varepsilon) = \frac{\varepsilon(d\mu r + ar^3) + O(\varepsilon^3)}{w + O(\varepsilon^2)}$  con  $g(0) = 0$ , por el desarrollo de Taylor de  $g(\varepsilon)$  alrededor de  $\varepsilon = 0$  se tiene

$$g(\varepsilon) = g(0) + g'(0)\varepsilon + g''(0)\varepsilon^2 + O(\varepsilon^3),$$

con  $g'(0) = \frac{d\mu r + ar^3}{w}$  y  $g''(0) = 0$ , de donde

$$g(\varepsilon) = \varepsilon \frac{d\mu r + ar^3}{w} + O(\varepsilon^3),$$

de esta forma

$$\frac{dr}{d\theta} = \varepsilon \underbrace{\frac{d\mu r + ar^3}{w}}_{F(\mu, r)} + O(\varepsilon^3). \quad (2.22)$$

Observemos que el sistema (2.22) tiene la forma estandar y podemos aplicar la teoría del promedio. Además la función  $F(\mu, r)$  es  $2\pi$ -periódica en  $\theta$  y satisface las hipótesis del Teorema 2.1. La función promedio viene dada por

$$\begin{aligned} f(r) &= \int_0^{2\pi} \left( \frac{d\mu r + ar^3}{w} \right) d\theta \\ &= 2\pi r \left( \frac{d\mu}{w} + \frac{ar^2}{w} \right). \end{aligned} \quad (2.23)$$

Resolviendo  $f(r) = 0$  se tiene las singularidades

$$r_1 = 0, r_2 = \sqrt{-\frac{d\mu}{a}}, r_3 = -\sqrt{-\frac{d\mu}{a}}$$

además

$$\frac{df}{dr} = \frac{2\pi(d\mu + 3ar^2)}{w}.$$

Como la singularidad  $r_2$  del sistema promediado (2.23) satisface  $\frac{df}{dr}(r_2) \neq 0$ , de esta forma tenemos del Teorema 2.1 que para  $\varepsilon \rightarrow 0$  existe una solución  $2\pi$ -periódica del sistema (2.21) con  $r(\varepsilon) \rightarrow 0$  cuando  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

### 2.1.3. Estabilidad de soluciones periódicas para promedio de primer orden

En esta sección estableceremos un resultado respecto a la estabilidad de la solución  $T$ -periódica dada por el Teorema 2.1. Para poder establecer estos resultados, recordaremos el concepto de estabilidad para soluciones de equilibrio. Consideremos el siguiente sistema diferencial

$$x' = f(t, x), \quad (2.24)$$

donde  $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  es una función continua en  $(t, x)$  y Lipschitz-continua en  $x$ . Asumamos que  $x = p$  es un punto de equilibrio de (2.24), es decir  $f(t, p) = 0$  para  $t \in \mathbb{R}$ .

**Definición 2.1** Consideremos la ecuación (2.24) y una vecindad  $D \subset \mathbb{R}^n$  de  $x = p$ . Denotemos la solución con condición inicial en  $t = t_0$  con  $x(t_0) = x_0 \in D$  como  $x(t; t_0, x_0)$ . La solución  $x = p$  se dice estable en el sentido de Lyapunov si para cada  $\varepsilon > 0$  y  $t_0 > 0$  existe  $\delta = \delta(\varepsilon, t_0)$  tal que si  $\|x_0 - p\| \leq \delta$ , entonces  $x(t; t_0, x_0)$  se encuentra definida para todo  $t \geq t_0$  y además  $\|x(t; t_0, x_0) - p\| \leq \varepsilon$  para todo  $t \geq t_0$ .

**Observación 2.1** Si la solución de equilibrio  $x = p$  de la ecuación (2.24) no es estable en el sentido de Lyapunov, se dice inestable.

**Definición 2.2** La solución de equilibrio  $x = p$  de la ecuación (2.24) se dice asintóticamente estable si  $x = p$  es estable y además existe  $\delta(t_0) > 0$  tal que si  $\|x_0 - p\| \leq \delta(t_0)$ , entonces  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t; t_0, x_0) - p\| = 0$ .

Los primeros dos teoremas de estabilidad (en el sentido de Lyapunov) serán utilizados para determinar el tipo de estabilidad de las soluciones periódicas vía el método del promedio, la demostración se puede ver en [32].

**Teorema 2.2** Consideremos la ecuación diferencial ordinaria definida en  $\mathbb{R}^n$

$$x' = A(t)x + f(t, x), \quad (2.25)$$

$A(t)$  es una matriz continua y  $T$ -periódica, la función  $f(t, x)$  es continua en  $(t, x)$  y es Lipschitz-continua en  $x$  para  $t \in \mathbb{R}$  y  $x$  pertenece a una vecindad de  $x = 0$ . Mas

aún tenemos que

$$\lim_{\|x\| \rightarrow 0} \frac{\|f(t, x)\|}{\|x\|} = 0,$$

uniformemente en  $t$ . Si la parte real de los exponentes característicos de la ecuación periódica lineal

$$y' = A(t)y$$

son negativas, entonces la solución  $x = 0$  de la ecuación (2.25) es asintóticamente estable.

**Teorema 2.3** Consideremos la ecuación diferencial ordinaria definida en  $\mathbb{R}^n$

$$x' = Ax + B(t)x + f(t, x), \quad (2.26)$$

donde  $t \geq t_0$  y  $A$  es una matriz constante de orden  $n$ ,  $B(t)$  es una matriz continua de orden  $n$  tal que  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|B(t)\| = 0$ . La función  $f(t, x)$  es continua en  $(t, x)$  y es Lipschitz-continua en una vecindad de  $x = 0$ . Mas aún tenemos que

$$\lim_{\|x\| \rightarrow 0} \frac{\|f(t, x)\|}{\|x\|} = 0,$$

uniformemente en  $t$ . Si la matriz  $A$  posee al menos un valor propio con parte real positiva, entonces la solución  $x = 0$  de la ecuación (2.26) es inestable.

Nuevamente consideremos el sistema estándar para la utilización del Teorema del promedio, es decir

$$\begin{aligned} x' &= \varepsilon F_1(t, x) + \varepsilon^2 R(t, x, \varepsilon), \\ x(0) &= x_0. \end{aligned}$$

Supongamos que las funciones  $F_1, R$  satisfacen las hipótesis del Teorema 2.1 y además,  $\det(D_x f(p)) \neq 0$  para  $p$  una solución de equilibrio de la función promedio (2.7).

**Teorema 2.4 (Estabilidad)** Sea  $\phi(t, \varepsilon)$  la familia de soluciones periódicas obtenidas en el Teorema 2.1. Si todos los valores propios de la matriz  $D_x f(p)$  posee parte real negativa, la solución periódica  $\phi(t, \varepsilon)$  asociada a  $p$  es asintóticamente estable para  $\varepsilon$  suficientemente pequeño. De la misma forma si al menos un valor propio posee parte real positiva entonces la solución  $\phi(t, \varepsilon)$  es inestable.

**Demostración.** Considerando  $x = z + \phi(t, \varepsilon)$ , obtenemos las relaciones

$$\begin{aligned} z' + \phi'(t, \varepsilon) &= \varepsilon F_1(t, z + \phi(t, \varepsilon)) + \varepsilon^2 R(t, z + \phi(t, \varepsilon), \varepsilon) \\ &= \varepsilon F_1(t, \phi(t, \varepsilon)) + \varepsilon \frac{\partial F_1}{\partial z}(t, \phi(t, \varepsilon))z + \varepsilon^2 R(t, \phi(t, \varepsilon), \varepsilon) \\ &\quad + \varepsilon^2 \frac{\partial R}{\partial z}(t, \phi(t, \varepsilon), \varepsilon)z + O(z^2), \end{aligned}$$

dado que  $\phi'(t, \varepsilon) = \varepsilon F_1(t, z + \phi(t, \varepsilon)) + \varepsilon^2 R(t, z + \phi(t, \varepsilon), \varepsilon)$ , entonces

$$z' = \varepsilon \frac{\partial F_1}{\partial z}(t, \phi(t, \varepsilon))z + \varepsilon^2 R(t, \phi(t, \varepsilon), \varepsilon) + O(z^2).$$

Omitiendo los términos no lineales y renombrando nuevamente  $x$  como la variable dependiente, se obtiene la ecuación lineal con coeficientes T-periódicos es

$$x' = \varepsilon A(t, \varepsilon)x, \quad (2.27)$$

donde  $A(t, \varepsilon) = \frac{\partial}{\partial x}[F_1(t, x) + \varepsilon R(t, x, \varepsilon)]_{x=\phi(t, \varepsilon)}$ . Introducimos la matriz T-periódica  $B(t) = \frac{\partial F_1}{\partial x}(t, p)$ . Por el Teorema 2.1 dado que  $\phi(t, \varepsilon) \rightarrow p$  cuando  $\varepsilon \rightarrow 0$  entonces  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} A(t, \varepsilon) = B(t)$ . Definamos las matrices

$$B^\circ = \int_0^T B(t)dt, \quad C(t) = \int_0^T [B(t) - B^\circ]ds.$$

Notemos que  $B^\circ = \int_0^T \frac{\partial F_1}{\partial x}(s, z)ds = \frac{\partial}{\partial x} \int_0^T F_1(s, z)ds$ , de esta forma  $B^\circ$  es la matriz de linealización de la ecuación promediada (2.7), además  $C(t)$  es T-periódica. Consideremos la transformación  $x \rightarrow y$  por medio de la igualdad

$$y = (I - \varepsilon C(t))x. \quad (2.28)$$

Derivando (2.28) y considerando (2.27) se sigue que

$$\begin{aligned} y' &= -\varepsilon C'(t)x + (I - \varepsilon C(t))x' \\ &= -\varepsilon B(t)x + \varepsilon B^\circ x + (I - \varepsilon C(t))\varepsilon A(t, \varepsilon)x \\ &= [\varepsilon B^\circ + \varepsilon(A(t, \varepsilon) - B(t)) - C^2 C(t)A(t, \varepsilon)](I - \varepsilon C(t))^{-1}y. \end{aligned} \quad (2.29)$$

Por la equivalencia  $(I - \varepsilon C(t))^{-1} = I + \varepsilon C(t) + O(\varepsilon^2)$  tenemos que, (2.29) se transforma en

$$y' = \varepsilon B^\circ y + \varepsilon(A(t, \varepsilon) - B(t))y + \varepsilon^2 M(t, \varepsilon)y, \quad (2.30)$$

donde  $M(t, \varepsilon) = [B^\circ + (A(t, \varepsilon) - B(t)) - \varepsilon C(t)A(t, \varepsilon)][C(t) + \varepsilon I]$  es  $T$ -periódica y acotada. Definamos la función continua  $K(t, \varepsilon) = A(t, \varepsilon) - B(t)$  donde  $K(t, \varepsilon) \rightarrow 0$  cuando  $\varepsilon \rightarrow 0$ . En efecto, dado que  $\phi(t, \varepsilon) \rightarrow p$  cuando  $\varepsilon \rightarrow 0$  se tiene  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} K(t, \varepsilon) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} A(t, \varepsilon) - B(t) = \frac{\partial F_1}{\partial x}(t, p) - B(t) = 0$ . De acuerdo a lo anterior el sistema (2.30) se transforma en

$$y' = \varepsilon[B^\circ + K(t, \varepsilon) + \varepsilon M(t, \varepsilon)]y. \quad (2.31)$$

De la teoría de Floquet (ver [6], cap 2 sección 4), dado que los multiplicadores característicos son determinados de forma única, podemos seleccionar los exponentes de Floquet de tal forma que coincidan con los valores propios de la matriz  $B^\circ$ . Formalmente, supongamos que  $\alpha_j$  para  $j = 1, 2, \dots, n$  son los valores propios de la matriz  $A(t, \varepsilon)$ , entonces los exponentes característicos de la ecuación (2.30),  $\lambda_j(\varepsilon)$  para  $j = 1, 2, \dots, n$  pueden ser considerados como funciones continuas tales que  $\lambda_j(0) = \alpha_j$ . De esta forma, si  $Re(\alpha_j) < 0$  (respectivamente  $Re(\alpha_j) > 0$ ), entonces existe  $\varepsilon_0 > 0$  tal que  $Re(\lambda_j(\varepsilon)) < 0$  (respectivamente  $Re(\lambda_j(\varepsilon)) > 0$ ) para todo  $|\varepsilon| \leq \varepsilon_0$ . Ahora podemos aplicar el Teorema 1.1, suponiendo que  $Re(\lambda_j) < 0$ , entonces la solución trivial  $y = 0$  de (2.30) es asintóticamente estable, pero esta solución trivial corresponde a  $x = \phi(t, \varepsilon)$ , por lo que deducimos que para  $\varepsilon$  suficientemente pequeño,  $\phi(t, \varepsilon)$  es asintóticamente estable.

De acuerdo a la Teoría de Floquet, toda matriz fundamental  $\Phi(t, \varepsilon)$  de la ecuación (2.31) puede ser escrito como  $\Phi(t, \varepsilon) = P(t, \varepsilon) \cdot e^{\varepsilon H t}$ , donde los valores propios de la matriz  $\varepsilon H$  corresponde a los exponentes característicos de la ecuación (2.30). Transformando la variable  $y$ , de acuerdo a  $y = P(t, \varepsilon)v$ , se tiene que

$$\varepsilon(B^\circ + K(t, \varepsilon) + \varepsilon M(t, \varepsilon))P(t, \varepsilon)v = P'(t, \varepsilon)v + P(t, \varepsilon)v',$$

así,

$$v' = P^{-1}(t, \varepsilon)[\varepsilon(B^\circ + K(t, \varepsilon) + \varepsilon M(t, \varepsilon))P(t, \varepsilon) - P'(t, \varepsilon)]v.$$

Ahora, afirmamos que

$$P^{-1}(t, \varepsilon)[\varepsilon(B^\circ + K(t, \varepsilon) + \varepsilon M(t, \varepsilon))P(t, \varepsilon) - P'(t, \varepsilon)] = \varepsilon H.$$

En efecto, dado que  $\Phi(t, \varepsilon) = P(t, \varepsilon)e^{\varepsilon H t}$ , entonces

$$\varepsilon(B^\circ + K(t, \varepsilon) + \varepsilon M(t, \varepsilon))P(t, \varepsilon)e^{\varepsilon H t} = \varepsilon(B^\circ + K(t, \varepsilon) + \varepsilon M(t, \varepsilon))\Phi(t, \varepsilon) = \Phi'(t, \varepsilon)$$

así,

$$\varepsilon(B^\circ + K(t, \varepsilon) + \varepsilon M(t, \varepsilon))P(t, \varepsilon)e^{\varepsilon Ht} = P'(t, \varepsilon)e^{\varepsilon Ht} + \varepsilon H e^{\varepsilon Ht},$$

por lo tanto

$$\varepsilon(B^\circ + K(t, \varepsilon) + \varepsilon M(t, \varepsilon))P(t, \varepsilon) = P'(t, \varepsilon) + \varepsilon H P(t, \varepsilon),$$

lo que implica que

$$\varepsilon H = P^{-1}(t, \varepsilon)[\varepsilon(B^\circ + K(t, \varepsilon) + \varepsilon M(t, \varepsilon))P(t, \varepsilon) - P'(t, \varepsilon)].$$

Utilizando la afirmación anterior se tiene que, (2.30) se transforma en

$$v' = \varepsilon H v. \tag{2.32}$$

Ahora podemos aplicar el Teorema 2.3, considerando que si  $Re(\lambda_j) > 0$  para al menos uno de los exponentes característicos, entonces la solución trivial  $v = 0$  de (2.32) es inestable. La solución trivial  $v = 0$  corresponde a la solución trivial  $y = 0$  y esta corresponde a la solución  $x = \phi(t, \varepsilon)$ , por lo que podemos concluir que para  $\varepsilon$  suficientemente pequeño, la solución periódica es inestable. Así hemos concluido la demostración del Teorema 2.4 .  $\square$

**Observación 2.2** Note que en el ejemplo 2.1 se tiene  $\frac{df}{dr}(2) = 2\pi > 0$ , por el Teorema 2.4 la solución  $2\pi$ -periódica de la ecuación de Van der Pol es inestable.

### 2.1.4. Teorema de existencia de soluciones vía promedio de segundo orden

Consideremos el siguiente sistema diferencial

$$x' = \varepsilon F_1(t, x) + \varepsilon^2 F_2(t, x) + \varepsilon^3 R(t, x, \varepsilon), \tag{2.33}$$

con  $x \in D$ , donde  $D$  es un subconjunto abierto de  $\mathbb{R}^n$ ,  $t \geq 0$  y  $F_1, F_2 : \mathbb{R} \times D \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $R : \mathbb{R} \times D \times (-\varepsilon_0, \varepsilon_0) \rightarrow \mathbb{R}^n$  son funciones de clase  $C^2$ ,  $T$ -periódicas en la primera variable.

Asumimos que

1. Las funciones  $F_1(\cdot, t), F_2(\cdot, t) \in C^2(D)$ , para todo  $t \in \mathbb{R}$ ,  $F_1, F_2, D_x F_1$  y  $D_x F_2$  son localmente Lipschitz con respecto a  $x$  y  $R$  es diferenciable respecto a  $\varepsilon$ . Se define  $f_1, f_2 : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  como

$$\begin{aligned} f_1(z) &= \int_0^T F_1(s, z) ds, \\ f_2(z) &= \int_0^T \left[ D_z F_1(s, z) \int_0^s F_1(t, z) dt + F_2(t, z) \right] ds \end{aligned} \quad (2.34)$$

2. Para  $V \subseteq D$  un subconjunto abierto, acotado y para cada  $\varepsilon \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0) - \{0\}$ , existe  $p \in V$  tal que  $f_1(p) + \varepsilon f_2(p) = 0$  y  $\det D_x(f_1 + \varepsilon f_2)(p) \neq 0$ , donde  $D_x(f_1 + \varepsilon f_2)$  corresponde a la matriz Jacobiana de  $f_1 + \varepsilon f_2$ .

**Teorema 2.5 (Existencia)** Supongamos que las hipótesis anteriores se satisfacen. Entonces, para  $|\varepsilon| > 0$  suficientemente pequeño, existe una solución  $T$ -periódica,  $\varphi(t, \varepsilon)$  del sistema (2.33) tal que  $\varphi(0, \varepsilon) \rightarrow p$  cuando  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

**Demostración.** Sea  $U \subset V$  una vecindad de  $p$  tal que  $f_1(p) + \varepsilon f_2(p) \neq 0$  para  $p \in U$ , es decir,  $p$  es una solución aislada de  $f_1(p) + \varepsilon f_2(p) = 0$ .

Sabemos que existe  $\varepsilon_0 > 0$  tal que si  $\varepsilon \in [-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$  se puede definir una solución única de (2.33) sobre  $[0, T]$ , además existe un compacto  $K \subset D$  tal que  $x(t, z, \varepsilon) \in K$  para  $t \in [0, T]$ ,  $z \in \bar{V}$  y  $\varepsilon \in [-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$ .

Por otra parte, por la continuidad de las funciones  $F_1, F_2, R$  considerando la condición inicial  $x(0, z, \varepsilon) = z$  se tiene que

$$\begin{aligned} x(t, z, \varepsilon) &= z + \varepsilon \int_0^t F_1(s, x(s, z, \varepsilon)) ds + \varepsilon^2 \int_0^t F_2(s, x(s, z, \varepsilon)) ds \\ &\quad + \varepsilon^3 \int_0^t R(s, x(s, z, \varepsilon), \varepsilon) ds. \end{aligned} \quad (2.35)$$

Debido a que  $f(t, x, \varepsilon) = \varepsilon F_1(t, x) + \varepsilon^2 F_2(t, x) + \varepsilon^3 R(t, x, \varepsilon)$  es diferenciable respecto a  $\varepsilon$ ,  $\varepsilon \in [-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$ , se tiene también que la solución  $x(t, z, \varepsilon)$  es diferenciable respecto a  $\varepsilon$ . De esta forma

$$D_\varepsilon x(t, z, \varepsilon) = \int_0^t F_1(s, x(s, z, \varepsilon)) ds + O(\varepsilon) + O(\varepsilon^2),$$

y luego

$$D_\varepsilon x(t, z, 0) = \int_0^t F_1(s, z) ds.$$

Definamos la función auxiliar  $h(\varepsilon) = F_1(s, x(s, z, \varepsilon))$  de clase  $C^1$  respecto a  $\varepsilon$ .

Utilizando el desarrollo de Taylor de  $h$  alrededor de  $\varepsilon = 0$  se tiene

$$h(\varepsilon) = h(0) + h'(0)\varepsilon + O(\varepsilon^2),$$

$$F_1(t, x(t, z, \varepsilon)) = F_1(t, z) + \frac{\partial}{\partial x}F_1(t, z) \cdot \int_0^t F_1(s, z)ds + O(\varepsilon^2),$$

donde  $\frac{O(\varepsilon^2)}{\varepsilon} \rightarrow 0$ , cuando  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Dado que  $h(0) = F_1(s, z)$  y  $h'(0) = D_z F_1(s, z) \cdot \int_0^t F_1(s, z)ds$  se sigue que

$$F_1(s, x(s, z, \varepsilon)) = F_1(s, z) + \varepsilon D_z F_1(s, z) \cdot \int_0^t F_1(s, z)ds. \quad (2.36)$$

Como  $x(t, z, \varepsilon)$  está contenida en un compacto  $K$  y  $F_1, F_2, R$  son localmente Lipschitz, entonces para  $t \in [0, T]$  y  $\varepsilon \in [-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$

$$x(t, z, \varepsilon) = z + \int_0^t F_1(s, z)ds + O(\varepsilon^2). \quad (2.37)$$

Considerando (2.37) por ser  $F_2$  localmente lipschitz en la segunda coordenada se tiene que

$$\begin{aligned} \|F_2(t, x(t, z, \varepsilon)) - F_2(t, z)\| &\leq L_k \|x(t, z, \varepsilon) - z\| \\ &\leq L_k \left\| \int_0^t F_1(s, z)ds + O(\varepsilon^2) \right\| \\ &\leq \varepsilon L_k O(1), \end{aligned}$$

donde  $L_k$  es la constante de Lipschitz. De esta forma podemos expresar

$$F_2(t, x(t, z, \varepsilon)) = F_2(t, z) + O(\varepsilon). \quad (2.38)$$

Definamos la función de periodicidad

$$f_0(z, \varepsilon) = \varepsilon \int_0^T F_1(s, x(s, z, \varepsilon))ds + \varepsilon^2 \int_0^T F_2(s, x(s, z, \varepsilon)) + \varepsilon^3 \int_0^T R(s, x(s, z, \varepsilon), \varepsilon)ds. \quad (2.39)$$

A partir de (2.36) y (2.38) podemos redefinir (2.39) como

$$\begin{aligned}
f_0(z, \varepsilon) &= \varepsilon \int_0^T [F_1(s, z) + \varepsilon D_z F_1(s, z) \int_0^s F_1(t, z) dt] ds + \varepsilon^2 \int_0^T [F_2(t, z) + O(\varepsilon)] ds \\
&\quad + \varepsilon^3 \int_0^T R(s, x(s, z, \varepsilon)) ds \\
&= \varepsilon \int_0^T F_1(s, z) ds + \varepsilon^2 \int_0^T [D_z F_1(s, z) \int_0^s F_1(t, z) dt] ds + \varepsilon^2 \int_0^T F_2(t, z) ds + O(\varepsilon^3) \\
&= \varepsilon \int_0^T F_1(s, z) ds + \varepsilon^2 \int_0^T [D_z F_1(s, z) \int_0^s F_1(t, z) dt + F_2(s, z)] ds + O(\varepsilon^3).
\end{aligned}$$

Por hipótesis se sigue que

$$f_0(z, \varepsilon) = \varepsilon f_1(z) + \varepsilon^2 f_2(z) + O(\varepsilon^3).$$

Definimos la función auxiliar  $\bar{f}_0(z, \varepsilon) = f_1(z) + \varepsilon f_2(z) + O(\varepsilon^2)$ . Debido a que las soluciones de (2.33) son de clase  $C^1$  respecto a  $(z, \varepsilon)$  y como  $f_1(p) + \varepsilon f_2(p) = 0$  y  $\det D_z(f_1 + \varepsilon f_2)(p) \neq 0$  entonces  $\bar{f}_0(p, 0) = 0$  y  $\det D_z \bar{f}_1(p, 0) \neq 0$ . Por el Teorema de la función Implícita existe una única función  $z_\varepsilon$  tal que

$$\bar{f}_0(z_\varepsilon, \varepsilon) = 0 \quad \text{y} \quad z_\varepsilon(0) = p.$$

Luego para todo  $\varepsilon \in (-\bar{\varepsilon}_0, \bar{\varepsilon}_0) - \{0\}$  obtenemos

$$\bar{f}_0(z_\varepsilon, \varepsilon) = 0 \Rightarrow f_0(z_\varepsilon, \varepsilon) = 0.$$

Considerando (2.35) y (2.39) tenemos que  $x(T, z_\varepsilon, \varepsilon) = x(0, z_\varepsilon, \varepsilon)$ , es decir, existe una solución  $T$ -periódica  $\varphi(\cdot, \varepsilon) = x(\cdot, z_\varepsilon, \varepsilon)$  de (2.33) para  $\varepsilon$  suficientemente pequeño. Por otro lado considerando (2.39) y tomando límites tenemos

$$\begin{aligned}
0 &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f_0(z_\varepsilon, \varepsilon), \\
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (x(T, z_\varepsilon, \varepsilon) - x(0, z_\varepsilon, \varepsilon)), \\
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} x(T, z_\varepsilon, \varepsilon) - p.
\end{aligned}$$

Por lo tanto  $x(T, z_\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow p$  cuando  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Así queda demostrado el Teorema.  $\square$

**Observación 2.3** Si la función  $f_1$  no es idénticamente nulo, entonces los ceros  $f_1 + \varepsilon f_2$  corresponden a los ceros de  $f_1$  para  $\varepsilon$  suficientemente pequeño, en este caso nos

encontramos en el Teorema del promedio de primer orden. En caso contrario si  $f_1$  es idénticamente nulo, y  $f_2$  no lo es, entonces los ceros de  $f_1 + \varepsilon f_2$  corresponden a los ceros de  $f_2$ , en este caso nos encontramos en el Teorema del promedio de segundo orden.

### 2.1.5. Estabilidad de soluciones periódicas para promedio de segundo orden

Consideremos el sistema

$$x' = \varepsilon F_1(t, x) + \varepsilon^2 F_2(t, x) + \varepsilon^3 R(t, x, \varepsilon).$$

Asumamos que las hipótesis del Teorema del promedio de segundo orden se satisfacen y además  $\det D_x(f_1 + \varepsilon f_2)(p) \neq 0$ , donde  $p$  satisface que  $f_1(p) + \varepsilon f_2(p) = 0$  para  $f_1$  y  $f_2$  definidas en (2.34).

**Teorema 2.6 (Estabilidad)** Si todos los autovalores de la matriz  $D_x(f_1 + \varepsilon f_2)(p)$  posee parte real negativa, entonces para  $\varepsilon$  suficientemente pequeño la solución  $\phi(t, \varepsilon)$  asociada a  $p$  es asintóticamente estable. De la misma forma si al menos existe un valor propio de la matriz  $D_x(f_1 + \varepsilon f_2)(p)$  posee parte real positiva, entonces para  $\varepsilon$  suficientemente pequeño la solución  $\phi(t, \varepsilon)$  asociada a  $p$  es inestable.

**Demostración.** Sea  $\phi(t, \varepsilon)$  la solución T-periódica del sistema (2.33) asociada a  $p$ . Considerando  $x = z + \phi(t, \varepsilon)$ , tenemos

$$\begin{aligned} z' + \phi'(t, \varepsilon) &= \varepsilon F_1(t, z + \phi(t, \varepsilon)) + \varepsilon^2 F_2(t, z + \phi(t, \varepsilon)) + \varepsilon^3 R(t, z + \phi(t, \varepsilon), \varepsilon) \\ &= \varepsilon F_1(t, \phi(t, \varepsilon)) + \varepsilon \frac{\partial F_1}{\partial z}(t, \phi(t, \varepsilon))z + \varepsilon^2 F_2(t, \phi(t, \varepsilon)) + \varepsilon^2 \frac{\partial F_2}{\partial z}(t, \phi(t, \varepsilon))z \\ &\quad + \varepsilon^3 R(t, \phi(t, \varepsilon)) + \varepsilon^3 \frac{\partial R}{\partial z}(t, \phi(t, \varepsilon))z + O(z^2). \end{aligned}$$

Dado que  $\phi(t, \varepsilon)$  es solución del sistema (2.33), tenemos

$$\begin{aligned} z' &= \varepsilon \frac{\partial F_1}{\partial z}(t, \phi(t, \varepsilon))z + \varepsilon^2 \frac{\partial F_2}{\partial z}(t, \phi(t, \varepsilon))z + \varepsilon^3 \frac{\partial R}{\partial z}(t, \phi(t, \varepsilon))z + O(z^2), \\ &= \varepsilon \frac{\partial F_1}{\partial z}(t, p)z + \varepsilon \left[ \frac{\partial F_1}{\partial z}(t, \phi(t, \varepsilon)) - \frac{\partial F_1}{\partial z}(t, p) \right] z + \varepsilon^2 \frac{\partial F_2}{\partial z}(t, p) \\ &\quad + \varepsilon \left[ \frac{\partial F_2}{\partial z}(t, \phi(t, \varepsilon)) - \frac{\partial F_2}{\partial z}(t, p) \right] z + \varepsilon^3 \frac{\partial R}{\partial z}(t, \phi(t, \varepsilon))z + O(z^2). \end{aligned} \quad (2.40)$$

Definiendo

$$K(t, \varepsilon) = \frac{\partial F_1}{\partial z}(t, \phi(t, \varepsilon)) - \frac{\partial F_1}{\partial z}(t, p), \quad M(t, \varepsilon) = \frac{\partial F_2}{\partial z}(t, \phi(t, \varepsilon)) - \frac{\partial F_2}{\partial z}(t, p),$$

tenemos que (2.36) se transforma en

$$z' = \varepsilon \left[ \frac{\partial F_1}{\partial z}(t, p) + \varepsilon \frac{\partial F_2}{\partial z}(t, p) + K(t, \varepsilon) + \varepsilon M(t, \varepsilon) + \varepsilon^2 \frac{\partial R}{\partial z}(t, \phi(t, \varepsilon)) \right] z + O(z^2).$$

Dado que  $\phi(t, \varepsilon) \rightarrow p$  cuando  $\varepsilon \rightarrow 0$  se tiene que  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} K(t, \varepsilon) = 0$ . Consideremos la parte lineal de la ecuación (2.40)

$$\bar{z}' = \varepsilon \left[ \frac{\partial F}{\partial z}(t, p) + \varepsilon \frac{\partial F_2}{\partial z}(t, p) + K(t, \varepsilon) + M(t, \varepsilon) + \varepsilon^2 \frac{\partial R}{\partial z}(t, \phi(t, \varepsilon)) \right] \bar{z}. \quad (2.41)$$

Supongamos que  $\alpha_j$  para  $j = 1, 2, \dots, n$  son los autovalores de la matriz  $\frac{\partial F_1}{\partial z}(t, p) + \varepsilon \frac{\partial F_2}{\partial z}(t, p)$ . Entonces los exponentes de Floquet de la ecuación (2.41) se pueden definir como la función continua  $\lambda(\varepsilon)$ , tal que  $\lambda_j(0) = \alpha_j$  para cada  $j$ . Si  $Re(\alpha_j) < 0$  (respectivamente  $Re(\alpha_j) > 0$ ), entonces existe  $\varepsilon_0 > 0$  tal que  $Re(\lambda_j(\varepsilon)) < 0$  (respectivamente  $Re(\lambda_j(\varepsilon)) > 0$ ) para todo  $|\varepsilon| \leq \varepsilon_0$ . Aplicando el Teorema 2.2, si  $Re(\lambda_j) < 0$ , entonces la solución trivial  $z = 0$  de (2.41) es asintóticamente estable, pero esta solución trivial anterior corresponde a  $x = \phi(t, \varepsilon)$ , por lo que deducimos que  $\phi(t, \varepsilon)$  es asintóticamente estable.

Del Teorema 1.1, tenemos que toda matriz fundamental de la ecuación (2.41) se puede escribir como  $\Phi(t, \varepsilon) = P(t, \varepsilon)e^{\varepsilon Ht}$ , donde los valores propios de la matriz  $\varepsilon H$  corresponde a los exponentes característicos de la ecuación (2.41). Considerando el cambio de variable  $z = P(t, \varepsilon)v$ , tenemos que la ecuación (2.40) se transforma en

$$v' = \varepsilon^2 H v + O(v^2).$$

Aplicando el Teorema 2.3, considerando que si  $Re(\lambda_j) > 0$  para al menos uno de los exponentes característicos, entonces la solución trivial  $v = 0$  de (2.40) es inestable. La solución trivial  $v = 0$  corresponde a la solución trivial  $z = 0$  y ésta corresponde a la solución  $x = \phi(t, \varepsilon)$ , por lo que podemos concluir que la solución es inestable. Así hemos concluido la demostración del teorema.  $\square$

Para concluir este capítulo 2 presentamos dos ejemplos de sistemas hamiltonianos donde la existencia de soluciones periódicas se obtiene a partir de la teoría de promedio de segundo orden. El primer ejemplo fue estudiado por Jiménez y Llibre en [39], para un potencial polinomial de grado tres y el segundo fue estudiado por Carrasco, D., Uribe M., Vidal C. en [13] para un potencial polinomial de grado cuatro.

**Ejemplo 2.3 (El Hamiltoniano de Hénon-Heiles)** Consideremos la función Hamiltoniana Generalizada de Hénon-Heiles

$$H = \frac{1}{2} (x^2 + y^2) + \frac{1}{2} (p_x^2 + p_y^2) + Bxy^2 + \frac{1}{3} Ax^3, \quad (2.42)$$

con  $B \neq 0$ ,  $x, y, p_x, p_y \in \mathbb{R}$ . El sistema hamiltoniano Hénon-Heiles asociado a (2.42) es

$$\begin{aligned} x' &= p_x, \\ y' &= p_y, \\ p_x' &= -x - (Ax^2 + By^2), \\ p_y' &= -y - 2Bxy, \end{aligned} \quad (2.43)$$

donde  $A, B$  son números reales, llamados parámetros del sistema. Por el Teorema del promedio de segundo orden, el resultado principal es:

en cada nivel de energía positivo  $h > 0$  bajo ciertas condiciones en los parámetros  $A$  y  $B$ , el sistema (2.43) tiene al menos una dos ó tres órbitas periódicas.

El ejemplo siguiente es una generalización del sistema Hénon Heiles Generalizado y que fue estudiado por Dante Carrasco, Marco Uribe y Claudio Vidal en [13].

**Ejemplo 2.4 (Sistema Hamiltoniano con potencial de grado 4)** Consideremos la función polinomial

$$H(x, y, p_x, p_y) = \frac{1}{2}(\sigma x^2 + y^2) + \frac{1}{2}(\sigma p_x^2 + p_y^2) + V_3(x, y) + V_4(x, y). \quad (2.44)$$

donde  $\sigma = -1, 1$  y  $V_3, V_4$  son polinomios homogéneos de grado 3 y 4 de la forma

$$V_3(x, y) = \frac{A}{3}x^3 + Bxy^2, \quad V_4(x, y) = \frac{\Lambda}{4}x^3 + \frac{m}{2}x^2y^2 + \frac{\lambda}{2}y^4.$$

El sistema hamiltoniano asociado a (2.45) es

$$\begin{aligned}x' &= p_x, \\y' &= p_y, \\p'_x &= -x - Ax^2 - By^2 - mxy^2 - x^3\Lambda, \\p'_y &= -y - 2Bxy - mx^2y - y^3\lambda,\end{aligned}\tag{2.45}$$

donde  $A, B, \Lambda, m, \lambda$  son parámetros reales del sistema. Por el teorema del promedio de segundo orden, se tiene que en cada nivel de energía positivo  $h > 0$  bajo ciertas condiciones en los parámetros el sistema (2.45) tiene al menos una, dos ó tres familias de órbitas periódicas.

## Capítulo 3

# Sistemas Hamiltonianos con dos grados de libertad y potencial de grado cinco

En este capítulo consideramos un sistema Hamiltoniano con dos grados de libertad y con función potencial polinomial de grado cinco. Como ya fue definido en el Capítulo 1 un sistema Hamiltoniano con dos grados de libertad es un sistema diferencial de la forma :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{\partial H}{\partial p_x}, & \dot{p}_x &= -\frac{\partial H}{\partial x}, \\ \dot{y} &= \frac{\partial H}{\partial p_y}, & \dot{p}_y &= -\frac{\partial H}{\partial y}, \end{aligned} \tag{3.1}$$

donde  $H : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$  es la función Hamiltoniana de (3.1),  $x, y$  son las coordenadas generalizadas y  $p_x, p_y$  son los momentos conjugados. Escribiremos para este tipo de sistema la forma estándar que nos permita utilizar la teoría del promedio, luego realizamos un estudio sobre los grados del potencial para responder a la pregunta ¿Que combinación en los términos homogéneos del potencial dan lugar a la utilización del método del promedio de primer orden y que combinación requiere utilizar el método del promedio de segundo orden?

### 3.1. Sistema hamiltoniano con potencial de grado cinco

Consideremos la función polinomial  $H$  dado por

$$H = \frac{1}{2} (x^2 + y^2) + \frac{1}{2} (p_x^2 + p_y^2) + V_3(x, y) + V_4(x, y) + V_5(x, y), \quad (3.2)$$

donde  $x, y, p_x, p_y \in \mathbb{R}$  y  $V_i(x, y)$ ,  $i = 3, 4, 5$  son polinomios homogéneos de grados 3, 4 y 5 respectivamente. El sistema diferencial hamiltoniano asociado a (3.2) es:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= p_x, \\ \dot{y} &= p_y, \\ \dot{p}_x &= -x - \frac{\partial V_3(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial V_4(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial V_5(x, y)}{\partial x}, \\ \dot{p}_y &= -y - \frac{\partial V_3(x, y)}{\partial y} - \frac{\partial V_4(x, y)}{\partial y} - \frac{\partial V_5(x, y)}{\partial y}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

El punto en el sistema (3.3) denota la derivada con respecto a la variable independiente  $t$ . Con el propósito de utilizar el método del promedio, introduzcamos un pequeño parámetro real positivo  $\varepsilon$  en el sistema (3.3) a través del cambio de coordenadas  $(x, y, p_x, p_y)$  por  $(X, Y, p_X, p_Y)$  donde  $x = \varepsilon X$ ,  $y = \varepsilon Y$ ,  $p_x = \varepsilon p_X$ ,  $p_y = \varepsilon p_Y$ . El sistema (3.3) se transforma en

$$\begin{aligned} \dot{X} &= p_X, \\ \dot{Y} &= p_Y, \\ \dot{p}_X &= -X - \varepsilon \frac{\partial V_3(X, Y)}{\partial X} - \varepsilon^2 \frac{\partial V_4(X, Y)}{\partial X} - \varepsilon^3 \frac{\partial V_5(X, Y)}{\partial X}, \\ \dot{p}_Y &= -Y - \varepsilon \frac{\partial V_3(X, Y)}{\partial Y} - \varepsilon^2 \frac{\partial V_4(X, Y)}{\partial Y} - \varepsilon^3 \frac{\partial V_5(X, Y)}{\partial Y}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Este sistema nuevamente es Hamiltoniano con función Hamiltoniana

$$K = \frac{1}{2} (X^2 + Y^2) + \frac{1}{2} (p_X^2 + p_Y^2) + \varepsilon V_3(X, Y) + \varepsilon^2 V_4(X, Y) + \varepsilon^3 V_5(X, Y), \quad (3.5)$$

donde  $K = \varepsilon^{-2} H$ .

Observe que el sistema (3.3) y el sistema transformado (3.4) son topológicamente equivalentes, es decir, tienen el mismo retrato de fase para  $\varepsilon > 0$  fijo. Además para  $\varepsilon$  suficientemente pequeño el sistema hamiltoniano (3.4) es integrable. La periodicidad

del sistema hamiltoniano es un requisito básico para utilizar el método del promedio. Introduzcamos ahora el cambio de variable  $(X, Y, p_X, p_Y) \rightarrow (r, \theta, \rho, \alpha) \in \mathbb{R}^+ \times S^1 \times \mathbb{R}^+ \times S^1$  dado por

$$X = r \cos \theta, \quad Y = \rho \cos(\theta + \alpha), \quad p_X = r \sin \theta, \quad p_Y = \rho \sin(\theta + \alpha), \quad (3.6)$$

donde  $r > 0$  y  $\rho > 0$ . La integral primera en las nuevas coordenadas para cada valor fijo  $h$  de  $K$ , es

$$h = \frac{1}{2} (r^2 + \rho^2) + \varepsilon V_3(r \cos \theta, \rho \cos(\theta + \alpha)) + \varepsilon^2 V_4(r \cos \theta, \rho \cos(\theta + \alpha)) + \varepsilon^3 V_5(r \cos \theta, \rho \cos(\theta + \alpha)). \quad (3.7)$$

Derivando (3.6) y usando las expresiones dadas en (3.4) se tiene

$$\begin{aligned} \dot{r} &= -\varepsilon \sin \theta \frac{\partial V_3(X, Y)}{\partial X} - \varepsilon^2 \sin \theta \frac{\partial V_4(X, Y)}{\partial X} - \varepsilon^3 \sin \theta \frac{\partial V_5(X, Y)}{\partial X}, \\ \dot{\theta} &= -1 - \varepsilon \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial V_3(X, Y)}{\partial X} - \varepsilon^2 \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial V_4(X, Y)}{\partial X} - \varepsilon^3 \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial V_5(X, Y)}{\partial X}, \\ \dot{\rho} &= -\varepsilon \sin(\theta + \alpha) \frac{\partial V_3(X, Y)}{\partial Y} - \varepsilon^2 \sin(\theta + \alpha) \frac{\partial V_4(X, Y)}{\partial Y} - \varepsilon^3 \sin(\theta + \alpha) \frac{\partial V_5(X, Y)}{\partial Y}, \\ \dot{\alpha} &= \varepsilon \left( \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial V_3(X, Y)}{\partial X} - \frac{\cos(\theta + \alpha)}{\rho} \frac{\partial V_3(X, Y)}{\partial Y} \right) + \varepsilon^2 \left( \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial V_4(X, Y)}{\partial X} - \frac{\cos(\theta + \alpha)}{\rho} \frac{\partial V_4(X, Y)}{\partial Y} \right) \\ &\quad - \varepsilon^3 \left( \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial V_5(X, Y)}{\partial X} - \frac{\cos(\theta + \alpha)}{\rho} \frac{\partial V_5(X, Y)}{\partial Y} \right), \quad (3.8) \end{aligned}$$

donde las derivadas parciales de los polinomios  $V_3$ ,  $V_4$  y  $V_5$  son evaluadas en el punto de coordenadas  $(r \cos \theta, \rho \cos(\theta + \alpha))$ . Además note que

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_k}{\partial r} &= \cos \theta \frac{\partial V_k}{\partial X} \\ \frac{\partial V_k}{\partial \theta} &= -r \sin \theta \frac{\partial V_k}{\partial X} - \rho \sin(\theta + \alpha) \frac{\partial V_k}{\partial Y} \\ \frac{\partial V_k}{\partial \rho} &= \cos(\theta + \alpha) \frac{\partial V_k}{\partial Y} \\ \frac{\partial V_k}{\partial \alpha} &= -\rho \sin(\theta + \alpha) \frac{\partial V_k}{\partial Y}, \quad (3.9) \end{aligned}$$

para  $k = 3, 4, 5$ . Por lo tanto (3.8) se reescribe como:

$$\begin{aligned}
\dot{r} &= \varepsilon \frac{1}{r} \left( \frac{\partial V_3}{\partial \theta} - \frac{\partial V_3}{\partial \alpha} \right) + \varepsilon^2 \frac{1}{r} \left( \frac{\partial V_4}{\partial \theta} - \frac{\partial V_4}{\partial \alpha} \right) + \varepsilon^3 \frac{1}{r} \left( \frac{\partial V_5}{\partial \theta} - \frac{\partial V_5}{\partial \alpha} \right), \\
\dot{\theta} &= -1 - \varepsilon \frac{1}{r} \frac{\partial V_3}{\partial r} - \varepsilon^2 \frac{1}{r} \frac{\partial V_4}{\partial r} - \varepsilon^3 \frac{1}{r} \frac{\partial V_5}{\partial r}, \\
\dot{\rho} &= \varepsilon \frac{1}{\rho} \frac{\partial V_3}{\partial \alpha} + \varepsilon^2 \frac{1}{\rho} \frac{\partial V_4}{\partial \alpha} + \varepsilon^3 \frac{1}{\rho} \frac{\partial V_5}{\partial \alpha}, \\
\dot{\alpha} &= \varepsilon \left( \frac{1}{r} \frac{\partial V_3}{\partial r} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial V_3}{\partial \rho} \right) + \varepsilon^2 \left( \frac{1}{r} \frac{\partial V_4}{\partial r} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial V_4}{\partial \rho} \right) + \varepsilon^3 \left( \frac{1}{r} \frac{\partial V_5}{\partial r} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial V_5}{\partial \rho} \right). \quad (3.10)
\end{aligned}$$

A partir de ahora consideremos la variable  $\theta$  como la variable independiente del sistema en lugar de la variable  $t$  y obtenemos

$$\frac{dr}{d\theta} = - \frac{\varepsilon \left( \frac{\partial V_3}{\partial \theta} - \frac{\partial V_3}{\partial \alpha} \right) + \varepsilon^2 \left( \frac{\partial V_4}{\partial \theta} - \frac{\partial V_4}{\partial \alpha} \right) + \varepsilon^3 \left( \frac{\partial V_5}{\partial \theta} - \frac{\partial V_5}{\partial \alpha} \right)}{r + \varepsilon \frac{\partial V_3}{\partial r} + \varepsilon^2 \frac{\partial V_4}{\partial r} + \varepsilon^3 \frac{\partial V_5}{\partial r}}. \quad (3.11)$$

Con el fin de escribir la parte derecha de la ecuación (3.11) en su desarrollo de Taylor alrededor de  $\varepsilon = 0$ , consideremos la función auxiliar

$$f(\varepsilon) = \frac{1}{1 + a_1 \varepsilon + a_2 \varepsilon^2 + a_3 \varepsilon^3},$$

donde  $a_1 = \frac{1}{r} \frac{\partial V_3}{\partial r}$ ,  $a_2 = \frac{1}{r} \frac{\partial V_4}{\partial r}$ ,  $a_3 = \frac{1}{r} \frac{\partial V_5}{\partial r}$ , así

$$f(\varepsilon) = \frac{1}{1 + a_1 \varepsilon + a_2 \varepsilon^2 + a_3 \varepsilon^3} = 1 - a_1 \varepsilon + (a_1^2 - a_2) \varepsilon^2 + (-a_1^3 + 2a_1 a_2 - a_3) \varepsilon^3 + O(\varepsilon^4).$$

Por tanto

$$\begin{aligned}
f(\varepsilon) &= \frac{1}{1 + \frac{1}{r} \frac{\partial V_3}{\partial r} \varepsilon + \frac{1}{r} \frac{\partial V_4}{\partial r} \varepsilon^2 + \frac{1}{r} \frac{\partial V_5}{\partial r} \varepsilon^3} = 1 - \frac{1}{r} \frac{\partial V_3}{\partial r} \varepsilon + \left( \left( \frac{1}{r} \frac{\partial V_3}{\partial r} \right)^2 - \frac{1}{r} \frac{\partial V_4}{\partial r} \right) \varepsilon^2 \\
&\quad + \left( \frac{2}{r^2} \frac{\partial V_3}{\partial r} \frac{\partial V_4}{\partial r} - \left( \frac{1}{r} \frac{\partial V_3}{\partial r} \right)^3 - \frac{1}{r} \frac{\partial V_5}{\partial r} \right) \varepsilon^3 + O(\varepsilon^4).
\end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned} r' = & -\frac{1}{r} \left( \frac{\partial V_3}{\partial \theta} - \frac{\partial V_3}{\partial \alpha} \right) \varepsilon + \frac{1}{r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial V_3}{\partial r} \left( \frac{\partial V_3}{\partial \theta} - \frac{\partial V_3}{\partial \alpha} \right) - \left( \frac{\partial V_4}{\partial \theta} - \frac{\partial V_4}{\partial \alpha} \right) \right) \varepsilon^2 + \\ & \frac{1}{r} \left[ \left( \frac{1}{r} \frac{\partial V_4}{\partial r} - \left( \frac{1}{r} \frac{\partial V_3}{\partial r} \right)^2 \right) \left( \frac{\partial V_3}{\partial \theta} - \frac{\partial V_3}{\partial \alpha} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial V_3}{\partial r} \left( \frac{\partial V_4}{\partial \theta} - \frac{\partial V_4}{\partial \alpha} \right) \right. \\ & \left. - \left( \frac{\partial V_5}{\partial \theta} - \frac{\partial V_5}{\partial \alpha} \right) \right] \varepsilon^3 + O(\varepsilon^4). \end{aligned}$$

De manera análoga, tenemos

$$\frac{d\rho}{d\theta} = -\frac{\varepsilon \frac{1}{\rho} \frac{\partial V_3}{\partial \alpha} + \varepsilon^2 \frac{1}{\rho} \frac{\partial V_4}{\partial \alpha} + \varepsilon^3 \frac{1}{\rho} \frac{\partial V_5}{\partial \alpha}}{1 + \varepsilon \frac{1}{r} \frac{\partial V_3}{\partial r} + \varepsilon^2 \frac{1}{r} \frac{\partial V_4}{\partial r} + \varepsilon^3 \frac{1}{r} \frac{\partial V_5}{\partial r}}.$$

Así

$$\begin{aligned} \rho' = & -\frac{1}{\rho} \frac{\partial V_3}{\partial r} \varepsilon + \left( \frac{1}{r\rho} \frac{\partial V_3}{\partial r} \frac{\partial V_3}{\partial \alpha} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial V_4}{\partial \alpha} \right) \varepsilon^2 + \\ & \left[ \left( \frac{1}{r} \frac{\partial V_4}{\partial r} - \left( \frac{1}{r} \frac{\partial V_3}{\partial r} \right)^2 \right) \frac{1}{\rho} \frac{\partial V_3}{\partial \alpha} + \frac{1}{r\rho} \frac{\partial V_3}{\partial r} \frac{\partial V_4}{\partial \alpha} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial V_5}{\partial \alpha} \right] \varepsilon^3 + O(\varepsilon^4). \end{aligned}$$

También

$$\frac{d\alpha}{d\theta} = -\frac{\varepsilon \left( \frac{1}{r} \frac{\partial V_3}{\partial r} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial V_3}{\partial \rho} \right) + \varepsilon^2 \left( \frac{1}{r} \frac{\partial V_4}{\partial r} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial V_4}{\partial \rho} \right) + \varepsilon^3 \left( \frac{1}{r} \frac{\partial V_5}{\partial r} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial V_5}{\partial \rho} \right)}{1 + \varepsilon \frac{1}{r} \frac{\partial V_3}{\partial r} + \varepsilon^2 \frac{1}{r} \frac{\partial V_4}{\partial r} + \varepsilon^3 \frac{1}{r} \frac{\partial V_5}{\partial r}},$$

luego

$$\begin{aligned} \alpha' = & -\left( \frac{1}{r} \frac{\partial V_3}{\partial r} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial V_3}{\partial \rho} \right) \varepsilon + \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial V_3}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial V_3}{\partial r} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial V_3}{\partial \rho} \right) - \left( \frac{1}{r} \frac{\partial V_4}{\partial r} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial V_4}{\partial \rho} \right) \right] \varepsilon^2 + \\ & \left[ \left( \frac{1}{r} \frac{\partial V_4}{\partial r} - \left( \frac{1}{r} \frac{\partial V_3}{\partial r} \right)^2 \right) \left( \frac{1}{r} \frac{\partial V_3}{\partial r} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial V_3}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial V_3}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial V_4}{\partial r} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial V_4}{\partial \rho} \right) \right. \\ & \left. - \left( \frac{1}{r} \frac{\partial V_5}{\partial r} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial V_5}{\partial \rho} \right) \right] \varepsilon^3 + O(\varepsilon^4). \end{aligned}$$

Así el nuevo sistema es:

$$\begin{aligned}
r' &= -\frac{1}{r} \left( \frac{\partial V_3}{\partial \theta} - \frac{\partial V_3}{\partial \alpha} \right) \varepsilon + \frac{1}{r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial V_3}{\partial r} \left( \frac{\partial V_3}{\partial \theta} - \frac{\partial V_3}{\partial \alpha} \right) - \left( \frac{\partial V_4}{\partial \theta} - \frac{\partial V_4}{\partial \alpha} \right) \right) \varepsilon^2 + \\
&\quad \frac{1}{r} \left[ \left( \frac{1}{r} \frac{\partial V_4}{\partial r} - \left( \frac{1}{r} \frac{\partial V_3}{\partial r} \right)^2 \right) \left( \frac{\partial V_3}{\partial \theta} - \frac{\partial V_3}{\partial \alpha} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial V_3}{\partial r} \left( \frac{\partial V_4}{\partial \theta} - \frac{\partial V_4}{\partial \alpha} \right) \right. \\
&\quad \left. - \left( \frac{\partial V_5}{\partial \theta} - \frac{\partial V_5}{\partial \alpha} \right) \right] \varepsilon^3 + O(\varepsilon^4), \\
\rho' &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial V_3}{\partial r} \varepsilon + \left( \frac{1}{r\rho} \frac{\partial V_3}{\partial r} \frac{\partial V_3}{\partial \alpha} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial V_4}{\partial \alpha} \right) \varepsilon^2 + \left[ \left( \frac{1}{r} \frac{\partial V_4}{\partial r} - \left( \frac{1}{r} \frac{\partial V_3}{\partial r} \right)^2 \right) \frac{1}{\rho} \frac{\partial V_3}{\partial \alpha} \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{r\rho} \frac{\partial V_3}{\partial r} \frac{\partial V_4}{\partial \alpha} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial V_5}{\partial \alpha} \right] \varepsilon^3 + O(\varepsilon^4), \\
\alpha' &= -\left( \frac{1}{r} \frac{\partial V_3}{\partial r} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial V_3}{\partial \rho} \right) \varepsilon + \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial V_3}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial V_3}{\partial r} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial V_3}{\partial \rho} \right) - \left( \frac{1}{r} \frac{\partial V_4}{\partial r} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial V_4}{\partial \rho} \right) \right] \varepsilon^2 + \\
&\quad \left[ \left( \frac{1}{r} \frac{\partial V_4}{\partial r} - \left( \frac{1}{r} \frac{\partial V_3}{\partial r} \right)^2 \right) \left( \frac{1}{r} \frac{\partial V_3}{\partial r} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial V_3}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial V_3}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial V_4}{\partial r} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial V_4}{\partial \rho} \right) \right. \\
&\quad \left. - \left( \frac{1}{r} \frac{\partial V_5}{\partial r} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial V_5}{\partial \rho} \right) \right] \varepsilon^3 + O(\varepsilon^4), \tag{3.12}
\end{aligned}$$

donde la prima (') significa la derivada con respecto a la variable  $\theta$ . Para utilizar el método del promedio, escribamos el desarrollo de series de Taylor la función  $\rho$  respecto de la variable  $\varepsilon$ , así  $\rho$  es:

$$\rho(\varepsilon) = \rho(0) + \rho'(0)\varepsilon + \frac{1}{2}\rho''(0)\varepsilon^2 + O(\varepsilon^3). \tag{3.13}$$

De (3.7) para  $\varepsilon = 0$  tenemos que

$$\rho(0) = \sqrt{2h - r^2}. \tag{3.14}$$

Derivando (3.7) con respecto a  $\varepsilon$  tenemos:

$$\begin{aligned}
0 &= \rho(0)\rho'(0) + V_3(r \cos \theta, \rho \cos(\theta + \alpha)) + \varepsilon \frac{\partial V_3}{\partial Y} \rho'(0) \cos(\theta + \alpha) + \\
&\quad 2\varepsilon V_4(r \cos \theta, \rho \cos(\theta + \alpha)) + \varepsilon^2 \frac{\partial V_4}{\partial Y} \rho'(0) \cos(\theta + \alpha) + \\
&\quad 3\varepsilon^2 V_5(r \cos \theta, \rho \cos(\theta + \alpha)) + \varepsilon^3 \frac{\partial V_5}{\partial Y} \rho'(0) \cos(\theta + \alpha),
\end{aligned}$$

evaluando en  $\varepsilon = 0$ , resulta

$$\rho'(0) = -\frac{V_3(r \cos \theta, \sqrt{2h - r^2} \cos(\theta + \alpha))}{\sqrt{2h - r^2}}. \quad (3.15)$$

Derivando una vez más (3.7) y evaluando en  $\varepsilon = 0$  tenemos

$$\rho''(0) = \frac{2}{(2h - r^2)^{3/2}} \left( V_4(r \cos \theta, \rho \cos(\theta + \alpha)) (r^2 - 2h) - (V_3(r \cos \theta, \rho \cos(\theta + \alpha)))^2 \right). \quad (3.16)$$

Así por (3.14), (3.15) y (3.16) la función  $\rho$  tiene la forma

$$\rho(\varepsilon) = \sqrt{2h - r^2} - \frac{V_3(r \cos \theta, \rho \cos(\theta + \alpha))}{\sqrt{2h - r^2}} \varepsilon + \frac{1}{2} \rho''(0) \varepsilon^2 + O(\varepsilon^3). \quad (3.17)$$

Como  $V_3$  depende de las variables  $(r, \theta, \rho, \alpha)$ , el desarrollo de Taylor de  $V_3$  alrededor de  $\varepsilon = 0$  es

$$V_3 = V_3(0) + \frac{\partial V_3(0)}{\partial \rho} \underbrace{\frac{\partial \rho}{\partial \varepsilon}}_{\rho'(0)} \varepsilon + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V_3(0)}{\partial \rho^2} \underbrace{\frac{\partial \rho}{\partial \varepsilon}}_{\rho'(0)} \varepsilon^2 + O(\varepsilon^3).$$

Escribiendo el desarrollo de Taylor de las derivadas parciales de  $V_3$  respecto de las variables  $r, \theta, \rho$  y  $\alpha$  alrededor de  $\varepsilon = 0$  tenemos

$$\frac{\partial V_3}{\partial r} = \frac{\partial V_3}{\partial r} + \frac{\partial^2 V_3}{\partial r \partial \rho} \rho'(0) \varepsilon + \frac{1}{2!} \frac{\partial^3 V_3}{\partial r \partial \rho^2} \rho'(0) \varepsilon^2 + O(\varepsilon^3),$$

$$\frac{\partial V_3}{\partial \theta} = \frac{\partial V_3}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 V_3}{\partial \theta \partial \rho} \rho'(0) \varepsilon + \frac{1}{2!} \frac{\partial^3 V_3}{\partial \theta \partial \rho^2} \rho'(0) \varepsilon^2 + O(\varepsilon^3),$$

$$\frac{\partial V_3}{\partial \rho} = \frac{\partial V_3}{\partial \rho} + \frac{\partial^2 V_3}{\partial \rho^2} \rho'(0) \varepsilon + \frac{1}{2!} \frac{\partial^3 V_3}{\partial \rho^3} \rho'(0) \varepsilon^2 + O(\varepsilon^3),$$

$$\frac{\partial V_3}{\partial \alpha} = \frac{\partial V_3}{\partial \alpha} + \frac{\partial^2 V_3}{\partial \alpha \partial \rho} \rho'(0) \varepsilon + \frac{1}{2!} \frac{\partial^3 V_3}{\partial \alpha \partial \rho^2} \rho'(0) \varepsilon^2 + O(\varepsilon^3).$$

La función  $\frac{1}{\rho(\varepsilon)}$  en desarrollo de Taylor alrededor de  $\varepsilon = 0$  es

$$\frac{1}{\rho(\varepsilon)} = \frac{1}{\rho(0)} - \frac{\rho'(0)}{\rho^2(0)} \varepsilon + \left[ \frac{\rho'^2(0)}{\rho^3(0)} - \frac{\rho''(0)}{2\rho^2(0)} \right] \varepsilon^2 + O(\varepsilon^3).$$

Así

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho(\varepsilon)} \frac{\partial V_3}{\partial \rho} &= \frac{1}{\rho(0)} \frac{\partial V_3}{\partial \rho} + \left[ \frac{\rho'(0)}{\rho(0)} \frac{\partial^2 V_3}{\partial \rho^2} - \frac{\rho'(0)}{\rho^2(0)} \frac{\partial V_3}{\partial \rho} \right] \varepsilon + \left[ \frac{\rho'(0)}{2\rho(0)} \frac{\partial^3 V_3}{\partial \rho^3} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\rho'(0)^2}{\rho^2(0)} \frac{\partial^2 V_3}{\partial \rho^2} + \frac{\partial V_3}{\partial \rho} \left( \frac{\rho'^2(0)}{\rho^3(0)} - \frac{\rho''(0)}{2\rho^2(0)} \right) \right] \varepsilon^2 + O(\varepsilon^3). \end{aligned}$$

Por otro lado

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \left( \frac{\partial V_3}{\partial \theta} - \frac{\partial V_3}{\partial \alpha} \right) &= \frac{1}{r} \left( \frac{\partial V_3}{\partial \theta} - \frac{\partial V_3}{\partial \alpha} \right) + \frac{\rho'(0)}{r} \left( \frac{\partial^2 V_3}{\partial \rho \partial \theta} - \frac{\partial^2 V_3}{\partial \rho \partial \alpha} \right) \varepsilon \\ &\quad + \frac{1}{2} \frac{\rho'(0)}{r} \left( \frac{\partial^3 V_3}{\partial \rho^2 \partial \theta} - \frac{\partial^3 V_3}{\partial \rho^2 \partial \alpha} \right) \varepsilon^2, \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial V_3}{\partial r} - \frac{1}{\rho(\varepsilon)} \frac{\partial V_3}{\partial \rho} \right) &= \left( \frac{1}{r} \frac{\partial V_3}{\partial r} - \frac{1}{\rho(0)} \frac{\partial V_3}{\partial \rho} \right) + \left[ \frac{\rho'(0)}{r} \frac{\partial^2 V_3}{\partial \rho \partial r} - \left( \frac{\rho'(0)}{\rho(0)} \frac{\partial^2 V_3}{\partial \rho^2} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{\rho'(0)}{\rho^2(0)} \frac{\partial V_3}{\partial \rho} \right) \right] \varepsilon + \left[ \frac{1}{2} \frac{\rho'(0)}{r} \frac{\partial^3 V_3}{\partial \rho^2 \partial r} - \left( \frac{\rho'(0)}{2\rho(0)} \frac{\partial^3 V_3}{\partial \rho^3} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{\rho'^2(0)}{\rho^2(0)} \frac{\partial^2 V_3}{\partial \rho^2} + \frac{\partial V_3}{\partial \rho} \left( \frac{\rho'^2(0)}{\rho^3} - \frac{\rho''(0)}{2\rho'^2(0)} \right) \right) \right] \varepsilon^2. \end{aligned}$$

Entonces sustituyendo estos desarrollos en la ecuación (3.12), obtenemos las dos ecuaciones diferenciales siguientes

$$\begin{aligned} r' &= -\frac{1}{r} \left( \frac{\partial V_3}{\partial \theta} - \frac{\partial V_3}{\partial \alpha} \right) \varepsilon + \frac{1}{r} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial V_3}{\partial r} \left( \frac{\partial V_3}{\partial \theta} - \frac{\partial V_3}{\partial \alpha} \right) - \rho'(0) \left( \frac{\partial^2 V_3}{\partial \rho \partial \theta} - \frac{\partial^2 V_3}{\partial \rho \partial \alpha} \right) \right. \\ &\quad \left. - \left( \frac{\partial V_4}{\partial \theta} - \frac{\partial V_4}{\partial \alpha} \right) \right] \varepsilon^2 + \frac{1}{r} \left[ \rho'(0) \left( \left( \frac{\partial^2 V_3}{\partial \rho \partial \theta} - \frac{\partial^2 V_3}{\partial \rho \partial \alpha} \right) - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^3 V_3}{\partial \rho^2 \partial \theta} - \frac{\partial^3 V_3}{\partial \rho^2 \partial \alpha} \right) \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{r} \frac{\partial V_3}{\partial r} \left( \frac{\partial V_4}{\partial \theta} - \frac{\partial V_4}{\partial \alpha} \right) - \left( \frac{\partial V_5}{\partial \theta} - \frac{\partial V_5}{\partial \alpha} \right) \right] \varepsilon^3 + O(\varepsilon^4), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha' &= -\frac{1}{r} \left( \frac{\partial V_3}{\partial r} - \frac{r}{\rho(0)} \frac{\partial V_3}{\partial \rho} \right) \varepsilon \\ &\quad + \left[ -\frac{\rho'(0)}{r} \frac{\partial^2 V_3}{\partial \rho \partial r} + \left( \frac{\rho'(0)}{\rho(0)} \frac{\partial^2 V_3}{\partial \rho^2} - \frac{\rho'(0)}{\rho^2(0)} \frac{\partial V_3}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial V_3}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial V_3}{\partial r} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial V_3}{\partial \rho} \right) \right] \varepsilon^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \left( \frac{1}{r} \frac{\partial V_4}{\partial r} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial V_4}{\partial \rho} \right) \Big] \varepsilon^2 + \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial V_3}{\partial r} \left( \frac{\rho'(0)}{r} \frac{\partial^2 V_3}{\partial \rho \partial r} - \left[ \frac{\rho'(0)}{\rho(0)} \frac{\partial^2 V_3}{\partial \rho^2} - \frac{\rho'(0)}{\rho^2(0)} \frac{\partial V_3}{\partial \rho} \right] \right) \right. \\
& - \left. \left( \frac{1}{2} \frac{\partial^3 V_3}{\partial \rho^2 \partial r} \rho'(0) - \left( \left( \frac{1}{2} \frac{\rho'(0)}{\rho(0)} - \frac{\rho'^2(0)}{\rho^2(0)} \right) \frac{\partial^3 V_3}{\partial \rho^3} + \left( \frac{\rho'^2(0)}{\rho^3(0)} - \frac{\rho''(0)}{2\rho^2(0)} \right) \frac{\partial V_3}{\partial \rho} \right) \right) \right. \\
& + \left. \left( \frac{1}{r} \frac{\partial V_4}{\partial r} - \left( \frac{1}{r} \frac{\partial V_3}{\partial r} \right)^2 \right) \left( \frac{1}{r} \frac{\partial V_3}{\partial r} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial V_3}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial V_3}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial V_4}{\partial r} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial V_4}{\partial \rho} \right) \right. \\
& \quad \left. - \left( \frac{1}{r} \frac{\partial V_5}{\partial r} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial V_5}{\partial \rho} \right) \Big] \varepsilon^3 + O(\varepsilon^4). \tag{3.18}
\end{aligned}$$

El sistema (3.18) ahora está en la forma estándar que permite utilizar el método del promedio, es decir, el sistema (3.18) tiene la forma

$$\begin{aligned}
r' &= F_{11}\varepsilon + F_{21}\varepsilon^2 + F_{31}\varepsilon^3 + O(\varepsilon^4), \\
\alpha' &= F_{12}\varepsilon + F_{22}\varepsilon^2 + F_{32}\varepsilon^3 + O(\varepsilon^4), \tag{3.19}
\end{aligned}$$

que en su forma matricial es

$$\begin{pmatrix} r' \\ \alpha' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} F_{21} \\ F_{22} \end{pmatrix}}_{F_1} \varepsilon + \underbrace{\begin{pmatrix} F_{21} \\ F_{22} \end{pmatrix}}_{F_2} \varepsilon^2 + \underbrace{\begin{pmatrix} F_{31} \\ F_{32} \end{pmatrix}}_{F_3} \varepsilon^3 + O(\varepsilon^4),$$

donde las funciones  $F_1 = (F_{11}, F_{12})$ ,  $F_2 = (F_{21}, F_{22})$  y  $F_3 = (F_{31}, F_{32})$  son

$$\begin{aligned}
F_{11} &= -\frac{1}{r} \left( \frac{\partial V_3}{\partial \theta} - \frac{\partial V_3}{\partial \alpha} \right), \\
F_{12} &= -\frac{1}{r} \left( \frac{\partial V_3}{\partial r} - \frac{r}{\rho(0)} \frac{\partial V_3}{\partial \rho} \right), \\
F_{21} &= \frac{1}{r} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial V_3}{\partial r} \left( \frac{\partial V_3}{\partial \theta} - \frac{\partial V_3}{\partial \alpha} \right) - \rho'(0) \left( \frac{\partial^2 V_3}{\partial \rho \partial \theta} - \frac{\partial^2 V_3}{\partial \rho \partial \alpha} \right) - \left( \frac{\partial V_4}{\partial \theta} - \frac{\partial V_4}{\partial \alpha} \right) \right],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_{22} &= \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial V_3}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial V_3}{\partial r} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial V_3}{\partial \rho} \right) - \left( \frac{\rho'(0)}{r} \frac{\partial^2 V_3}{\partial \rho \partial r} - \left( \frac{\rho'(0)}{\rho(0)} \frac{\partial^2 V_3}{\partial \rho^2} - \frac{\rho'(0)}{\rho^2(0)} \frac{\partial V_3}{\partial \rho} \right) \right) \right. \\
&\quad \left. - \left( \frac{1}{r} \frac{\partial V_4}{\partial r} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial V_4}{\partial \rho} \right) \right], \\
F_{31} &= \frac{1}{r} \left[ \rho'(0) \left( \left( \frac{\partial^2 V_3}{\partial \rho \partial \theta} - \frac{\partial^2 V_3}{\partial \rho \partial \alpha} \right) - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^3 V_3}{\partial \rho^2 \partial \theta} - \frac{\partial^3 V_3}{\partial \rho^2 \partial \alpha} \right) \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial V_3}{\partial r} \left( \frac{\partial V_4}{\partial \theta} - \frac{\partial V_4}{\partial \alpha} \right) \right. \\
&\quad \left. - \left( \frac{\partial V_5}{\partial \theta} - \frac{\partial V_5}{\partial \alpha} \right) \right], \\
F_{32} &= \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial V_3}{\partial r} \left( \frac{\rho'(0)}{r} \frac{\partial^2 V_3}{\partial \rho \partial r} - \left[ \frac{\rho'(0)}{\rho(0)} \frac{\partial^2 V_3}{\partial \rho^2} - \frac{\rho'(0)}{\rho^2(0)} \frac{\partial V_3}{\partial \rho} \right] \right) \right. \\
&\quad - \left( \frac{1}{2} \frac{\partial^3 V_3}{\partial \rho^2 \partial r} \rho'(0) - \left( \left( \frac{1}{2} \frac{\rho'(0)}{\rho(0)} - \frac{\rho'^2(0)}{\rho^2(0)} \right) \frac{\partial^3 V_3}{\partial \rho^3} + \left( \frac{\rho'^2(0)}{\rho^3(0)} - \frac{\rho''(0)}{2\rho^2(0)} \right) \frac{\partial V_3}{\partial \rho} \right) \right) \\
&\quad + \left( \frac{1}{r} \frac{\partial V_4}{\partial r} - \left( \frac{1}{r} \frac{\partial V_3}{\partial r} \right)^2 \right) \left( \frac{1}{r} \frac{\partial V_3}{\partial r} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial V_3}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial V_3}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial V_4}{\partial r} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial V_4}{\partial \rho} \right) \\
&\quad \left. - \left( \frac{1}{r} \frac{\partial V_5}{\partial r} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial V_5}{\partial \rho} \right) \right]. \tag{3.20}
\end{aligned}$$

La función promedio asociada a (3.18) viene dada por  $(f_1 + \varepsilon f_2)$  donde

$$f_1(r, \alpha) := (f_{11}, f_{12}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (F_{11}, F_{12}) d\theta,$$

y

$$\begin{aligned}
f_2(r, \alpha) &:= (f_{21}, f_{22}) \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[ D_{r,\alpha} F_1(\theta, \alpha, r) d\theta \int_0^\theta F_1(t, r, \alpha) dt + F_2(\theta, \alpha, r) \right] d\theta,
\end{aligned}$$

con  $D_{r,\alpha} F_1(\theta, \alpha, r)$  la matriz Jacobiana de  $F_1$  definida como:

$$D_{r,\alpha} F_1(\theta, \alpha, r) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_{11}}{\partial r} & \frac{\partial F_{11}}{\partial \alpha} \\ \frac{\partial F_{12}}{\partial r} & \frac{\partial F_{12}}{\partial \alpha} \end{pmatrix}.$$

**Observación 3.1** Si la función  $f_1$  no es idénticamente nula, entonces los ceros  $f_1 + \varepsilon f_2$  corresponden a los ceros de  $f_1$  para  $\varepsilon$  suficientemente pequeño, en este caso las soluciones periódicas del sistema (3.3) son obtenidas a través del promedio de primer orden. Si la función  $f_1$  es idénticamente nula, y  $f_2$  no lo es, entonces los ceros de  $f_1 + \varepsilon f_2$  corresponden a los ceros de  $f_2$ , en este caso las soluciones periódicas del sistema (3.3) son obtenidas a través del promedio de segundo orden.

En [27] se estudian sistemas diferenciales donde se considera el método del promedio de orden mayor a dos.

## 3.2. Promedio de primer y segundo orden

En esta sección consideramos nuevamente el sistemas hamiltoniano asociado a la función hamiltoniana dada en (3.2). Se consideran varios casos donde la combinación en el grado del potencial puede determinar la utilización del método del promedio de primer o segundo orden.

**Proposición 1** Si  $V_3(x, y) = ax^3 + bxy^2 + cy^3$  con  $a, b, c$  parámetros reales,  $V_4 \equiv 0$  y  $V_5 \equiv 0$ , la función hamiltoniana es dada por

$$H = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2) + V_3(x, y). \quad (3.21)$$

Entonces el método del promedio de segundo orden da información sobre soluciones periódicas del sistema hamiltoniano asociado a (3.21).

**Demostración.** Si  $V_3(x, y) = ax^3 + bxy^2 + cy^3$ , entonces el sistema diferencial asociado a (3.21) en su forma estándar es

$$\begin{aligned} r' &= F_{11}\varepsilon + F_{21}\varepsilon^2 + O(\varepsilon^3), \\ \alpha' &= F_{12}\varepsilon + F_{22}\varepsilon^2 + O(\varepsilon^3), \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} F_{11} &= \sin(\theta) (3ar^2 \cos^2(\theta) + b(2h - r^2) \cos^2(\alpha + \theta)), \\ F_{12} &= -3 \cos^3(\theta) ar + \frac{1}{r} b (3r^2 - 2h) \cos(\theta) \cos^2(\alpha + \theta) + 3c\sqrt{2h - r^2} \cos^3(\alpha + \theta). \end{aligned}$$

En este caso la función promedio asociado a (3.21) es  $f_1 + \varepsilon f_2$  donde

$$f_1(r, \alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (F_{11}, F_{12}) d\theta = (0, 0),$$

y  $f_2(r, \alpha) = (f_{21}, f_{22})$  con

$$\begin{aligned} f_{21} &= \frac{1}{4} b \sin(\alpha) (2h - r^2) \left( 5c\sqrt{2h - r^2} - 2r(a - 2b) \cos(\alpha) \right), \\ f_{22} &= \frac{1}{12} \left( 45a^2 r^2 + 6b((a - 2b) \cos(2\alpha) (r^2 - h) + \frac{1}{r\sqrt{2h - r^2}} 5c \cos(\alpha) (2h^2 \right. \\ &\quad \left. - 5hr^2 + 2r^4)) + 36ab(h - r^2) + b^2(- (2h + 3r^2)) + 45c^2 (r^2 - 2h) \right). \end{aligned}$$

Observe que el método del promedio de primer orden no se puede aplicar ya que  $f_1$  es idénticamente nulo, por tanto las soluciones periódicas son obtenidas vía promedio de segundo orden.  $\square$

**Proposición 2** Si  $V_3 \equiv 0$ ,  $V_4(x, y) = ax^4 + bx^2y^2 + cy^4$ , con  $a, b, c$ , parámetros reales y  $V_5 \equiv 0$ , la función Hamiltoniana es dada por

$$H = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2) + V_4(x, y). \quad (3.22)$$

Entonces el método del promedio de primer orden da información sobre soluciones periódicas del sistema hamiltoniano asociado a (3.22).

**Demostración.** Si  $V_4(x, y) = ax^4 + bx^2y^2 + cy^4$ , entonces el sistema diferencial asociado a (3.22) en su forma estándar es

$$\begin{aligned} \dot{r} &= F_{21}\varepsilon^2 + O(\varepsilon^3), \\ \dot{\alpha} &= F_{22}\varepsilon^2 + O(\varepsilon^3), \end{aligned}$$

haciendo una reescalación en el parámetro  $\varepsilon$ , se tiene

$$\begin{aligned} r' &= F_{21}\varepsilon + O(\varepsilon^2), \\ \alpha' &= F_{22}\varepsilon + O(\varepsilon^2), \end{aligned}$$

donde  $r' = \varepsilon^{-1}\dot{r}$ . En este caso la función promedio  $f_1$  asociada a (3.22) es no nula, pues

$$\begin{aligned} f_1(r, \alpha) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (F_{21}, F_{22}) d\theta = \left( \frac{1}{4} br \sin(2\alpha) (r^2 - 2h), \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{2} (-3r^2(a + c) + b \cos(2\alpha) (r^2 - h) + 2b(r^2 - h) + 6ch) \right). \end{aligned}$$

Por tanto las soluciones periódicas son obtenidas vía promedio de primer orden. Para más detalles ver E. Lacomba y Llibre J. en [16].  $\square$

**Proposición 3** Si  $V_3 \equiv 0$  y  $V_4 \equiv 0$ ,  $V_5(x, y) = ax^5 + bx^3y^2 + cxy^4$  con  $a, b, c$ , parámetros reales, la función hamiltoniana es dada por

$$H = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2) + V_5(x, y). \quad (3.23)$$

Entonces el método del promedio de segundo orden da información sobre soluciones periódicas del sistema hamiltoniano asociado a (3.23).

**Demostración.** Si  $V_5(x, y) = ax^5 + bx^3y^2 + cxy^4$ , entonces el sistema diferencial (3.18) en su forma estandar es

$$\begin{aligned} \dot{r} &= F_{31}\varepsilon^3 + O(\varepsilon^4), \\ \dot{\alpha} &= F_{32}\varepsilon^3 + O(\varepsilon^4), \end{aligned}$$

haciendo una reescalación en el parámetro  $\varepsilon$ , se tiene

$$\begin{aligned} r' &= F_{31}\varepsilon + F_{41}\varepsilon^2 + O(\varepsilon^3), \\ \alpha' &= F_{32}\varepsilon + F_{42}\varepsilon^2 + O(\varepsilon^3), \end{aligned} \quad (3.24)$$

donde  $r' = \varepsilon^{-2}\dot{r}$ , y

$$\begin{aligned} F_{31} &= \sin(\theta) \left( 5ar^4 \cos^4(\theta) - 3br^2 (r^2 - 2h) \cos^2(\theta) \cos^2(\alpha + \theta) \right. \\ &\quad \left. + c (r^2 - 2h)^2 \cos^4(\alpha + \theta) \right), \\ F_{32} &= -5ar^3 \cos^5(\theta) + br (5r^2 - 6h) \cos^3(\theta) \cos^2(\alpha + \theta) \\ &\quad + \frac{1}{r} c (-4h^2 + 12hr^2 - 5r^4) \cos(\theta) \cos^4(\alpha + \theta). \end{aligned}$$

Observe que la función promedio asociado a (3.23) es  $f_1 + \varepsilon f_2$  donde  $f_1$  es nula, pues

$$f_1(r, \alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (F_{31}, F_{32}) d\theta = (0, 0),$$

y  $f_2(r, \alpha) \neq 0$ . Por tanto el promedio de primer orden no se puede aplicar, luego las soluciones periódicas son obtenidas vía promedio de segundo orden. Los detalles de este cálculo pueden ser vistos en el capítulo 4 de esta tesis.  $\square$

**Observación 3.2** El sistema diferencial (3.19) generaliza el sistema (3.24), es decir el sistema (3.19) contiene al sistema hamiltoniano estudiado por Alberto Castro Ortega en [2].

**Proposición 4** Si  $V_3(x, y) = ax^3 + bxy^2 + cy^3$ ,  $V_4(x, y) = dx^4 + ex^2y^2 + fy^4$  y  $V_5 \equiv 0$  con  $a, b, c, d, e, f$ , parámetros reales, la función Hamiltoniana es dada por

$$H = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2) + V_3(x, y) + V_4(x, y). \quad (3.25)$$

Entonces el método del promedio de segundo orden da información sobre soluciones periódicas del sistema hamiltoniano asociado a (3.25).

**Demostración.** Si  $V_3(x, y) = ax^3 + bxy^2 + cy^3$ , y  $V_4(x, y) = dx^4 + ex^2y^2 + fy^4$ , entonces el sistema diferencial asociado a (3.25) en su forma estándar es

$$\begin{aligned} r' &= F_{11}\varepsilon + F_{21}\varepsilon^2 + O(\varepsilon^3), \\ \alpha' &= F_{12}\varepsilon + F_{22}\varepsilon^2 + O(\varepsilon^3), \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} F_{11} &= \sin(\theta) (3ar^2 \cos^2(\theta) + b(2h - r^2) \cos^2(\alpha + \theta)), \\ F_{12} &= -3 \cos^3(\theta)ar + \frac{1}{r}b(3r^2 - 2h) \cos(\theta) \cos^2(\alpha + \theta) + 3c\sqrt{2h - r^2} \cos^3(\alpha + \theta). \end{aligned}$$

En este caso la función promedio asociado a (3.25) es  $f_1 + \varepsilon f_2$  donde

$$f_1(r, \alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (F_{11}, F_{12})d\theta = (0, 0).$$

y  $f_2(r, \alpha) = (f_{21}, f_{22})$  con

$$\begin{aligned} f_{21} &= \frac{1}{4} \sin(\alpha) (2h - r^2) \left( 5bc\sqrt{2h - r^2} - 2r \cos(\alpha)(b(a - 2b) + e) \right), \\ f_{22} &= \frac{1}{12} \left( -3r^2(-15a^2 + 12ab + b^2 - 15c^2 + 6d - 4e + 6f) - 2h(-18ab + b^2 + 45c^2 \right. \\ &\quad \left. + 6e - 18f) + 6 \cos(2\alpha) (r^2 - h) (b(a - 2b) + e) + \frac{1}{r\sqrt{2h - r^2}} 30bc \cos(\alpha) \right. \\ &\quad \left. (2h^2 - 5hr^2 + 2r^4) \right). \end{aligned}$$

Note que  $f_1 \equiv 0$ . Por tanto el método del promedio de primer orden no se puede aplicar, luego las soluciones periódicas son obtenidas vía promedio de segundo orden.  $\square$

**Proposición 5** Si  $V_3 = 0$ ,  $V_4(x, y) = ax^4 + bx^2y^2 + cy^4$ , y  $V_5(x, y) = dx^5 + ex^3y^2 + fxy^4$  con  $a, b, c, d, e, f$ , parámetros reales, la función Hamiltoniana es dada por

$$H = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2) + V_4(x, y) + V_5(x, y). \quad (3.26)$$

Entonces el método del promedio de primer orden da información sobre soluciones periódicas del sistema hamiltoniano asociado a (3.26).

**Demostración.** Si  $V_4(x, y) = ax^4 + bx^2y^2 + cy^4$ , y  $V_5(x, y) = dx^5 + ex^3y^2 + fxy^4$ , el sistema diferencial (3.18) en su forma estándar es

$$\begin{aligned} \dot{r} &= F_{21}\varepsilon^2 + F_{31}\varepsilon^3 + O(\varepsilon^4), \\ \dot{\alpha} &= F_{22}\varepsilon^2 + F_{32}\varepsilon^3 + O(\varepsilon^4), \end{aligned}$$

haciendo una reescalación en el parámetro  $\varepsilon$ , se tiene

$$\begin{aligned} r' &= F_{21}\varepsilon + F_{21}\varepsilon^2 + O(\varepsilon^3), \\ \alpha' &= F_{22}\varepsilon + F_{22}\varepsilon^2 + O(\varepsilon^3), \end{aligned}$$

donde  $r' = \varepsilon^{-1}\dot{r}$ , y

$$\begin{aligned} F_{21} &= 2r \sin(\theta) \cos(\theta) (2ar^2 \cos^2(\theta) + b(2h - r^2) \cos^2(\alpha + \theta)), \\ F_{22} &= -4(ar^2 \cos^4(\theta) + b(h - r^2) \cos^2(\theta) \cos^2(\alpha + \theta) + c(r^2 - 2h) \cos^4(\alpha + \theta)). \end{aligned}$$

Observe que la función promedio  $f_1$  asociado a (3.26) es no nula, pues

$$f_1(r, \alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (F_{21}, F_{22}) d\theta = (0, 0).$$

Por tanto las soluciones periódicas son obtenidas vía promedio de primer orden como en la proposición 2 ya que las soluciones obtenidas del sistema hamiltoniano asociado a (3.26) sólo dependen de los parámetros  $a, b, c$ .  $\square$

**Proposición 6** Si  $V_3(x, y) = ax^3 + bxy^2 + cy^3$ ,  $V_4 = 0$  y  $V_5(x, y) = dx^5 + ex^3y^2 + fxy^4$ , con  $a, b, c, d, e, f$ , parámetros reales, la función hamiltoniana es dada por

$$H = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2) + V_3(x, y) + V_5(x, y). \quad (3.27)$$

Entonces el método del promedio de segundo orden da información sobre soluciones periódicas del sistema hamiltoniano asociado a (3.27).

**Demostración.** Si  $V_3(x, y) = ax^3 + bxy^2 + cy^3$  y  $V_5(x, y) = dx^5 + ex^3y^2 + fxy^4$ , el sistema diferencial (3.27) en su forma estándar es

$$\begin{aligned} r' &= F_{11}\varepsilon + F_{21}\varepsilon^2 + O(\varepsilon^3), \\ \alpha' &= F_{12}\varepsilon + F_{22}\varepsilon^2 + O(\varepsilon^3), \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} F_{11} &= \sin(\theta) \left( 3ar^2 \cos^2(\theta) + b(2h - r^2) \cos^2(\alpha + \theta) \right), \\ F_{12} &= -3 \cos^3(\theta) ar + \frac{1}{r} b(3r^2 - 2h) \cos(\theta) \cos^2(\alpha + \theta) + 3c\sqrt{2h - r^2} \cos^3(\alpha + \theta). \end{aligned}$$

En este caso la función promedio asociado a (3.27) es  $f_1 + \varepsilon f_2$  donde

$$f_1(r, \alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (F_{11}, F_{12}) d\theta = (0, 0).$$

y  $f_2(r, \alpha) = (f_{21}, f_{22})$  con

$$\begin{aligned} f_{21} &= \frac{1}{4} b \sin(\alpha) (2h - r^2) \left( 5c\sqrt{2h - r^2} - 2r(a - 2b) \cos(\alpha) \right), \\ f_{22} &= \frac{1}{12} \left( 45a^2r^2 + 6b((a - 2b) \cos(2\alpha) (r^2 - h) + \frac{1}{r\sqrt{2h - r^2}} 5c \cos(\alpha) (2h^2 \right. \\ &\quad \left. - 5hr^2 + 2r^4)) + 36ab(h - r^2) + b^2(- (2h + 3r^2)) + 45c^2(r^2 - 2h) \right). \end{aligned}$$

Observe que el método del promedio de primer orden no se puede aplicar ya que  $f_1$  es idénticamente nulo, por tanto las soluciones periódicas son obtenidas vía promedio de segundo orden.  $\square$

**Proposición 7** Si  $V_3(x, y) = ax^3 + bxy^2 + cy^3$ ,  $V_4(x, y) = dx^4 + ex^2y^2 + fy^4$ , y  $V_5(x, y) = gx^5 + kx^3y^2 + mxy^4$ , con  $a, b, c, d, e, f, g, k, m$ , parámetros reales, la función Hamiltoniana es dada por

$$H = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2) + V_3(x, y) + V_4(x, y) + V_5(x, y). \quad (3.28)$$

Entonces el método del promedio de segundo orden da información sobre soluciones periódicas del sistema hamiltoniano asociado a (3.28).

**Demostración.** Si  $V_3(x, y) = ax^3 + bxy^2 + cy^3$ ,  $V_4(x, y) = dx^4 + ex^2y^2 + fy^4$ , y  $V_5(x, y) = gx^5 + kx^3y^2 + mxy^4$ , el sistema diferencial (3.18) en su forma estándar es

$$\begin{aligned} r' &= F_{11}\varepsilon + F_{21}\varepsilon^2 + O(\varepsilon^3), \\ \alpha' &= F_{12}\varepsilon + F_{22}\varepsilon^2 + O(\varepsilon^3), \end{aligned}$$

donde

$$F_{11} = \sin(\theta) (3ar^2 \cos^2(\theta) + b(2h - r^2) \cos^2(\alpha + \theta)),$$

$$F_{12} = -3 \cos^3(\theta) ar + \frac{1}{r} b (3r^2 - 2h) \cos(\theta) \cos^2(\alpha + \theta) + 3c\sqrt{2h - r^2} \cos^3(\alpha + \theta).$$

Note que la función promedio asociado a (3.27) es  $f_1 + \varepsilon f_2$  donde

$$f_1(r, \alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (F_{11}, F_{12}) d\theta = (0, 0),$$

y  $f_2(r, \alpha) = (f_{21}, f_{22})$  con

$$f_{21} = \frac{1}{4} b \sin(\alpha) (2h - r^2) \left( 5c\sqrt{2h - r^2} - 2r(a - 2b) \cos(\alpha) \right),$$

$$f_{22} = \frac{1}{12} \left( 45a^2 r^2 + 6b((a - 2b) \cos(2\alpha) (r^2 - h) + \frac{1}{r\sqrt{2h - r^2}} 5c \cos(\alpha) (2h^2 - 5hr^2 + 2r^4)) + 36ab(h - r^2) + b^2(-(2h + 3r^2)) + 45c^2(r^2 - 2h) \right).$$

Como  $f_1$  es idénticamente nulo, el método del promedio de primer orden no se puede aplicar. Por tanto las soluciones periódicas son obtenidas vía promedio de segundo orden como en la proposición 1.  $\square$

## PROBLEMA

Las propociciones 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 siguen siendo válidas si los potenciales  $V_3, V_4$  y  $V_5$  de grado 3, 4 y 5 son polinomios homogéneos conteniendo todos los coeficientes.



# Capítulo 4

## Sistema Hamiltoniano con potencial de grado seis

En el presente capítulo se consideran sistemas hamiltonianos con 2 grados de libertad y potencial polinomial de grado cinco y seis donde la función hamiltoniana  $H$  es

$$H = \frac{1}{2} (x^2 + y^2) + \frac{1}{2} (p_x^2 + p_y^2) + \varepsilon V_5(x, y) + \varepsilon^2 V_6(x, y), \quad (4.1)$$

y las funciones  $V_5(x, y)$  y  $V_6(x, y)$  son polinomios homogéneos de grados cinco y seis respectivamente en las coordenadas  $(x, y)$ . Como se mostró en el capítulo anterior la presencia del término  $V_5$  implica la determinación de soluciones periódicas vía la aplicación del método del promedio de segundo orden, por tanto el propósito principal de este capítulo es el estudio de la existencia de soluciones periódicas y su tipo de estabilidad para el sistema hamiltoniano asociada a la función  $H$ .

### 4.1. Forma estándar para el promedio de orden 2

El sistema diferencial hamiltoniano asociado al hamiltoniano  $H$  dado en (4.1) es:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= p_x, & \dot{p}_x &= -x - \varepsilon \frac{\partial V_5(x, y)}{\partial x} - \varepsilon^2 \frac{\partial V_6(x, y)}{\partial x}, \\ \dot{y} &= p_y, & \dot{p}_y &= -y - \varepsilon \frac{\partial V_5(x, y)}{\partial y} - \varepsilon^2 \frac{\partial V_6(x, y)}{\partial y}. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Con el propósito de utilizar el método del promedio, la periodicidad del sistema (4.2) es un requisito básico para determinar soluciones periódicas vía el método del

promedio. Para eso introduzcamos el cambio de variable en coordenadas polares  $(r, \rho, \theta, \alpha)$  en  $\mathbb{R}^4$  de la siguiente manera

$$x = r \cos \theta, \quad y = \rho \cos(\theta + \alpha), \quad p_x = r \sin \theta, \quad p_y = \rho \sin(\theta + \alpha), \quad (4.3)$$

definidos para  $r > 0$  y  $\rho > 0$ . La integral primera en las nuevas coordenadas para cada valor fijo  $h$  de  $H$ , es

$$h = \frac{1}{2} (r^2 + \rho^2) + \varepsilon V_5(r \cos \theta, \rho \cos(\theta + \alpha)) + \varepsilon^2 V_6(r \cos \theta, \rho \cos(\theta + \alpha)). \quad (4.4)$$

Derivando y usando las expresiones dados en (4.2) se tiene

$$\begin{aligned} \dot{r} &= -\varepsilon \sin \theta \frac{\partial V_5(x, y)}{\partial x} - \varepsilon^2 \sin \theta \frac{\partial V_6(x, y)}{\partial x}, \\ \dot{\theta} &= -1 - \varepsilon \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial V_5(x, y)}{\partial x} - \varepsilon^2 \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial V_6(x, y)}{\partial x}, \\ \dot{\rho} &= -\varepsilon \sin(\theta + \alpha) \frac{\partial V_5(x, y)}{\partial y} - \varepsilon^2 \sin(\theta + \alpha) \frac{\partial V_6(x, y)}{\partial y}, \\ \dot{\alpha} &= \varepsilon \left( \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial V_5(x, y)}{\partial x} - \frac{\cos(\theta + \alpha)}{\rho} \frac{\partial V_5(x, y)}{\partial y} \right) + \varepsilon^2 \left( \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial V_6(x, y)}{\partial x} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\cos(\theta + \alpha)}{\rho} \frac{\partial V_6(x, y)}{\partial y} \right), \end{aligned} \quad (4.5)$$

donde las derivadas parciales de los polinomios de  $V_5 = V_5(x, y)$  y  $V_6 = V_6(x, y)$  son evaluadas en el punto  $(r \cos \theta, \rho \cos(\theta + \alpha))$ , y usando la regla de la cadena el sistema (4.5) se reescribe como

$$\begin{aligned} \dot{r} &= \varepsilon \frac{1}{r} \left( \frac{\partial V_5}{\partial \theta} - \frac{\partial V_5}{\partial \alpha} \right) + \varepsilon^2 \frac{1}{r} \left( \frac{\partial V_6}{\partial \theta} - \frac{\partial V_6}{\partial \alpha} \right), \\ \dot{\theta} &= -1 - \varepsilon \frac{1}{r} \frac{\partial V_5}{\partial r} - \varepsilon^2 \frac{1}{r} \frac{\partial V_6}{\partial r}, \\ \dot{\rho} &= \varepsilon \frac{1}{\rho} \frac{\partial V_5}{\partial \alpha} + \varepsilon^2 \frac{1}{\rho} \frac{\partial V_6}{\partial \alpha}, \\ \dot{\alpha} &= \varepsilon \left( \frac{1}{r} \frac{\partial V_5}{\partial r} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial V_5}{\partial \rho} \right) + \varepsilon^2 \left( \frac{1}{r} \frac{\partial V_6}{\partial r} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial V_6}{\partial \rho} \right). \end{aligned} \quad (4.6)$$

A partir de ahora tomamos la variable  $\theta$  como la variable independiente del sistema en lugar de  $t$  y obtenemos

$$\frac{dr}{d\theta} = -\frac{\varepsilon \left( \frac{\partial V_5}{\partial \theta} - \frac{\partial V_5}{\partial \alpha} \right) + \varepsilon^2 \left( \frac{\partial V_6}{\partial \theta} - \frac{\partial V_6}{\partial \alpha} \right)}{r + \varepsilon \frac{\partial V_5}{\partial r} + \varepsilon^2 \frac{\partial V_6}{\partial r}}. \quad (4.7)$$

Con el fin de escribir la parte derecha de la ecuación (4.7) en su desarrollo de serie de Taylor alrededor de  $\varepsilon = 0$ . Consideremos la función

$$f(\varepsilon) = \frac{1}{1 + a_1 \varepsilon + a_2 \varepsilon^2},$$

donde  $a_1 = \frac{1}{r} \frac{\partial V_5}{\partial r}$ ,  $a_2 = \frac{1}{r} \frac{\partial V_6}{\partial r}$ , se tiene

$$f(\varepsilon) = \frac{1}{1 + a_1 \varepsilon + a_2 \varepsilon^2} = 1 - a_1 \varepsilon + (a_1^2 - a_2) \varepsilon^2 + O(\varepsilon^3).$$

Por tanto

$$f(\varepsilon) = \frac{1}{1 + \varepsilon \frac{1}{r} \frac{\partial V_5}{\partial r} + \varepsilon^2 \frac{1}{r} \frac{\partial V_6}{\partial r}} = 1 - \frac{1}{r} \frac{\partial V_5}{\partial r} \varepsilon + \left( \left( \frac{1}{r} \frac{\partial V_5}{\partial r} \right)^2 - \frac{1}{r} \frac{\partial V_6}{\partial r} \right) \varepsilon^2 + O(\varepsilon^3).$$

Luego

$$r' = -\frac{1}{r} \left( \frac{\partial V_5}{\partial \theta} - \frac{\partial V_5}{\partial \alpha} \right) \varepsilon + \frac{1}{r} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial V_5}{\partial r} \left( \frac{\partial V_5}{\partial \theta} - \frac{\partial V_5}{\partial \alpha} \right) - \left( \frac{\partial V_6}{\partial \theta} - \frac{\partial V_6}{\partial \alpha} \right) \right] \varepsilon^2 + O(\varepsilon^3).$$

Además como

$$\frac{d\rho}{d\theta} = -\frac{\varepsilon \frac{1}{\rho} \frac{\partial V_5}{\partial \alpha} + \varepsilon^2 \frac{1}{\rho} \frac{\partial V_6}{\partial \alpha}}{1 + \varepsilon \frac{1}{r} \frac{\partial V_5}{\partial r} + \varepsilon^2 \frac{1}{r} \frac{\partial V_6}{\partial r}},$$

así

$$\rho' = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial V_5}{\partial r} \varepsilon + \left( \frac{1}{r\rho} \frac{\partial V_5}{\partial r} \frac{\partial V_5}{\partial \alpha} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial V_6}{\partial \alpha} \right) \varepsilon^2 + O(\varepsilon^3).$$

También

$$\frac{d\alpha}{d\theta} = -\frac{\varepsilon \left( \frac{1}{r} \frac{\partial V_5}{\partial r} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial V_5}{\partial \rho} \right) + \varepsilon^2 \left( \frac{1}{r} \frac{\partial V_6}{\partial r} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial V_6}{\partial \rho} \right)}{1 + \varepsilon \frac{1}{r} \frac{\partial V_5}{\partial r} + \varepsilon^2 \frac{1}{r} \frac{\partial V_6}{\partial r}},$$

luego

$$\alpha' = - \left( \frac{1}{r} \frac{\partial V_5}{\partial r} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial V_5}{\partial \rho} \right) \varepsilon + \left( \frac{1}{r} \frac{\partial V_5}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial V_5}{\partial r} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial V_5}{\partial \rho} \right) - \left( \frac{1}{r} \frac{\partial V_6}{\partial r} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial V_6}{\partial \rho} \right) \right) \varepsilon^2 + O(\varepsilon^3).$$

Así tenemos el sistema 4.6, en desarrollo de series de Taylor escrito como:

$$r' = - \frac{1}{r} \left( \frac{\partial V_5}{\partial \theta} - \frac{\partial V_5}{\partial \alpha} \right) \varepsilon + \frac{1}{r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial V_5}{\partial r} \left( \frac{\partial V_5}{\partial \theta} - \frac{\partial V_5}{\partial \alpha} \right) - \left( \frac{\partial V_6}{\partial \theta} - \frac{\partial V_6}{\partial \alpha} \right) \right) \varepsilon^2 + O(\varepsilon^3),$$

$$\rho' = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial V_5}{\partial r} \varepsilon + \left( \frac{1}{r\rho} \frac{\partial V_5}{\partial r} \frac{\partial V_5}{\partial \alpha} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial V_6}{\partial \alpha} \right) \varepsilon^2 + O(\varepsilon^3),$$

$$\begin{aligned} \alpha' = & - \left( \frac{1}{r} \frac{\partial V_5}{\partial r} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial V_5}{\partial \rho} \right) \varepsilon + \left( \frac{1}{r} \frac{\partial V_5}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial V_5}{\partial r} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial V_5}{\partial \rho} \right) - \left( \frac{1}{r} \frac{\partial V_6}{\partial r} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial V_6}{\partial \rho} \right) \right) \varepsilon^2 \\ & + O(\varepsilon^3), \end{aligned} \quad (4.8)$$

donde la prima (') significa la derivada con respecto a la variable  $\theta$ . Usando nuevamente el desarrollo en series de Taylor, escribimos la función  $\rho$  respecto de la variable  $\varepsilon$ . Así

$$\rho(\varepsilon) = \rho(0) + \rho'(0)\varepsilon + O(\varepsilon^2). \quad (4.9)$$

De (4.4) para  $\varepsilon = 0$  tenemos que:

$$\rho(0) = \sqrt{2h - r^2}, \quad (4.10)$$

derivando (4.4) con respecto a  $\varepsilon$ ,

$$\begin{aligned} 0 = & \rho(0)\rho'(0) + V_5(r \cos \theta, \rho \cos(\theta + \alpha)) + \varepsilon \frac{\partial V_5}{\partial Y} \rho'(0) \cos(\theta + \alpha) + \\ & 2\varepsilon V_6(r \cos \theta, \rho \cos(\theta + \alpha)) + \varepsilon^2 \frac{\partial V_6}{\partial Y} \rho'(0) \cos(\theta + \alpha) \end{aligned}$$

evaluando en  $\varepsilon = 0$ , obtenemos que

$$\rho'(0) = - \frac{V_5(r \cos \theta, \sqrt{2h - r^2} \cos(\theta + \alpha))}{\sqrt{2h - r^2}}. \quad (4.11)$$

Luego por (4.9), (4.10) y (4.11) la función  $\rho$  tiene la forma

$$\rho(\varepsilon) = \sqrt{2h - r^2} - \frac{V_5(r \cos \theta, \sqrt{2h - r^2} \cos(\theta + \alpha))}{\sqrt{2h - r^2}} \varepsilon + O(\varepsilon^2). \quad (4.12)$$

Como  $V_5$  depende de las variables  $(r, \theta, \rho, \alpha)$ , es decir  $V_5(r, \theta, \rho, \alpha)$ , las derivadas parciales de  $V_5$  respecto de las variables  $r, \theta, \rho$  y  $\alpha$  en series de Taylor alrededor de  $\varepsilon = 0$  son:

$$\frac{\partial V_5}{\partial r} = \frac{\partial V_5}{\partial r} + \frac{\partial^2 V_5}{\partial r \partial \rho} \rho'(0) \varepsilon + O(\varepsilon^2),$$

$$\frac{\partial V_5}{\partial \theta} = \frac{\partial V_5}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 V_5}{\partial \theta \partial \rho} \rho'(0) \varepsilon + O(\varepsilon^2),$$

$$\frac{\partial V_5}{\partial \rho} = \frac{\partial V_5}{\partial \rho} + \frac{\partial^2 V_5}{\partial \rho^2} \rho'(0) \varepsilon + O(\varepsilon^2),$$

$$\frac{\partial V_5}{\partial \alpha} = \frac{\partial V_5}{\partial \alpha} + \frac{\partial^2 V_5}{\partial \alpha \partial \rho} \rho'(0) \varepsilon + O(\varepsilon^2).$$

La función  $\frac{1}{\rho(\varepsilon)}$  en desarrollo de Taylor alrededor de  $\varepsilon = 0$  es

$$\frac{1}{\rho(\varepsilon)} = \frac{1}{\rho(0)} - \frac{\rho'(0)}{\rho^2(0)} \varepsilon + O(\varepsilon^3),$$

y tenemos que

$$\frac{1}{\rho(\varepsilon)} \frac{\partial V_5}{\partial \rho} = \frac{1}{\rho(0)} \frac{\partial V_5}{\partial \rho} + \left[ \frac{\rho'(0)}{\rho(0)} \frac{\partial^2 V_5}{\partial \rho^2} - \frac{\rho'(0)}{\rho^2(0)} \frac{\partial V_5}{\partial \rho} \right] \varepsilon + O(\varepsilon^2).$$

Por otro lado

$$\frac{1}{r} \left( \frac{\partial V_5}{\partial \theta} - \frac{\partial V_5}{\partial \alpha} \right) = \frac{1}{r} \left( \frac{\partial V_5}{\partial \theta} - \frac{\partial V_5}{\partial \alpha} \right) + \frac{\rho'(0)}{r} \left( \frac{\partial^2 V_5}{\partial \rho \partial \theta} - \frac{\partial^2 V_5}{\partial \rho \partial \alpha} \right) \varepsilon,$$

y

$$\begin{aligned} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial V_5}{\partial r} - \frac{1}{\rho(\varepsilon)} \frac{\partial V_5}{\partial \rho} \right) &= \left( \frac{1}{r} \frac{\partial V_5}{\partial r} - \frac{1}{\rho(0)} \frac{\partial V_5}{\partial \rho} \right) + \left[ \frac{\rho'(0)}{r} \frac{\partial^2 V_5}{\partial \rho \partial r} - \left( \frac{\rho'(0)}{\rho(0)} \frac{\partial^2 V_5}{\partial \rho^2} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{\rho'(0)}{\rho^2(0)} \frac{\partial V_5}{\partial \rho} \right) \right] \varepsilon. \end{aligned}$$

Entonces sustituyendo las expresiones en la ecuación (4.8), obtenemos las dos ecuaciones diferenciales siguientes

$$\begin{aligned}
r' &= -\frac{1}{r} \left( \frac{\partial V_5}{\partial \theta} - \frac{\partial V_5}{\partial \alpha} \right) \varepsilon + \frac{1}{r} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial V_5}{\partial r} \left( \frac{\partial V_5}{\partial \theta} - \frac{\partial V_5}{\partial \alpha} \right) - \rho'(0) \left( \frac{\partial^2 V_5}{\partial \rho \partial \theta} - \frac{\partial^2 V_5}{\partial \rho \partial \alpha} \right) \right. \\
&\quad \left. - \left( \frac{\partial V_6}{\partial \theta} - \frac{\partial V_6}{\partial \alpha} \right) \right] \varepsilon^2 + O(\varepsilon^3), \\
\alpha' &= -\frac{1}{r} \left( \frac{\partial V_5}{\partial r} - \frac{r}{\rho(0)} \frac{\partial V_5}{\partial \rho} \right) \varepsilon + \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial V_5}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial V_5}{\partial r} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial V_5}{\partial \rho} \right) - \frac{\rho'(0)}{r} \frac{\partial^2 V_5}{\partial \rho \partial r} \right. \\
&\quad \left. + \left( \frac{\rho'(0)}{\rho(0)} \frac{\partial^2 V_5}{\partial \rho^2} + \frac{\rho'(0)}{\rho^2(0)} \frac{\partial V_5}{\partial \rho} \right) - \left( \frac{1}{r} \frac{\partial V_6}{\partial r} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial V_6}{\partial \rho} \right) \right] \varepsilon^2 + O(\varepsilon^3). \tag{4.13}
\end{aligned}$$

Así el sistema (4.13) está ahora en la forma estándar, es decir, el sistema (4.13) tiene la forma

$$\begin{aligned}
r' &= F_{11}\varepsilon + F_{21}\varepsilon^2 + O(\varepsilon^3), \\
\alpha' &= F_{12}\varepsilon + F_{22}\varepsilon^2 + O(\varepsilon^3), \tag{4.14}
\end{aligned}$$

que en su forma matricial es

$$\begin{pmatrix} r' \\ \alpha' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} F_{11} \\ F_{12} \end{pmatrix}}_{F_1} \varepsilon + \underbrace{\begin{pmatrix} F_{21} \\ F_{22} \end{pmatrix}}_{F_2} \varepsilon^2 + O(\varepsilon^3),$$

donde las funciones  $F_1 = (F_{11}, F_{12})$  y  $F_2 = (F_{21}, F_{22})$  son

$$\begin{aligned}
F_{11} &= -\frac{1}{r} \left( \frac{\partial V_5}{\partial \theta} - \frac{\partial V_5}{\partial \alpha} \right), \\
F_{12} &= -\frac{1}{r} \left( \frac{\partial V_5}{\partial r} - \frac{r}{\rho(0)} \frac{\partial V_5}{\partial \rho} \right) \\
F_{21} &= \frac{1}{r} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial V_5}{\partial r} \left( \frac{\partial V_5}{\partial \theta} - \frac{\partial V_5}{\partial \alpha} \right) - \rho'(0) \left( \frac{\partial^2 V_5}{\partial \rho \partial \theta} - \frac{\partial^2 V_5}{\partial \rho \partial \alpha} \right) - \left( \frac{\partial V_6}{\partial \theta} - \frac{\partial V_6}{\partial \alpha} \right) \right], \\
F_{22} &= \left[ -\frac{\rho'(0)}{r} \frac{\partial^2 V_5}{\partial \rho \partial r} + \left( \frac{\rho'(0)}{\rho(0)} \frac{\partial^2 V_5}{\partial \rho^2} - \frac{\rho'(0)}{\rho^2(0)} \frac{\partial V_5}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial V_5}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial V_5}{\partial r} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial V_5}{\partial \rho} \right) \right. \\
&\quad \left. - \left( \frac{1}{r} \frac{\partial V_6}{\partial r} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial V_6}{\partial \rho} \right) \right]. \tag{4.15}
\end{aligned}$$

La función promedio asociada al sistema (4.13) viene dada por  $(f_1 + \varepsilon f_2)$  donde

$$f_1(r, \alpha) := (f_{11}, f_{12}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F_1(\theta, \alpha, r) d\theta,$$

y

$$\begin{aligned} f_2(r, \alpha) &:= (f_{21}, f_{22}) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[ D_{r,\alpha} F_1(r, \alpha, \theta) d\theta \int_0^\theta F_1(t, r, \alpha) dt + F_2(r, \alpha, \theta) \right] d\theta \end{aligned} \quad (4.16)$$

con  $D_{r,\alpha} F_1(\theta, \alpha, r)$  la matriz Jacobiana de  $F_1$ , que es:

$$D_{r,\alpha} F_1(r, \alpha, \theta) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_{11}}{\partial r} & \frac{\partial F_{11}}{\partial \alpha} \\ \frac{\partial F_{12}}{\partial r} & \frac{\partial F_{12}}{\partial \alpha} \end{pmatrix}.$$

**Observación 4.1** La importancia de tener el sistema original (4.14) con las condiciones (4.15), es que el método del promedio de segundo orden permite detectar soluciones periódicas del sistema original.

## 4.2. Sistema Hamiltoniano con potencial cinco

En esta sección generalizaremos los resultados obtenidos por Ortega en [2], para un sistema Hamiltoniano con potencial homogéneo de grado cinco, para ello consideremos la función polinomial  $H$  de grado cinco:

$$H = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2) + \frac{A}{5}x^5 + Bx^3y^2 + \frac{1}{5}Fxy^4, \quad (4.17)$$

con  $x, y, p_x, p_y \in \mathbb{R}$ . Notemos que el Hamiltoniano (4.17) depende de los parámetros reales  $A, B$  y  $F$ .

**Observación 4.2** Para  $F = 0$ , la función Hamiltoniana (4.17) se reduce a

$$H = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2) + \frac{A}{5}x^5 + Bx^3y^2, \quad (4.18)$$

donde  $A$  y  $B$  son parámetros reales. Éste es el sistema estudiado por Alberto Castro Ortega en [2].

El sistema diferencial hamiltoniano asociado al hamiltoniano (4.17) es

$$\begin{aligned}
 \dot{x} &= p_x, \\
 \dot{y} &= p_y, \\
 \dot{p}_x &= -x - Ax^4 - 3Bx^2y^2 - \frac{F}{5}y^4, \\
 \dot{p}_y &= -y - 2Bx^3y - \frac{4}{5}Fxy^3.
 \end{aligned} \tag{4.19}$$

El objetivo principal es determinar analíticamente soluciones periódicas del sistema hamiltoniano (4.19). Para hacer este estudio usamos el método del promedio de segundo orden. Recordemos que el método del promedio convierte el problema de encontrar soluciones periódicas de un sistema diferencial en la búsqueda de ceros de algunas funciones llamadas funciones promedio.

### 4.2.1. Método del promedio de segundo orden

Para aplicar el método del promedio necesitamos introducir un parámetro real positivo en el sistema (4.19) y consideremos como en la sección 4.1 el cambio de coordenadas  $(x, y, p_x, p_y)$  por  $(X, Y, p_X, p_Y)$  donde  $x = \sqrt[3]{\varepsilon}X$ ,  $y = \sqrt[3]{\varepsilon}Y$ ,  $p_x = \sqrt[3]{\varepsilon}p_X$ , y  $p_y = \sqrt[3]{\varepsilon}p_Y$ , con  $\varepsilon$  un pequeño parámetro real positivo que es  $\varepsilon^{-2/3}$  simpléctico. Así tenemos el sistema (4.19) en la forma

$$\begin{aligned}
 \dot{X} &= p_X, \\
 \dot{Y} &= p_Y, \\
 \dot{p}_X &= -X - \varepsilon \left( AX^4 + 3BX^2Y^2 + \frac{F}{5}Y^4 \right), \\
 \dot{p}_Y &= -Y - \varepsilon \left( 2BX^3Y + \frac{4}{5}FXY^3 \right).
 \end{aligned} \tag{4.20}$$

Este sistema nuevamente es Hamiltoniano con la función Hamiltoniana

$$K = \frac{1}{2}(X^2 + Y^2) + \frac{1}{2}(p_X^2 + p_Y^2) + \varepsilon \left( \frac{A}{5}X^5 + BX^3Y^2 + \frac{1}{5}FXY^4 \right). \tag{4.21}$$

La periodicidad en la variable independiente del sistema diferencial (4.20) es necesario para aplicar el método del promedio, por lo que hacemos el cambio de variables por  $(X, Y, p_X, p_Y) \rightarrow (r, \theta, \rho, \alpha) \in \mathbb{R}^+ \times S^1 \times \mathbb{R}^+ \times S^1$  definida por

$$X = r \cos \theta, \quad Y = \rho \cos(\theta + \alpha), \quad p_X = r \sin \theta, \quad p_Y = \rho \sin(\theta + \alpha),$$

para  $r > 0$  y  $\rho > 0$ . El nivel de energía  $h$  de  $H$  en coordenadas polares es:

$$h = \frac{1}{2}(r^2 + \rho^2) + \frac{1}{5}\varepsilon \left( Ar^5 \cos^5(\theta) + 5B\rho^2 r^3 \cos^3(\theta) \cos^2(\alpha + \theta) + F\rho^4 r \cos(\theta) \cos^4(\alpha + \theta) \right), \quad (4.22)$$

y las nuevas ecuaciones de movimiento son dados por:

$$\begin{aligned} \dot{r} &= \frac{1}{r}\varepsilon \left( -Ar^5 \sin(\theta) \cos^4(\theta) - 3Br^3(2h - r^2) \sin(\theta) \cos^2(\theta) \cos^2(\alpha + \theta) - \frac{1}{5}Fr(2h - r^2)^2 \sin(\theta) \cos^4(\alpha + \theta) \right), \\ \dot{\theta} &= -1 - \frac{1}{r}\varepsilon \left( Ar^4 \cos^5(\theta) + 3Br^2(2h - r^2) \cos^3(\theta) \cos^2(\alpha + \theta) + \frac{1}{5}F(2h - r^2)^2 \cos(\theta) \cos^4(\alpha + \theta) \right), \\ \dot{\rho} &= \frac{1}{\sqrt{2h - r^2}}\varepsilon \left( -2Br^3(2h - r^2) \cos^3(\theta) \sin(\alpha + \theta) \cos(\alpha + \theta) - \frac{4}{5}Fr(2h - r^2)^2 \cos(\theta) \sin(\alpha + \theta) \cos^3(\alpha + \theta) \right), \\ \dot{\alpha} &= \frac{1}{r}\varepsilon \left( Ar^4 \cos^5(\theta) - \frac{1}{\sqrt{2h - r^2}}2Br^3\sqrt{2h - r^2} \cos^3(\theta) \cos^2(\alpha + \theta) + \frac{4}{5}Fr(2h - r^2)^{3/2} \cos(\theta) \cos^4(\alpha + \theta) + 3Br^2(2h - r^2) \cos^3(\theta) \cos^2(\alpha + \theta) + \frac{1}{5}F(2h - r^2)^2 \cos(\theta) \cos^4(\alpha + \theta) \right). \end{aligned} \quad (4.23)$$

A partir de ahora tomaremos la variable  $\theta$  como la nueva variable independiente del sistema en lugar de  $t$  y obtenemos el sistema diferencial

$$r' = \frac{1}{5}\varepsilon \sin(\theta) \left( 5Ar^4 \cos^4(\theta) - 15Br^2(r^2 - 2h) \cos^2(\theta) \cos^2(\alpha + \theta) + F(r^2 - 2h)^2 \cos^4(\alpha + \theta) \right) - \frac{1}{25r}\varepsilon^2 (\sin(\theta) \cos(\theta) (5Ar^4 \cos^4(\theta) - 15Br^2(r^2 - 2h) \cos^2(\theta) \cos^2(\alpha + \theta) + F(r^2 - 2h)^2 \cos^4(\alpha + \theta))^2) + O(\varepsilon^3),$$

$$\begin{aligned}
\rho' &= \frac{1}{10} r \varepsilon \sqrt{2h - r^2} \cos(\theta) \sin(2(\alpha + \theta)) \left( 5Br^2 \cos(2\theta) + 5Br^2 + F(4h - 2r^2) \cos(2(\alpha + \theta)) + 4Fh - 2Fr^2 \right) - \frac{1}{50} \varepsilon^2 \left( \sqrt{2h - r^2} \cos(\theta) \sin(2(\alpha + \theta)) (5Br^2 \cos(2\theta) + 5Br^2 + F(4h - 2r^2) \cos(2(\alpha + \theta)) + 4Fh - 2Fr^2) (5Ar^4 \cos^5(\theta) - 15Br^2(r^2 - 2h) \cos^3(\theta) \cos^2(\alpha + \theta) + F(r^2 - 2h)^2 \cos(\theta) \cos^4(\alpha + \theta)) \right) + O(\varepsilon^3), \\
\alpha' &= \varepsilon \left( -Ar^3 \cos^5(\theta) + Br(r(3r+2) - 6h) \cos^3(\theta) \cos^2(\alpha + \theta) - \frac{1}{5r} F(r^2 - 2h)(r(r+4) - 2h) \cos(\theta) \cos^4(\alpha + \theta) \right) + \frac{1}{25r^2} \varepsilon^2 \cos^2(\theta) \left( 5Ar^4 \cos^4(\theta) - 15Br^2(r^2 - 2h) \cos^2(\theta) \cos^2(\alpha + \theta) + F(r^2 - 2h)^2 \cos^4(\alpha + \theta) \right) (5Ar^4 \cos^4(\theta) - 5Br^2(r(3r+2) - 6h) \cos^2(\theta) \cos^2(\alpha + \theta) + F(r^2 - 2h)(r(r+4) - 2h) \cos^4(\alpha + \theta)) + O(\varepsilon^3),
\end{aligned} \tag{4.24}$$

donde la prima (') nuevamente significa la derivada con respecto a la variable  $\theta$ . Es fácil ver que el nuevo sistema (4.24) es  $2\pi$  periódico en la variable  $\theta$ . Para aplicar el método del promedio, vamos a restringir este sistema a cada nivel de energía  $K = h$  con  $h > 0$  y resolvemos la ecuación (4.22) para  $\rho$  en  $\varepsilon = 0$ . Así

$$\rho = \sqrt{2h - r^2}. \tag{4.25}$$

Sustituyendo  $\rho$  en el sistema (4.24) obtenemos el siguiente sistema diferencial

$$\begin{aligned}
r' &= \left( \frac{1}{5} \sin(\theta) \left( 5Ar^4 \cos^4(\theta) - 15Br^2(r^2 - 2h) \cos^2(\theta) \cos^2(\alpha + \theta) + F(r^2 - 2h)^2 \cos^4(\alpha + \theta) \right) \right) \varepsilon + \left( -\frac{1}{25r} \sin(\theta) \cos(\theta) \left( 25A^2r^8 \cos^8(\theta) + r^4(r^2 - 2h) \cos^4(\theta) \cos^4(\alpha + \theta) (-20AFh + 6AFr^2 + 75B^2(r^2 - 6h)) + 60ABr^6(5h - 2r^2) \cos^6(\theta) \cos^2(\alpha + \theta) + 20BFr^2(r^2 - 2h)^2(3h + r^2) \cos^2(\theta) \cos^6(\alpha + \theta) + F^2(2h - r^2)^3(2h + 3r^2) \cos^8(\alpha + \theta) \right) \right) \varepsilon^2 + O(\varepsilon^3), \\
\alpha' &= \left( -Ar^3 \cos^5(\theta) + Br(5r^2 - 6h) \cos^3(\theta) \cos^2(\alpha + \theta) - \frac{1}{5r} F(r^2 - 2h)(5r^2 - 2h) \cos(\theta) \cos^4(\alpha + \theta) \right) \varepsilon + \frac{1}{25r^2} \left( 25A^2r^8 \cos^{10}(\theta) + r^4 \cos^6(\theta) \cos^4(\alpha + \theta) (2AF(20h^2 - 36hr^2 + 9r^4) + 225B^2(r^2 - 2h)^2) + 10ABr^6(30h - 17r^2) \cos^8(\theta) \cos^2(\alpha + \theta) - 10BFr^2(r^2 - 2h)(12h^2 - 16hr^2 + r^4) \cos^4(\theta) \cos^6(\alpha + \theta) + F^2(r^2 - 2h)^2(4h^2 - 4hr^2 - 7r^4) \cos^2(\theta) \cos^8(\alpha + \theta) \right) \varepsilon^2 + O(\varepsilon^3).
\end{aligned} \tag{4.26}$$

El sistema diferencial (4.26) está en la forma estándar, por tanto podemos aplicar el método del promedio. Notar que el sistema (4.26) tiene la forma general

$$\begin{aligned} r' &= F_{11}\varepsilon + F_{21}\varepsilon^2 + O(\varepsilon^3), \\ \alpha' &= F_{12}\varepsilon + F_{22}\varepsilon^2 + O(\varepsilon^3), \end{aligned} \quad (4.27)$$

donde las funciones  $F_1 = (F_{11}, F_{12})$  y  $F_2 = (F_{21}, F_{22})$  son

$$\begin{aligned} F_{11} &= \frac{1}{5} \sin(\theta) \left( 5Ar^4 \cos^4(\theta) - 15Br^2 (r^2 - 2h) \cos^2(\theta) \cos^2(\alpha + \theta) \right. \\ &\quad \left. + F (r^2 - 2h)^2 \cos^4(\alpha + \theta) \right), \\ F_{12} &= -Ar^3 \cos^5(\theta) + Br (5r^2 - 6h) \cos^3(\theta) \cos^2(\alpha + \theta) \\ &\quad - \frac{1}{5r} F (r^2 - 2h) (5r^2 - 2h) \cos(\theta) \cos^4(\alpha + \theta), \\ F_{21} &= -\frac{1}{25r} \sin(\theta) \cos(\theta) \left( 25A^2r^8 \cos^8(\theta) + r^4(r^2 - 2h) \cos^4(\theta) \cos^4(\alpha + \theta) (-20AFh \right. \\ &\quad \left. + 6AFr^2 + 75B^2(r^2 - 6h)) + 60ABr^6(5h - 2r^2) \cos^6(\theta) \cos^2(\alpha + \theta) + 20BFr^2 \right. \\ &\quad \left. (r^2 - 2h)^2(3h + r^2) \cos^2(\theta) \cos^6(\alpha + \theta) + F^2(2h - r^2)^3(2h + 3r^2) \cos^8(\alpha + \theta) \right), \\ F_{22} &= \frac{1}{25r^2} \left( 25A^2r^8 \cos^{10}(\theta) + r^4 \cos^6(\theta) \cos^4(\alpha + \theta) (2AF(20h^2 - 36hr^2 + 9r^4) \right. \\ &\quad \left. + 225B^2(r^2 - 2h)^2) + 10ABr^6(30h - 17r^2) \cos^8(\theta) \cos^2(\alpha + \theta) - 10BFr^2 \right. \\ &\quad \left. (r^2 - 2h)(12h^2 - 16hr^2 + r^4) \cos^4(\theta) \cos^6(\alpha + \theta) + F^2(r^2 - 2h)^2 \right. \\ &\quad \left. (4h^2 - 4hr^2 - 7r^4) \cos^2(\theta) \cos^8(\alpha + \theta) \right). \end{aligned} \quad (4.28)$$

Observe que la función promedio de primer orden es nula, pues

$$f_1(r, \alpha) = \int_0^{2\pi} (F_{11}, F_{12}) d\theta = (0, 0),$$

así las soluciones periódicas del sistema (4.20) serán determinadas a través del método del promedio de segundo orden. La función promedio de segundo orden  $f_2$  es

$$f_2(r, \alpha) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [D_{r,\alpha} F_1(\theta, \alpha, r) d\theta y_1(\theta, r, \alpha) + F_2(\theta, \alpha, r)] d\theta, \quad (4.29)$$

donde

$$\begin{aligned} y_1(\theta, r, \alpha) &= (y_{11}, y_{12}) = \int_0^\theta F_1(t, r, \alpha) dt, \\ &= \left( \int_0^\theta F_{11}(t, r, \alpha) dt, \int_0^\theta F_{12}(t, r, \alpha) dt \right). \end{aligned}$$

Las dos componentes del vector  $y_1$  son

$$\begin{aligned}
y_{11} &= \int_0^\theta F_{11}(t, r, \alpha) dt \\
y_{11} &= \frac{1}{1200} \left( 60 \sin^2 \left( \frac{\theta}{2} \right) \left( 3(r^4(5A - 10B + F) - 4hr^2(F - 5B) + 4Fh^2) + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. r^2(2 \cos(\theta)(7Ar^2 + 20Bh - 10Br^2) + 2 \cos(2\theta)(4Ar^2 + 10Bh - 5Br^2) + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. Ar^2(2 \cos(3\theta) + \cos(4\theta)) \right) \right) - 40 \sin(2\alpha)(2h - r^2) \sin^3(\theta)(9Br^2 \cos(2\theta) + \\
&\quad 21Br^2 + 4Fh - 2Fr^2) + \cos(2\alpha)(2h - r^2)(-5 \cos(3\theta)(15Br^2 + 8Fh - 4Fr^2) + \\
&\quad 40r^2(3B + F) - 45Br^2 \cos(5\theta) + 16F \sin(2\alpha)(r^2 - 2h) \sin^3(\theta)(3 \cos(2\theta) + 2) + \\
&\quad 60F(2h - r^2) \cos(\theta) - 80Fh) + F \cos(4\alpha)(r^2 - 2h)^2(5 \cos(3\theta) - 3 \cos(5\theta) - \\
&\quad 2) \Big), \\
y_{12} &= \int_0^\theta F_{11}(t, r, \alpha) dt \\
y_{12} &= -\frac{1}{1200r} \left( 5Ar^4(25(6 \sin(\theta) + \sin(3\theta)) + 3 \sin(5\theta)) + 30Bhr^2(15 \sin(2\alpha + \right. \\
&\quad \left. 3\theta) + 3 \sin(2\alpha + 5\theta) + 6 \sin(2\alpha)(5 \cos(\theta) - 8) + 30(2 \cos(2\alpha) + 3) \sin(\theta) + \right. \\
&\quad \left. 10 \sin(3\theta)) - 25Br^4(15 \sin(2\alpha + 3\theta) + 3 \sin(2\alpha + 5\theta) + 6 \sin(2\alpha)(5 \cos(\theta) - \right. \\
&\quad \left. 8) + 30(2 \cos(2\alpha) + 3) \sin(\theta) + 10 \sin(3\theta)) + 4Fh^2(60 \sin(2\alpha + \theta) + 20 \sin(2\alpha + \right. \\
&\quad \left. 3\theta) + 5 \sin(4\alpha + 3\theta) + 3 \sin(4\alpha + 5\theta) - 80 \sin(2\alpha) - 8 \sin(4\alpha) + 90 \sin(\theta)) - \right. \\
&\quad \left. 12Fhr^2(60 \sin(2\alpha + \theta) + 20 \sin(2\alpha + 3\theta) + 5 \sin(4\alpha + 3\theta) + 3 \sin(4\alpha + 5\theta) - \right. \\
&\quad \left. 80 \sin(2\alpha) - 8 \sin(4\alpha) + 90 \sin(\theta)) + 5Fr^4(60 \sin(2\alpha + \theta) + 20 \sin(2\alpha + 3\theta) + \right. \\
&\quad \left. 5 \sin(4\alpha + 3\theta) + 3 \sin(4\alpha + 5\theta) - 80 \sin(2\alpha) - 8 \sin(4\alpha) + 90 \sin(\theta)) \right).
\end{aligned}$$

Calculando la función  $f_2 = (f_{21}, f_{22})$  a partir de la expresión (4.29) obtenemos

$$\begin{aligned}
f_{21} &= \frac{r}{4800} (r^2 - 2h) \left( r^2 \sin(4\alpha)(r^2 - 2h)(675B^2 - 2F(A + 40B)) - \right. \\
&\quad \left. \sin(2\alpha)(r^4(735AB + 80AF - 750B^2 - 685BF + 168F^2) + 4hr^2(-8F(5A + \right. \\
&\quad \left. 21F) + 900B^2 + 269BF) + 84Fh^2(7B + 8F)) \right), \\
f_{22} &= \frac{1}{12000} \left( 3 \left( 5r^6(315A^2 + 20A(9F - 70B) + 850B^2 + 200BF - 77F^2) + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. 12h^2r^2(F(150A - 161F) + 1175B^2 - 300BF) + 6hr^4(-150F(3A + B) + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. 25B(70A - 113B) + 273F^2) + 56Fh^3(50B + 7F) \right) + 5 \cos(2\alpha)(3hr^4(735AB + \right. \\
&\quad \left. 160AF - 2550B^2 - 1223BF + 504F^2) - 2r^6(735AB + 80AF - 750B^2 - \right. \\
&\quad \left. 685BF + 168F^2) + 4h^2r^2(-8F(10A + 63F) + 1800B^2 + 391BF) + \right. \\
&\quad \left. 84Fh^3(7B + 8F)) + 5r^2 \cos(4\alpha)(2h^2 - 3hr^2 + r^4)(675B^2 - 2F(A + 40B)) \right).
\end{aligned}$$

(4.30)

El propósito ahora, es encontrar regiones en términos de los parámetros  $A, B, F$  y el nivel de energía  $H = h$ , donde se puede garantizar existencia de soluciones periódicas, más precisamente, sean los siguientes conjuntos

$$\Gamma = \{\gamma : \gamma = (h, A, B, F) \in \mathbb{R}^4\}$$

y

$$\Upsilon = \{M : M = (r, \alpha) \in \mathbb{R}^+ \times S^1\}.$$

Consideremos  $f_2 : \Upsilon \times \Gamma \rightarrow \mathbb{R}^2$  definido por  $f_2(\gamma, M) = (f_{21}(M), f_{22}(M))$ . Denotemos por  $Jf(M)$ , como el determinante de la matriz Jacobiana asociada a  $f_2$  y donde  $f_{21}$  y  $f_{22}$  son dadas por las ecuaciones:

$$f_{2i}(r, \alpha) = 0, \quad \text{para } i = 1, 2. \quad (4.31)$$

El objetivo principal es encontrar dos regiones  $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2 \subset \Gamma$  con  $\mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_2 \neq \emptyset$  tales que se cumplen las siguientes propiedades:

- (i) Para cada  $\gamma \in \mathcal{R}_1$ , existe un único punto  $M^* = (r^*, \alpha^*) \in \Upsilon$  tal que  $f_{21}(M^*) = 0$  y  $f_{22}(M^*) = 0$ .
- (ii) Para cada  $\gamma \in \mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_2$  se cumple que  $Jf(M^*) \neq 0$ .

En la tesis se hace el análisis riguroso en el caso en que  $\mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_2 \neq \mathcal{R}_1$ . Podemos evidenciar casos en el que  $\mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_2 = \mathcal{R}_1$ , es decir, la región de no degenerancia (donde  $Jf(M^*) \neq 0$ ) es gantizada por la región de ceros para los cuales  $f_{21}(M^*) = 0$  y  $f_{22}(M^*) = 0$ . Este tipo de región no siempre es posible, pero dependiendo de la forma de los ceros a encontrar, se comportan las regiones de degenerancia.

Antes de enunciar los resultados de esta sección, consideremos las notaciones siguientes en relación con los parámetros  $A, B$  y  $F$ :

$$L_1 = \left( 4F(4F - 5A) + 225B^2 - 80BF \right) (40F^4(701A^2 - 3854AB + 5070B^2) + 50F^3(632A^3 - 3462A^2B + 4825AB^2 + 2070B^3) + 125F^2(8A^4 - 840A^3B - 892A^2B^2 + 11343AB^3 - 14875B^4) + 1875BF(-4A^4 + 14A^3B + 774A^2B^2 - 1804AB^3 + 545B^4) + 84375B^3(2B - A)(A + 3B)(10B - A) + 256F^5(56A - 185B) + 3072F^6).$$

$$L_2 = \sqrt{(4F(4F - 5A) + 225B^2 - 80BF)} \left( 2240F^5(33A^2 - 295AB + 595B^2) + 400F^4(109A^3 - 1645A^2B + 6254AB^2 - 5585B^3) + 500F^3(200A^4 - 16A^3B + 754A^2B^2 - 92AB^3 - 12645B^4) - 28125B^2F(8A^4 - 64A^3B - 578A^2B^2 + 796AB^3 + 1185B^4) + 625F^2(16A^5 - 112A^4B - 3984A^3B^2 + 3616A^2B^3 - 3979AB^4 + 34665B^5) + 1265625B^4(2B - A)(A + 3B)(10B - A) + 512F^6(97A - 430B) + 12288F^7 \right).$$

$$L_3 = \left( 5F(4A^2 + 28AB - 77B^2) - 225B^2(A + 3B) + 12F^2(7A - 4B) \right) (4F^2(4A^2 + AB + 4B^2) + 5BF(4A^2 - 20AB + 7B^2) - 225AB^3).$$

$$L_4 = 945A^2 - 2730AB + 698AF + 1725B^2 - 850BF + 105F^2.$$

$$L_5 = (6825AB - 3490AF - 7575B^2 + 5615BF - 882F^2)h.$$

$$L_6 = (3490AF + 6525B^2 - 9710BF + 2142F)h^2.$$

$$L_7 = 2519897651712h^9 \left( -125F^4(38316A^2 - 18388AB + 34103B^2) + 46875B^3(101B - 91A)(100A^2 - 91AB + 7B^2) + 625F^3(-87948A^3 + 110376A^2B - 24133AB^2 + 27791B^3) - 1875F^2(70204A^4 - 192364A^3B + 75471A^2B^2 + 37310AB^3 + 9330B^4) - 3125BF(-65520A^4 + 39271A^3B + 178533A^2B^2 - 156765AB^3 + 11683B^4) + 140F^5(349A + 3124B) - 18816F^6 \right).$$

$$L_8 = 2519897651712h^9 \left( -125F^4(38316A^2 - 18388AB + 34103B^2) + 46875B^3(101B - 91A)(100A^2 - 91AB + 7B^2) + 625F^3(-87948A^3 + 110376A^2B - 24133AB^2 + 27791B^3) - 1875F^2(70204A^4 - 192364A^3B + 75471A^2B^2 + 37310AB^3 + 9330B^4) - 3125BF(-65520A^4 + 39271A^3B + 178533A^2B^2 - 156765AB^3 + 11683B^4) + 140F^5(349A + 3124B) - 18816F^6 \right) + \sqrt{4(30L_4L_6 - 9L_5^2)^3 + L_7^2}.$$

$$L_9 = \left( \frac{18\sqrt[3]{2}L_5^2 - 6\sqrt[3]{L_8}L_5 - 60\sqrt[3]{2}L_4L_6 + \sqrt[3]{4L_8^2}}{900L_4^2\sqrt[3]{L_8^2}} \right)^2.$$

Además para el nivel de energía positivo  $H = h$  consideremos los siguientes conjuntos:

$$\begin{aligned} \Omega_{ABF}^1 &= \left\{ (A, B, F) \in \mathbb{R}^3 : \left| \frac{50B + 7F}{7B + 8F} \right| < \frac{5}{2}, (7B + 8F)F(25B^2 - 4F^2) \neq 0 \right\} \\ \Omega_{ABF}^2 &= \left\{ (A, B, F) \in \mathbb{R}^3 : \left| \frac{9A^2 - 10AB - 4B^2}{B(7A + 10B)} \right| < \frac{1}{2}, B(7A + 10B) \neq 0, \right. \\ &\quad \left. (A - 2B)(9A - 2B)(2A - B)(2A + B) \neq 0 \right\} \\ \Omega_{ABF}^3 &= \left\{ (A, B, F) \in \mathbb{R}^3 : \frac{(5B + 2F)}{-5A + 5B + 3F} > 0, (5A - 5B - 3F)(2A + B)L_3 \neq 0 \right\} \\ \Omega_{ABF}^4 &= \left\{ (A, B, F) \in \mathbb{R}^3 : \frac{\left( \sqrt{4F(4F - 5A) + 225B^2 - 80BF} + 15B - 6F \right)}{(A - 5B + F)} < 0, \right. \\ &\quad \left. (4F(4F - 5A) + 225B^2 - 80BF) > 0, (A - 5B + F)(L_1 + L_2) \neq 0 \right\} \\ \Omega_{ABF}^5 &= \left\{ (A, B, F) \in \mathbb{R}^3 : \frac{\left( \sqrt{4F(4F - 5A) + 225B^2 - 80BF} - 15B + 6F \right)}{(A - 5B + F)} > 0 \right. \\ &\quad \left. (A - 5B + F)(L_1 - L_2) \neq 0, (4F(4F - 5A) + 225B^2 - 80BF) > 0 \right\} \\ \Omega_{ABF}^6 &= \left\{ (A, B, F) \in \mathbb{R}^3 : \frac{18\sqrt[3]{2}L_5^2 - 6\sqrt[3]{L_8}L_5 - 60\sqrt[3]{2}L_4L_6 + \sqrt[3]{4L_8^2}}{L_4\sqrt[3]{L_8}} > 0, \right. \\ &\quad \sqrt{L_9}(2h - \sqrt{L_9})(2h^2L_6 + 6hL_5\sqrt{L_9} + 15L_4L_9) \left( L_9(735AB \right. \\ &\quad \left. + 76AF + 600B^2 - 845BF + 168F^2) + 4h\sqrt{L_9}(-2F(19A \right. \\ &\quad \left. + 84F) + 225B^2 + 349BF) + 84Fh^2(7B + 8F) \right) \neq 0 \left. \right\}. \end{aligned}$$

**Teorema 4.1 (Existencia)** *En cada nivel de energía positiva  $H = h$ , con  $\varepsilon > 0$  suficientemente pequeño,  $A, B$  y  $F$  números reales arbitrarios, el sistema hamiltoniano (4.20) tiene familias de soluciones periódicas  $\varphi(t, \varepsilon) = (X(t, \varepsilon), Y(t, \varepsilon), p_X(t, \varepsilon), p_Y(t, \varepsilon))$  donde*

$$\begin{aligned} X(t, \varepsilon) &= r^* \cos(t) + O(\varepsilon), \\ Y(t, \varepsilon) &= \sqrt{2h - r^{*2}} \cos(t + \alpha^*) + O(\varepsilon), \\ p_X(t, \varepsilon) &= r^* \sin(t) + O(\varepsilon), \\ p_Y(t, \varepsilon) &= \sqrt{2h - r^{*2}} \sin(t + \alpha^*) + O(\varepsilon). \end{aligned}$$

*Las soluciones son contadas como sigue, existe*

(a) al menos dos familias de soluciones periódicas si  $(A, B, F) \in \Omega_{ABF}^1$ , y

$$(r^*, \alpha^*) = \left( 0, \pm \frac{1}{2} \arccos \left( -\frac{100B + 14F}{35B + 40F} \right) \right)$$

(b) al menos una familia de soluciones periódicas si  $(A, B, F) \in \Omega_{ABF}^2$ , y

$$(r^*, \alpha^*) = \left( \sqrt{2h}, \frac{1}{2} \arccos \left( \frac{18A^2 - 20AB - 8B^2}{B(7A + 10B)} \right) \right)$$

(c) al menos una familia de soluciones periódicas si  $(A, B, F) \in \Omega_{ABF}^3$ , y

$$(r^*, \alpha^*) = \left( \sqrt{\frac{3h(5B + 2F)}{-5A + 5B + 3F}}, 0 \right)$$

(d) al menos una familia de soluciones periódicas si  $(A, B, F) \in \Omega_{ABF}^4$ , y

$$(r^*, \alpha^*) = \left( \sqrt{-\frac{h \left( \sqrt{4F(4F - 5A)} + 225B^2 - 80BF + 15B - 6F \right)}{5(A - 5B + F)}}, 0 \right)$$

(e) al menos una familia de soluciones periódicas si  $(A, B, F) \in \Omega_{ABF}^5$ , y

$$(r^*, \alpha^*) = \left( \sqrt{\frac{h \left( \sqrt{4F(4F - 5A)} + 225B^2 - 80BF - 15B + 6F \right)}{5(A - 5B + F)}}, 0 \right)$$

(f) al menos dos familias de soluciones periódicas si  $(A, B, F) \in \Omega_{ABF}^6$ , y

$$(r^*, \alpha^*) = \left( \sqrt{\frac{18\sqrt[3]{2}L_5^2 - 6\sqrt[3]{L_8}L_5 - 60\sqrt[3]{2}L_4L_6 + \sqrt[3]{4L_8^2}}{30L_4\sqrt[3]{L_8}}}, \pm\pi/2 \right),$$

donde  $L_4, L_5, L_6$  y  $L_8$  son expresiones dadas previa al Teorema.

**Demostración.** Siguiendo el método del promedio, encontraremos los ceros  $(r^*, \alpha^*)$  del sistema (4.31) de modo que el determinante de la matriz jacobiana de  $f_2$  en los ceros  $(r^*, \alpha^*)$  sea no nulo. De (4.30) se tiene que

$$\begin{aligned} f_{21} = & \frac{r}{4800} (r^2 - 2h) \left( r^2 \sin(4\alpha) (r^2 - 2h) (675B^2 - 2F(A + 40B)) - \sin(2\alpha) \right. \\ & \left( r^4 (735AB + 80AF - 750B^2 - 685BF + 168F^2) + 4hr^2 (-8F(5A + 21F) \right. \\ & \left. \left. + 900B^2 + 269BF) + 84Fh^2(7B + 8F) \right) \right). \end{aligned}$$

Resolviendo la ecuación  $f_{21}(r, \alpha) = 0$ , obtenemos los siguientes tres casos:

**Caso 1:**  $r = 0$ ,

**Caso 2:**  $r = \sqrt{2h}$ ,

**Caso 3:**  $\left( r^2 \sin(4\alpha)(r^2 - 2h)(675B^2 - 2F(A + 40B)) - \sin(2\alpha)(r^4(735AB + 80AF - 750B^2 - 685BF + 168F^2) + 4hr^2(-8F(5A + 21F) + 900B^2 + 269BF) + 84Fh^2(7B + 8F)) \right) = 0$ .

A continuación analizaremos cada caso.

**Caso 1:** Si  $r = 0$ , entonces la función  $f_{21} \equiv 0$  y  $f_{22}$  en la variable  $\alpha$  es:

$$f_{22}(0, \alpha) = \frac{7}{1000} F h^3 (5 \cos(2\alpha)(7B + 8F) + 2(50B + 7F)).$$

Resolviendo la ecuación  $f_{22}(0, \alpha) = 0$ , tenemos como raíces a

$$\alpha^* = \frac{n}{2} \arccos \left( -\frac{100B + 14F}{35B + 40F} \right) + k\pi,$$

donde  $n = \pm 1$  y  $k \in \mathbb{Z}$ . El sistema (4.31) tiene para cada  $k \in \{0, 1\}$  dos ceros dados por

$$(r^*, \alpha^*) = \left( 0, \frac{n}{2} \arccos \left( -\frac{100B + 14F}{35B + 40F} \right) + k\pi \right). \quad (4.32)$$

Notar que los ceros (4.32) están bien definidos para los valores de los parámetros  $B$  y  $F$  que satisfacen las condiciones:

$$\left| \frac{50B + 7F}{7B + 8F} \right| < \frac{5}{2}, \quad 7B + 8F \neq 0. \quad (4.33)$$

Por otro lado, es fácil ver que el Jacobiano de  $f_2$  evaluado en  $(r^*, \alpha^*)$  es

$$J_{f_2(r^*, \alpha^*)} = \frac{17199}{500000} F^2 (25B^2 - 4F^2) h^6,$$

que es no nulo si

$$F (25B^2 - 4F^2) \neq 0. \quad (4.34)$$

Por el método del promedio de segundo orden podemos concluir que los ceros obtenidos anteriormente corresponden a diferentes condiciones iniciales de dos soluciones periódicas del sistema diferencial (4.26). Esto completa la demostración del Teorema 4.1 parte (a).

**Observación 4.3** Note que las condiciones sobre parámetros los  $B$  y  $F$  en (4.33) y (4.34) forma un conjunto no vacío (ver Figura 4.1).

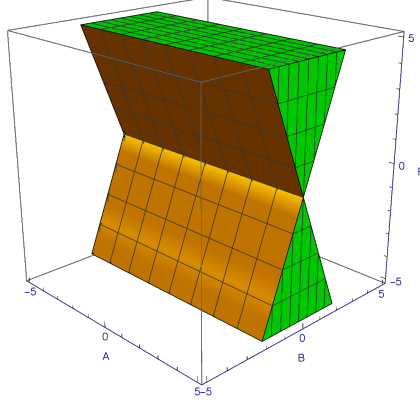


Figura 4.1: Región en el espacio de parámetros  $(A, B, F) \in \Omega_{ABF}^1$ .

**Caso 2:** Si  $r = \sqrt{2h}$ , tenemos que la función  $f_{21} \equiv 0$  y  $f_{22}$  en la variable  $\alpha$  es:

$$f_{22}(\sqrt{2h}, \alpha) = \frac{7}{40}h^3 (18A^2 - B \cos(2\alpha)(7A + 10B) - 20AB - 8B^2).$$

Resolviendo la ecuación  $f_{22}(\sqrt{2h}, \alpha) = 0$ , obtenemos como raíces a

$$\alpha^* = \frac{n}{2} \arccos \left( \frac{18A^2 - 20AB - 8B^2}{B(7A + 10B)} \right) + k\pi,$$

donde  $n = -1, 1$  y  $k \in \mathbb{Z}$ . Por la periodicidad de la función coseno, el sistema (4.31) tiene para cada  $k \in \{0, 1\}$  dos ceros dados por

$$(r^*, \alpha^*) = \left( \sqrt{2h}, \frac{n}{2} \arccos \left( \frac{18A^2 - 20AB - 8B^2}{B(7A + 10B)} \right) + k\pi \right), \quad (4.35)$$

donde  $n = -1, 1$  y estos ceros están bien definidos para los valores de los parámetros  $A$  y  $B$  que satisfacen las condiciones:

$$\left| \frac{9A^2 - 10AB - 4B^2}{B(7A + 10B)} \right| < \frac{1}{2}, \quad B(7A + 10B) \neq 0. \quad (4.36)$$

El Jacobiano de  $f_2$  evaluado en los ceros (4.35) es:

$$J_{f_2(\sqrt{2h}, \alpha^*)} = \frac{441}{400} (A - 2B)(9A - 2B)(2A - B)(2A + B)h^6,$$

el cual es no nulo si

$$(A - 2B)(9A - 2B)(2A - B)(2A + B) \neq 0. \quad (4.37)$$

Por el método del promedio de segundo orden podemos concluir que los cuatro ceros (4.35) corresponde a diferentes condiciones iniciales de la misma solución periódica del sistema diferencial (4.26). Por tanto existe al menos una solución periódica del sistema y esto completa la demostración del Teorema 4.1 parte (b).

**Observación 4.4** Note que las condiciones sobre los parámetros  $A$  y  $B$  en (4.36) y (4.37) forma un conjunto no vacío (ver Figura 4.2).

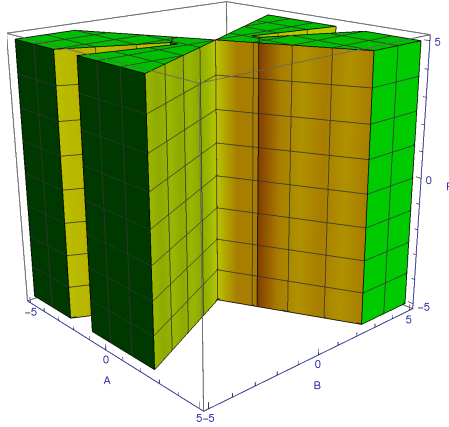


Figura 4.2: Región en el espacio de parámetros  $(A, B, F) \in \Omega_{ABF}^2$ .

**Caso 3:** Resolviendo en la variable  $\alpha$ , la ecuación

$$\begin{aligned} & \left( r^2 \sin(4\alpha)(r^2 - 2h)(675B^2 - 2F(A + 40B)) - \sin(2\alpha)(r^4(735AB + 80AF \right. \\ & - 750B^2 - 685BF + 168F^2) + 4hr^2(-8F(5A + 21F) + 900B^2 + 269BF) \\ & \left. + 84Fh^2(7B + 8F)) \right) = 0, \end{aligned}$$

se puede observar que la expresión anterior es nula si  $\alpha = k\pi$  con  $k = 0, 1$  y  $\alpha = m\frac{\pi}{2}$  con  $m = \pm 1$ .

**Subcaso 3.1:** Si  $\alpha = 0$ , entonces la función  $f_{21} \equiv 0$  y  $f_{22}$  en la variable  $r$  es:

$$f_{22}(r, 0) = \frac{63}{4000} \left( r^2(5A - 5B - 3F) + 3h(5B + 2F) \right) \left( 5r^4(A - 5B + F) + 6hr^2(5B - 2F) + 4Fh^2 \right).$$

Resolviendo  $f_{22}(r, 0) = 0$ , obtenemos las siguientes raíces:

$$\begin{cases} r_1^* &= \sqrt{\frac{3h(5B + 2F)}{-5A + 5B + 3F}}, \\ r_2^* &= \sqrt{\frac{h \left( \sqrt{4F(4F - 5A) + 225B^2 - 80BF} + 15B - 6F \right)}{5(A - 5B + F)}}, \\ r_3^* &= \sqrt{\frac{h \left( \sqrt{4F(4F - 5A) + 225B^2 - 80BF} - 15B + 6F \right)}{5(A - 5B + F)}}. \end{cases}$$

Notar que el sistema (4.31) tiene tres ceros y el primero es dado por

$$(r_1^*, \alpha_1^*) = \left( \sqrt{\frac{3h(5B + 2F)}{-5A + 5B + 3F}}, 0 \right), \quad (4.38)$$

el cual está bien definido si

$$\frac{5B + 2F}{-5A + 5B + 3F} > 0. \quad (4.39)$$

Evaluando el Jacobiano en el cero  $(r_1^*, \alpha_1^*)$  se tiene

$$J_{f_2}(r_1^*, \alpha_1^*) = \frac{17199}{12800(5A - 5B - 3F)^5} (2A + B)(5B + 2F)L_3 h^6,$$

que es no nulo si

$$(5A - 5B - 3F)(2A + B)L_3 \neq 0. \quad (4.40)$$

La expresión para  $L_3$  es dada previa al Teorema 4.1. El segundo cero  $(r_2^*, \alpha_1^*)$  del sistema (4.31) es dado por

$$(r_2^*, \alpha_1^*) = \left( \sqrt{\frac{h \left( \sqrt{4F(4F - 5A) + 225B^2 - 80BF} + 15B - 6F \right)}{5(A - 5B + F)}}, 0 \right). \quad (4.41)$$

Para que el cero  $(r_2^*, \alpha_1^*)$  esté bien definido se debe cumplir que

$$\frac{\sqrt{4F(4F - 5A) + 225B^2 - 80BF} + 15B - 6F}{(A - 5B + F)} < 0,$$

y

$$(A - 5B + F) \neq 0, (4F(4F - 5A) + 225B^2 - 80BF) > 0. \quad (4.42)$$

Evaluando el Jacobiano en el cero (4.41) se tiene

$$J_{f_2}(r_2^*, \alpha_1^*) = - \frac{441h^6}{625000000(A - 5B + F)^5} (L_1 + L_2) \left( 15B - 6F + \sqrt{4F(4F - 5A) + 225B^2 - 80BF} \right),$$

que es no nulo si

$$(A - 5B + F)(L_1 + L_2) \neq 0. \quad (4.43)$$

Las expresiones para  $L_1$  y  $L_2$  son dadas previa al Teorema 4.1. Finalmente el tercer cero  $(r_3^*, \alpha_1^*)$  del sistema (4.31) es dado por

$$(r_3^*, \alpha_1^*) = \left( \sqrt{\frac{h \left( \sqrt{4F(4F - 5A) + 225B^2 - 80BF} - 15B + 6F \right)}{5(A - 5B + F)}}, 0 \right), \quad (4.44)$$

que está bien definido si

$$\frac{\sqrt{4F(4F - 5A) + 225B^2 - 80BF} - 15B + 6F}{(A - 5B + F)} > 0,$$

y

$$(A - 5B + F) \neq 0, (4F(4F - 5A) + 225B^2 - 80BF) > 0. \quad (4.45)$$

Evaluando el Jacobiano en el cero (4.44) se tiene

$$J_{f_2}(r_3^*, \alpha_1^*) = - \frac{441h^6}{625000000(A - 5B + F)^5} (L_1 - L_2) \left( -15B + 6F + \sqrt{4F(4F - 5A) + 225B^2 - 80BF} \right),$$

que es no nulo si

$$(A - 5B + F)(L_1 - L_2) \neq 0. \quad (4.46)$$

Por tanto podemos aplicar el método del promedio de segundo orden para concluir que los ceros (4.38), (4.41) y (4.44) proporcionan al menos tres soluciones periódicas del sistema (4.26). Esto completa la demostración del Teorema 4.1 parte (c), (d) y (e).

**Observación 4.5** Note que las condiciones sobre los parámetros  $A, B, F$  en (4.39)-(4.40) así como (4.42)-(4.43) y (4.45)-(4.46) forman conjuntos no vacíos (ver Figuras 4.3 y 4.4).

Figura 4.3: Regiones en el espacio de parámetros  $(A, B, F) \in \Omega_{ABF}^i, i = 3, 4$ .

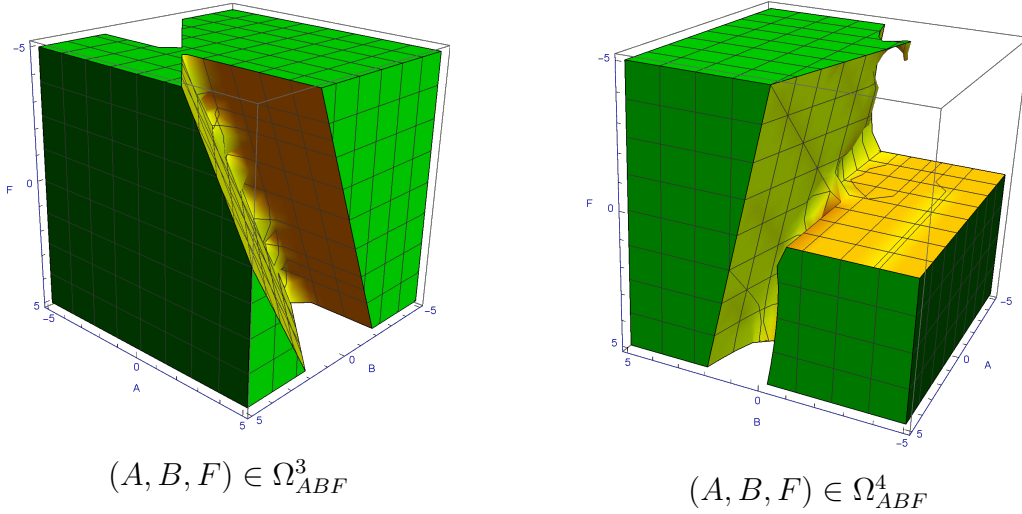
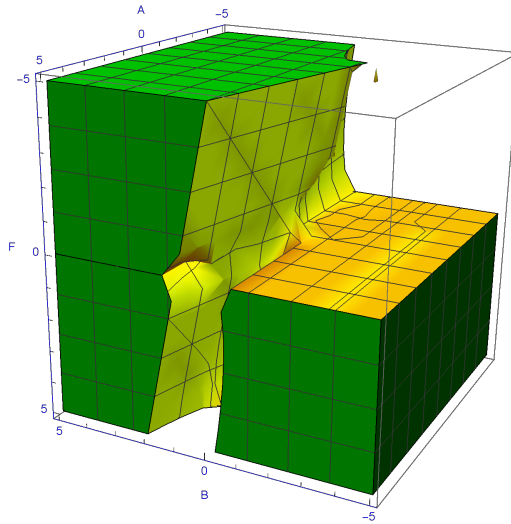


Figura 4.4: Región en el espacio de parámetros  $(A, B, F) \in \Omega_{ABF}^5$



**Subcaso 3.2:** Si  $\alpha_2 = \pm \frac{\pi}{2}$ , entonces la función  $f_{21} \equiv 0$  y  $f_{22}$  en la variable  $r$  es:

$$f_{22}(r, \pm\pi/2) = \frac{1}{12000} \left( 5r^6 (945A^2 - 2730AB + 698AF + 1725B^2 - 850BF + 105F^2) \right. \\ \left. + 2h^2r^2(3490AF + 6525B^2 - 9710BF + 2142F^2) + 3hr^4(6825AB \right. \\ \left. - 3490AF - 7575B^2 + 5615BF - 882F^2) + 1092Fh^3(5B - 2F) \right).$$

Resolviendo la ecuación  $f_{22}(r, \pm\pi/2) = 0$ , tenemos sólo una raíz real positiva

$$r^* = \sqrt{\frac{18\sqrt[3]{2}L_5^2 - 6\sqrt[3]{L_8}L_5 - 60\sqrt[3]{2}L_4L_6 + \sqrt[3]{4L_8^2}}{30L_4\sqrt[3]{L_8}}}.$$

Notar que el sistema (4.31) tiene un cero  $(r^*, \alpha_2^*)$  dado por

$$(r^*, \alpha_2^*) = \left( \sqrt{\frac{18\sqrt[3]{2}L_5^2 - 6\sqrt[3]{L_8}L_5 - 60\sqrt[3]{2}L_4L_6 + \sqrt[3]{4L_8^2}}{30L_4\sqrt[3]{L_8}}}, \pm\pi/2 \right), \quad (4.47)$$

que está bien definido para los valores de los parámetros  $A, B$  y  $F$  que satisfacen la condición:

$$\frac{18\sqrt[3]{2}L_5^2 - 6\sqrt[3]{L_8}L_5 - 60\sqrt[3]{2}L_4L_6 + \sqrt[3]{4L_8^2}}{L_4\sqrt[3]{L_8}} > 0. \quad (4.48)$$

Las expresiones para  $L_4, L_5, L_6, L_8$  son dadas previas al Teorema 4.1. Evaluando el Jacobiano en  $(r^*, \alpha_2^*)$  se tiene

$$J_{f_2(r^*, \alpha_2^*)} = \frac{1}{14400000} \sqrt{L_9} (2h - \sqrt{L_9}) (2h^2L_6 + 6hL_5\sqrt{L_9} + 15L_4L_9) \left( L_9(735AB \right. \\ \left. + 76AF + 600B^2 - 845BF + 168F^2) + 4h\sqrt{L_9}(-2F(19A + 84F) \right. \\ \left. + 225B^2 + 349BF) + 84Fh^2(7B + 8F) \right),$$

que es no nulo si

$$\sqrt{L_9} (2h - \sqrt{L_9}) (2h^2L_6 + 6hL_5\sqrt{L_9} + 15L_4L_9) \left( L_9(735AB \right. \\ \left. + 76AF + 600B^2 - 845BF + 168F^2) + 4h\sqrt{L_9}(-2F(19A \right. \\ \left. + 84F) + 225B^2 + 349BF) + 84Fh^2(7B + 8F) \right) \neq 0. \quad (4.49)$$

La expresión para  $L_9$  es dada previa al Teorema 4.1. Por el método del promedio de segundo orden concluimos que los ceros (4.47) proporcionan al menos dos soluciones periódicas de (4.26). Esto completa la demostración del Teorema 4.1 parte (f).

**Observación 4.6** Note que las condiciones sobre los parámetros  $A, B$  y  $F$  en (4.48) y (4.49) forman un conjunto no vacío (ver Figura 4.5).

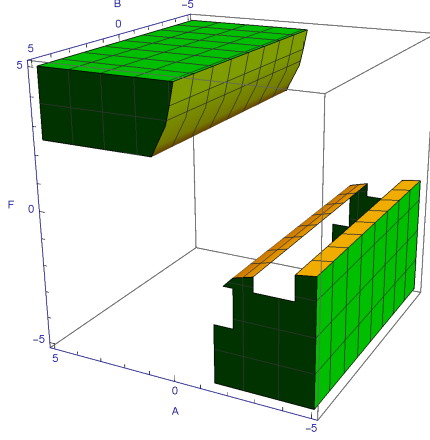


Figura 4.5: Región en el espacio de parámetros  $(A, B, F) \in \Omega_{ABF}^6$ .

Esto finaliza la prueba del Teorema de existencia de soluciones periódicas  $\square$

**Corolario 4.1** *La familia de soluciones periódicas  $(x(t, \varepsilon), y(t, \varepsilon), p_x(t, \varepsilon), p_y(t, \varepsilon))$  del sistema hamiltoniano (4.19) asociado a los ceros  $(r^*, \alpha^*)$  de la función promedio, en cada nivel de energía positiva  $H = h$  son dadas por*

$$\begin{aligned} x(t, \varepsilon) &= r^* \cos(t) + O(\varepsilon), \\ y(t, \varepsilon) &= \rho^* \cos(t + \alpha^*) + O(\varepsilon), \\ p_x(t, \varepsilon) &= r^* \sin(t) + O(\varepsilon), \\ p_y(t, \varepsilon) &= \rho^* \sin(t + \alpha^*) + O(\varepsilon). \end{aligned}$$

A continuación presentamos el Teorema de estabilidad para las soluciones periódicas determinadas en el Teorema 4.1.

**Teorema 4.2 (Estabilidad)** *Todas las familias de soluciones periódicas del Teorema 4.1 son inestables.*

**Demostración.** Para determinar el tipo de estabilidad de las soluciones periódicas dadas en el Teorema 4.1 se aplicará el Teorema 2.6 que dice que el tipo de estabilidad de las soluciones periódicas viene dado por el signo de los autovalores  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  de la matriz jacobiana  $J_{f_2(r, \alpha)}$  evaluada en los ceros  $(r^*, \alpha^*)$ .

- (i) Las dos familias de soluciones periódicas dada en el Teorema 4.1 parte (a) son inestables, pues los autovalores de la matriz Jacobiana de  $f_2$  evaluada en los ceros  $(r^*, \alpha^*) = \left(0, \pm \frac{1}{2} \arccos \left(-\frac{100B + 14F}{35B + 40F}\right) + k\pi\right)$ ,  $k \in \{0, 1\}$  son

$$\lambda_1 = -\frac{1}{1000} 21\sqrt{39}Fh^3(7B + 8F) \sqrt{\frac{4F^2 - 25B^2}{(7B + 8F)^2}}, \quad \lambda_2 = -2\lambda_1.$$

Notar que las condiciones de inestabilidad sobre los parámetros  $A, B$  y  $F$  es no vacía si  $(A, B, F) \in \Omega_{ABF}^1$  y  $\frac{4F^2 - 25B^2}{(7B + 8F)^2} > 0$ .

- (ii) La familia de soluciones periódicas dada en el Teorema 4.1 parte (b) son inestables, pues los autovalores de la matriz Jacobiana de  $f_2$  evaluada en el cero  $(r^*, \alpha^*) = \left(\sqrt{2h}, \frac{1}{2} \arccos \left(\frac{18A^2 - 20AB - 8B^2}{B(7A + 10B)}\right)\right)$  son

$$\lambda_1 = -\frac{21}{20} Bh^3 \sqrt{-\frac{(A - 2B)(9A - 2B)(2A - B)(2A + B)}{B^2(7A + 10B)^2}} (7A + 10B),$$

$$\lambda_2 = -\lambda_1.$$

Podemos observar que las condiciones de inestabilidad sobre los parámetros  $A, B$  y  $F$  es no vacía si  $(A, B, F) \in \Omega_{ABF}^2$ ,  $B(7A + 10B) > 0$  y  $(A - 2B)(9A - 2B)(2A - B)(2A + B) < 0$ .

- (iii) La familia de soluciones periódicas dada en el Teorema 4.1 parte (c) es inestable, pues los autovalores de la matriz Jacobiana de  $f_2$  evaluada en el cero  $(r^*, \alpha^*) = \left(\sqrt{\frac{3h(5B + 2F)}{-5A + 5B + 3F}}, 0\right)$  es

$$\lambda_1 = \frac{21}{80} h^6 \sqrt{-\frac{39L_3(2A + B)(5B + 2F)}{2(5A - 5B - 3F)^5}}, \quad \lambda_2 = -\lambda_1.$$

Observemos que las condiciones de inestabilidad sobre los parámetros  $A, B$  y  $F$  es no vacía si  $(A, B, F) \in \Omega_{ABF}^3$  y  $L_3(2A + B) < 0$ .

- (iv) La familia de soluciones periódicas dada en el Teorema 4.1 parte (d) es inestable, pues los autovalores  $\lambda_1, \lambda_2$  de la matriz Jacobiana de  $f_2$  evaluada en

el cero  $(r_2^*, 0)$ , satisfacen

$$\lambda_1 = - \frac{21h^3}{25000(A - 5B + F)^3} \left( (\sqrt{-20F(A + 4B) + 225B^2 + 16F^2} + 15B - 6F) \right. \\ \left. (L_1 + L_2)(A - 5B + F) \right)^{1/2},$$

$$\lambda_2 = -\lambda_1.$$

Observemos que las condiciones de inestabilidad sobre los parámetros  $A, B$  y  $F$  es no vacía si  $(A, B, F) \in \Omega_{ABF}^4$ ,  $(A - 5B + F) \neq 0$  y  $(L_1 + L_2)(A - 5B + F) \left( \sqrt{-20F(A + 4B) + 225B^2 + 16F^2} + 15B - 6F \right) > 0$ .

- (v) La familia de soluciones periódicas dada en el Teorema 4.1 parte (e) es inestable, pues los autovalores  $\lambda_1, \lambda_2$  de la matriz Jacobiana de  $f_2$  evaluada en el cero  $(r_3^*, 0)$  satisfacen

$$\lambda_1 = - \frac{21h^3}{25000(A - 5B + F)^3} \left( \left( \sqrt{4F(4F - 5A) + 225B^2 - 80BF - 15B + 6F} \right) \right. \\ \left. (L_1 - L_2)(-(A - 5B + F)) \right)^{1/2},$$

$$\lambda_2 = -\lambda_1.$$

Observemos que las condiciones de inestabilidad sobre los parámetros  $A, B$  y  $F$  es no vacía si  $(A, B, F) \in \Omega_{ABF}^5$ ,  $(A - 5B + F) \neq 0$  y  $(L_1 - L_2)(A - 5B + F) \left( \sqrt{4F(4F - 5A) + 225B^2 - 80BF - 15B + 6F} \right) < 0$ .

- (vi) La familia de soluciones periódicas dada en el Teorema 4.1 parte (f) es inestable, pues los autovalores  $\lambda_1, \lambda_2$  de la matriz Jacobiana de  $f_2$  evaluada en el cero  $(r^*, \alpha^*) = (r, \pm\pi/2)$ , con  $r = \sqrt{\frac{18\sqrt[3]{2}L_5^2 - 6\sqrt[3]{L_8}L_5 - 60\sqrt[3]{2}L_4L_6 + \sqrt[3]{4L_8^2}}{30L_4\sqrt[3]{L_8}}}$  satisfacen  $\lambda_1 = -\lambda_2$ .

Los autovalores no están escritos por su extensión algebraica, esto concluye la demostración del Teorema.  $\square$

En la siguiente sección estudiaremos analíticamente las soluciones periódicas de un sistema Hamiltoniano con potencial polinomial de grado seis usando el método del promedio de segundo orden.

### 4.3. Sistema Hamiltoniano con potencial polinomial de grado seis

En esta sección consideraremos un Hamiltoniano perturbado de la forma:

$$H = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2) + \varepsilon V_5(x, y) + \varepsilon^2 V_6(x, y), \quad (4.50)$$

donde  $x, y, p_x, p_y \in \mathbb{R}$  y  $V_5(x, y)$ ,  $V_6(x, y)$  son polinomios homogéneos de la forma

$$\begin{aligned} V_5(x, y) &= \frac{A}{5}x^5 + Bx^3y^2 + \frac{1}{5}Fxy^4, \\ V_6(x, y) &= \frac{\Lambda}{6}x^6 + \frac{1}{2}mx^2y^4 + \frac{\lambda}{6}y^6. \end{aligned}$$

Notemos que la función perturbada dada en (4.50) depende de seis parámetros reales. El propósito es estudiar la existencia y estabilidad de soluciones periódicas para el sistema hamiltoniano asociado a  $H$ .

**Observación 4.7** Notar que cuando  $\Lambda = m = \lambda = 0$ , es decir,  $V_6 \equiv 0$  y el parámetro  $\varepsilon = 1$ , la función Hamiltoniana (4.50) se reduce a

$$H = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2) + \frac{A}{5}x^5 + Bx^3y^2 + \frac{1}{5}Fxy^4,$$

la cual fue estudiada en la sección 4.2. Nuestro propósito ahora es considerar el caso cuando  $\Lambda, m, \lambda$ , son no nulos simultáneamente, y  $\varepsilon$  es un pequeño parámetro real. El estudio bajo este enfoque ya es considerado en la literatura ver por ejemplo [24, 36, 43].

Consideremos el sistema Hamiltoniano asociado a (4.50)

$$\begin{aligned} \dot{x} &= p_x, \\ \dot{y} &= p_y, \\ \dot{p}_x &= -x - \varepsilon \left( Ax^4 + 3Bx^2y^2 + \frac{1}{5}Fy^4 \right) - \varepsilon^2 (mxy^4 + \Lambda x^5) \\ \dot{p}_y &= -y - \varepsilon \left( 2Bx^3y + \frac{4}{5}Fxy^3 \right) - \varepsilon^2 (2mx^2y^3 + \lambda y^5). \end{aligned} \quad (4.51)$$

Para determinar soluciones periódicas del sistema (4.51) usaremos la teoría del promedio. Específicamente proporcionaremos a través del método del promedio de

segundo orden las condiciones suficientes en los parámetros  $A, B, F, \Lambda, m$  y  $\lambda$  para garantizar la existencia y determinar el tipo de estabilidad de soluciones periódicas del sistema diferencial (4.51).

### 4.3.1. El promedio de segundo orden aplicado al sistema hamiltoniano de grado seis

Con el propósito de utilizar el método del promedio de segundo orden tenemos que la periodicidad en la variable independiente del sistema diferencial (4.51) es necesario, por lo que introducimos el siguiente cambio de variables que permite obtener un sistema  $2\pi$  periódico. Consideremos el cambio de variable  $(x, y, p_x, p_y) \rightarrow (r, \theta, \rho, \alpha) \in \mathbb{R}^+ \times S^1 \times \mathbb{R}^+ \times S^1$  definida por

$$x = r \cos \theta, \quad y = \rho \cos(\theta + \alpha), \quad p_x = r \sin \theta, \quad p_y = \rho \sin(\theta + \alpha),$$

para  $r > 0$  y  $\rho > 0$ . El nivel de energía  $h$  de  $H$  en coordenadas polares es:

$$\begin{aligned} h = & \frac{1}{2}(r^2 + \rho^2) + \varepsilon \left( \frac{1}{5} A r^5 \cos^5(\theta) + B \rho^2 r^3 \cos^3(\theta) \cos^2(\alpha + \theta) \right. \\ & + \frac{1}{5} F \rho^4 r \cos(\theta) \cos^4(\alpha + \theta) \left. \right) + \varepsilon^2 \left( \frac{1}{6} \lambda \rho^6 \cos^6(\alpha + \theta) \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} m \rho^4 r^2 \cos^2(\theta) \cos^4(\alpha + \theta) + \frac{1}{6} \Lambda r^6 \cos^6(\theta) \right) \end{aligned} \quad (4.52)$$

y las nuevas ecuaciones de movimiento son dados por:

$$\begin{aligned} \dot{r} = & \frac{1}{r} \varepsilon \left( -A r^5 \sin(\theta) \cos^4(\theta) - 3B r^3 (2h - r^2) \sin(\theta) \cos^2(\theta) \cos^2(\alpha + \theta) - \frac{1}{5} F r (2h - \right. \\ & \left. r^2)^2 \sin(\theta) \cos^4(\alpha + \theta) \right) + \frac{1}{r} \varepsilon^2 \left( -m r^2 (2h - r^2)^2 \sin(\theta) \cos(\theta) \cos^4(\alpha + \theta) - \right. \\ & \left. \Lambda r^6 \sin(\theta) \cos^5(\theta) \right), \\ \dot{\theta} = & -1 - \frac{1}{r} \varepsilon \left( A r^4 \cos^5(\theta) + 3B r^2 (2h - r^2) \cos^3(\theta) \cos^2(\alpha + \theta) + \frac{1}{5} F (2h - \right. \\ & \left. r^2)^2 \cos(\theta) \cos^4(\alpha + \theta) \right) + \frac{1}{r} \varepsilon^2 \left( m r (2h - r^2)^2 \cos^2(\theta) \cos^4(\alpha + \theta) + \Lambda r^5 \cos^6(\theta) \right), \\ \dot{\rho} = & \frac{1}{\sqrt{2h - r^2}} \varepsilon \left( -2B r^3 (2h - r^2) \cos^3(\theta) \sin(\alpha + \theta) \cos(\alpha + \theta) - \frac{4}{5} F r (2h - \right. \\ & \left. r^2)^2 \cos(\theta) \sin(\alpha + \theta) \cos^3(\alpha + \theta) \right) + \varepsilon^2 \frac{1}{\sqrt{2h - r^2}} \left( - (2h - r^2)^3 \lambda \sin(\alpha + \right. \\ & \left. \theta) \cos^5(\alpha + \theta) - 2m r^2 (2h - r^2)^2 \cos^2(\theta) \sin(\alpha + \theta) \cos^3(\alpha + \theta) \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{\rho} &= \frac{1}{\sqrt{2h-r^2}} \varepsilon \left( -2Br^3(2h-r^2) \cos^3(\theta) \sin(\alpha+\theta) \cos(\alpha+\theta) - \frac{4}{5} Fr(2h-r^2)^2 \cos(\theta) \sin(\alpha+\theta) \cos^3(\alpha+\theta) \right) + \varepsilon^2 \frac{1}{\sqrt{2h-r^2}} \left( -(2h-r^2)^3 \lambda \sin(\alpha+\theta) \cos^5(\alpha+\theta) - 2mr^2(2h-r^2)^2 \cos^2(\theta) \sin(\alpha+\theta) \cos^3(\alpha+\theta) \right), \\
\dot{\alpha} &= \frac{1}{r} \varepsilon \left( Ar^4 \cos^5(\theta) - \frac{1}{\sqrt{2h-r^2}} \left( 2Br^3 \sqrt{2h-r^2} \cos^3(\theta) \cos^2(\alpha+\theta) + \frac{4}{5} Fr(2h-r^2)^{3/2} \cos(\theta) \cos^4(\alpha+\theta) \right) + 3Br^2(2h-r^2) \cos^3(\theta) \cos^2(\alpha+\theta) + \frac{1}{5} F(2h-r^2)^2 \cos(\theta) \cos^4(\alpha+\theta) \right) + \frac{1}{r} \varepsilon^2 \left( -\frac{1}{\sqrt{2h-r^2}} (2mr^2(2h-r^2)^{3/2} \cos^2(\theta) \cos^4(\alpha+\theta) + \lambda(2h-r^2)^{5/2} \cos^6(\alpha+\theta)) + mr(2h-r^2)^2 \cos^2(\theta) \cos^4(\alpha+\theta) + \Lambda r^5 \cos^6(\theta) \right).
\end{aligned} \tag{4.53}$$

Observemos en este sistema que si tomamos la variable  $\theta$  como la nueva variable independiente en lugar de  $t$ , obtenemos la periodicidad necesaria para escribir el sistema diferencial (4.53) en su forma estándar de modo que se pueda aplicar el método del promedio de segundo orden. Reescribiendo el lado derecho del sistema (4.53) en su desarrollo de series de Taylor de  $\varepsilon$  en una vecindad del origen y obtenemos el siguiente sistema:

$$\begin{aligned}
r' &= \frac{1}{5} \varepsilon \sin(\theta) \left( 5Ar^4 \cos^4(\theta) - 15Br^2(r^2-2h) \cos^2(\theta) \cos^2(\alpha+\theta) + F(r^2-2h)^2 \cos^4(\alpha+\theta) \right) + \frac{1}{25} \varepsilon^2 \sin(\theta) \left( 5(5mr(r^2-2h)^2 \cos(\theta) \cos^4(\alpha+\theta) + 5\Lambda r^5 \cos^5(\theta)) - \frac{1}{r} \cos(\theta) \left( 5Ar^4 \cos^4(\theta) - 15Br^2(r^2-2h) \cos^2(\theta) \cos^2(\alpha+\theta) + F(r^2-2h)^2 \cos^4(\alpha+\theta) \right)^2 \right) + O(\varepsilon^3), \\
\rho' &= \frac{2}{5} \varepsilon \sqrt{2h-r^2} \sin(\alpha+\theta) \cos(\alpha+\theta) \left( 5Br^3 \cos^3(\theta) - 2Fr(r^2-2h) \cos(\theta) \cos^2(\alpha+\theta) \right) + \frac{1}{25} \varepsilon^2 \sqrt{2h-r^2} \sin(\alpha+\theta) \cos(\alpha+\theta) \left( 10r^2(r^2-2h) \cos^2(\theta) \cos^2(\alpha+\theta) (r^2 \cos^4(\theta) (2AF + 15B^2) - 5m) - 50ABr^6 \cos^8(\theta) + 5(r^2-2h)^2 \cos^4(\alpha+\theta) (5\lambda - 14BFr^2 \cos^4(\theta)) + 4F^2(r^2-2h)^3 \cos^2(\theta) \cos^6(\alpha+\theta) \right) + O(\varepsilon^3),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\alpha' = & \varepsilon \left( -Ar^3 \cos^5(\theta) + Br(r(3r+2) - 6h) \cos^3(\theta) \cos^2(\alpha + \theta) - \frac{1}{5r} F(r^2 - 2h)(r(r+4) - 2h) \cos(\theta) \cos^4(\alpha + \theta) \right) \\
& + \frac{1}{25r^2} \varepsilon^2 \left( (5Ar^4 \cos^5(\theta) - 15Br^2(r^2 - 2h) \cos^3(\theta) \cos^2(\alpha + \theta) + F(r^2 - 2h)^2 \cos(\theta) \cos^4(\alpha + \theta))(5Ar^4 \cos^5(\theta) - 5Br^2(r(3r+2) - 6h) \cos^3(\theta) \cos^2(\alpha + \theta) + F(r^2 - 2h)(r(r+4) - 2h) \cos(\theta) \cos^4(\alpha + \theta)) - 5r(5mr(r^2 - 2h)(r(r+2) - 2h) \cos^2(\theta) \cos^4(\alpha + \theta) - 5\lambda(r^2 - 2h)^2 \cos^6(\alpha + \theta) + 5\Lambda r^5 \cos^6(\theta)) \right) + O(\varepsilon^3).
\end{aligned} \tag{4.54}$$

Recordemos que prima (') es la derivada con respecto a la variable  $\theta$ . El nuevo sistema (4.54) es  $2\pi$ -periódico en la variable  $\theta$ . Restringiendo el sistema (4.54) a cada nivel de energía positivo  $H = h$ , y resolviendo la ecuación (4.52) para  $\rho$  en  $\varepsilon = 0$ , tenemos que

$$\rho = \sqrt{2h - r^2}. \tag{4.55}$$

Sustituyendo  $\rho$  en el sistema (4.54) obtenemos el siguiente sistema diferencial

$$\begin{aligned}
r' = & \frac{1}{5} \sin(\theta) \left( 5Ar^4 \cos^4(\theta) - 15Br^2(r^2 - 2h) \cos^2(\theta) \cos^2(\alpha + \theta) + F(r^2 - 2h)^2 \cos^4(\alpha + \theta) \right) \varepsilon + \frac{1}{25r} \sin(\theta) \cos(\theta) \left( 25r^6 \cos^4(\theta) (\Lambda - A^2 r^2 \cos^4(\theta)) - r^2(r^2 - 2h) \cos^4(\alpha + \theta) (r^2 \cos^4(\theta) (-20AFh + 6AFr^2 + 75B^2(r^2 - 6h)) + 25m(2h - r^2)) + 60ABr^6(2r^2 - 5h) \cos^6(\theta) \cos^2(\alpha + \theta) - 20BFr^2(r^2 - 2h)^2(3h + r^2) \cos^2(\theta) \cos^6(\alpha + \theta) + F^2(r^2 - 2h)^3(2h + 3r^2) \cos^8(\alpha + \theta) \right) \varepsilon^2 + O(\varepsilon^3), \\
\alpha' = & \left( -Ar^3 \cos^5(\theta) + Br(5r^2 - 6h) \cos^3(\theta) \cos^2(\alpha + \theta) - \frac{1}{5r} F(r^2 - 2h)(5r^2 - 2h) \cos(\theta) \cos^4(\alpha + \theta) \right) \varepsilon + \frac{1}{25} \left( 25r^4 \cos^6(\theta) (A^2 r^2 \cos^4(\theta) - \Lambda) + \cos^2(\theta) \cos^4(\alpha + \theta) (r^2 \cos^4(\theta) (2AF(20h^2 - 36hr^2 + 9r^4) + 225B^2(r^2 - 2h)^2) - 25m(4h^2 - 8hr^2 + 3r^4)) + 10ABr^4(30h - 17r^2) \cos^8(\theta) \cos^2(\alpha + \theta) - 5(r^2 - 2h) \cos^6(\alpha + \theta) (2BF(12h^2 - 16hr^2 + r^4) \cos^4(\theta) + 5\lambda(2h - r^2)) + \frac{1}{r^2} F^2(r^2 - 2h)^2(4h^2 - 4hr^2 - 7r^4) \cos^2(\theta) \cos^8(\alpha + \theta) \right) \varepsilon^2 + O(\varepsilon^3).
\end{aligned} \tag{4.56}$$

Notar que el sistema diferencial (4.56) tiene la forma estándar

$$\begin{aligned} r' &= F_{11}\varepsilon + F_{21}\varepsilon^2 + O(\varepsilon^3), \\ \alpha' &= F_{12}\varepsilon + F_{22}\varepsilon^2 + O(\varepsilon^3), \end{aligned} \quad (4.57)$$

donde las funciones  $F_1 = (F_{11}, F_{12})$  y  $F_2 = (F_{21}, F_{22})$  son:

$$\begin{aligned} F_{11} &= \frac{1}{5} \sin(\theta) \left( 5Ar^4 \cos^4(\theta) - 15Br^2(r^2 - 2h) \cos^2(\theta) \cos^2(\alpha + \theta) + F(r^2 - 2h)^2 \cos^4(\alpha + \theta) \right), \\ F_{12} &= -Ar^3 \cos^5(\theta) + Br(5r^2 - 6h) \cos^3(\theta) \cos^2(\alpha + \theta) - \frac{1}{5r} F(r^2 - 2h)(5r^2 - 2h) \cos(\theta) \cos^4(\alpha + \theta), \\ F_{21} &= \frac{1}{25r} \sin(\theta) \cos(\theta) \left( 25r^6 \cos^4(\theta)(\Lambda - A^2r^2 \cos^4(\theta)) - r^2(r^2 - 2h) \cos^4(\alpha + \theta)(r^2 \cos^4(\theta)(-20AFh + 6AFr^2 + 75B^2(r^2 - 6h)) + 25m(2h - r^2)) + 60ABr^6(2r^2 - 5h) \cos^6(\theta) \cos^2(\alpha + \theta) - 20BFr^2(r^2 - 2h)^2(3h + r^2) \cos^2(\theta) \cos^6(\alpha + \theta) + F^2(r^2 - 2h)^3(2h + 3r^2) \cos^8(\alpha + \theta) \right), \\ F_{22} &= \frac{1}{25} \left( 25r^4 \cos^6(\theta)(A^2r^2 \cos^4(\theta) - \Lambda) + \cos^2(\theta) \cos^4(\alpha + \theta)(r^2 \cos^4(\theta)(2AF(20h^2 - 36hr^2 + 9r^4) + 225B^2(r^2 - 2h)^2) - 25m(4h^2 - 8hr^2 + 3r^4)) + 10ABr^4(30h - 17r^2) \cos^8(\theta) \cos^2(\alpha + \theta) - 5(r^2 - 2h) \cos^6(\alpha + \theta)(2BF(12h^2 - 16hr^2 + r^4) \cos^4(\theta) + 5\lambda(2h - r^2)) + \frac{1}{r^2} F^2(r^2 - 2h)^2(4h^2 - 4hr^2 - 7r^4) \cos^2(\theta) \cos^8(\alpha + \theta) \right). \end{aligned} \quad (4.58)$$

Observe que la función promedio de primer orden es nula, pues

$$f_1(r, \alpha) = \int_0^{2\pi} (F_{11}, F_{12}) d\theta = (0, 0).$$

El método del promedio de primer orden no se puede aplicar ya que  $f_1$  es idénticamente nulo, por tanto la existencia de soluciones periódicas son obtenidas a través del método del promedio de segundo orden. Utilizando la expresión dada en (4.29)

determinamos la función promedio  $f_2 = (f_{21}, f_{22})$  donde

$$\begin{aligned}
 f_{21} &= \frac{1}{4800} r(r^2 - 2h) \left( r^2 \sin(4\alpha)(r^2 - 2h)(675B^2 - 2F(A + 40B)) - \right. \\
 &\quad \left. \sin(2\alpha)(B(735Ar^4 + F(2h - r^2)(294h + 685r^2)) + 8(2h - r^2)(F(42Fh - \right. \\
 &\quad \left. r^2(10A + 21F)) - 75m) + 150B^2(24hr^2 - 5r^4)) \right), \\
 f_{22} &= \frac{1}{12000} \left( 3(25(r^4(63A^2r^2 + 50\lambda - 50\Lambda - 90m) + 40h^2(5\lambda - 3m) + 40hr^2(6m - \right. \\
 &\quad \left. 5\lambda)) + 100B(3hr^4(35A - 3F) + 10r^6(F - 7A) + 28Fh^3 - 36Fh^2r^2) + \right. \\
 &\quad \left. 900AFr^2(2h^2 - 3hr^2 + r^4) + 50B^2(282h^2r^2 - 339hr^4 + 85r^6) + 7F^2(14h - \right. \\
 &\quad \left. 55r^2)(r^2 - 2h)^2) + 5 \cos(2\alpha)(B(735Ar^4(3h - 2r^2) + F(2h - r^2)(294h^2 + 929hr^2 - \right. \\
 &\quad \left. 1370r^4)) + 4(2h - r^2)(40AFr^2(r^2 - h) + 42F^2(2h^2 - 5hr^2 + 2r^4) + 75m(3r^2 - \right. \\
 &\quad \left. 2h)) + 150B^2(48h^2r^2 - 51hr^4 + 10r^6)) + 5r^2 \cos(4\alpha)(r^2 - 2h)(r^2 - h)(675B^2 - \right. \\
 &\quad \left. 2F(A + 40B)) \right).
 \end{aligned} \tag{4.59}$$

Ahora nuestro objetivo siguiendo el método del promedio de segundo orden es encontrar los ceros  $(r^*, \alpha^*)$  del sistema

$$\begin{aligned}
 f_{21}(r, \alpha) &= 0, \\
 f_{22}(r, \alpha) &= 0,
 \end{aligned} \tag{4.60}$$

de modo que el determinante de la matriz Jacobiana  $J_{f_2}$  evaluado en los ceros  $(r^*, \alpha^*)$  sea no nulo.

**Observación 4.8** Note que el sistema (4.60) depende de los parámetros  $A, B, F, \Lambda, m, \lambda$ , y la función polinomial  $f_{21}(r, \alpha)$  es de grado siete en la variable  $r$ , la cantidad alta de parámetros hace difícil obtener de manera explícita los ceros desde un punto de vista computacional.

Dada esta complejidad computacional analizaremos algunos casos, donde mostramos que sí es posible encontrar soluciones periódicas por el método del promedio de segundo orden, estos casos son tres:

**Caso 1:**  $F = 0, m = 0, \lambda = 0$ .

**Caso 2:**  $F = 0, \Lambda = 0, m = 0$ .

**Caso 3:**  $F = 0, m = 0$ .

En lo que sigue desarrollaremos cada uno de los casos determinadas anteriormente.

**Caso 1:**  $F = 0$ ,  $m = 0$ ,  $\lambda = 0$ .

Si  $F = 0$ ,  $m = 0$ ,  $\lambda = 0$ , entonces la función Hamiltoniana (4.51), se reduce a

$$H_1 = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2) + \varepsilon \left( \frac{A}{5}x^5 + Bx^3y^2 \right) + \varepsilon^2 \frac{1}{6}\Lambda x^6, \quad (4.61)$$

donde  $A$ ,  $B$  y  $\Lambda$  son parámetros reales arbitrarios. El sistema hamiltoniano asociado a (4.61) es

$$\begin{aligned} x' &= p_x, \\ y' &= p_y, \\ p'_x &= -x - \varepsilon(Ax^4 + 3Bx^2y^2) - \varepsilon^2\Lambda x^5, \\ p'_y &= -y - \varepsilon(2Bx^3y). \end{aligned} \quad (4.62)$$

La periodicidad del sistema hamiltoniano (4.62) es un requisito básico para determinar soluciones periódicas vía el método del promedio. Para eso introducimos el cambio de variables en coordenadas polares de la siguiente manera

$$x = r \cos \theta, \quad y = \rho \cos(\theta + \alpha), \quad p_x = r \sin \theta, \quad p_y = \rho \sin(\theta + \alpha), \quad (4.63)$$

definidos para  $r > 0$  y  $\rho > 0$ . El nivel de energía  $h$  de  $H_1$  en coordenadas polares es:

$$h = \frac{1}{2}(r^2 + \rho^2) + \varepsilon \left( \frac{1}{5}Ar^5 \cos^5(\theta) + B\rho^2r^3 \cos^3(\theta) \cos^2(\alpha + \theta) \right) + \varepsilon^2 \frac{1}{6}\Lambda r^6 \cos^6(\theta), \quad (4.64)$$

y las ecuaciones de movimiento son dados por:

$$\begin{aligned} \dot{r} &= \frac{1}{r}\varepsilon \left( -Ar^5 \sin(\theta) \cos^4(\theta) - 3Br^3(2h - r^2) \sin(\theta) \cos^2(\theta) \cos^2(\alpha + \theta) \right) \\ &\quad - \varepsilon^2\Lambda r^5 \sin(\theta) \cos^5(\theta), \\ \dot{\theta} &= -1 - \frac{1}{r}\varepsilon \left( Ar^4 \cos^5(\theta) + 3Br^2(2h - r^2) \cos^3(\theta) \cos^2(\alpha + \theta) \right) + \varepsilon^2\Lambda r^4 \cos^6(\theta), \\ \dot{\rho} &= -\varepsilon(2Br^3\sqrt{2h - r^2} \cos^3(\theta) \sin(\alpha + \theta) \cos(\alpha + \theta)), \\ \dot{\alpha} &= \frac{1}{r}\varepsilon \left( Ar^4 \cos^5(\theta) + 3Br^2(2h - r^2) \cos^3(\theta) \cos^2(\alpha + \theta) - 2Br^3 \cos^3(\theta) \cos^2(\alpha + \theta) \right) \\ &\quad + \varepsilon^2\Lambda r^4 \cos^6(\theta). \end{aligned} \quad (4.65)$$

El sistema diferencial en su forma estándar es

$$\begin{aligned}
r' &= \left( r^2 \sin(\theta) \cos^2(\theta) (Ar^2 \cos^2(\theta) - 3B(r^2 - 2h) \cos^2(\alpha + \theta)) \right) \varepsilon \\
&\quad + \left( \frac{1}{5} r^3 \sin(\theta) \cos^5(\theta) (-5A^2 r^4 \cos^4(\theta) + 12ABr^2 (2r^2 - 5h) \cos^2(\theta) \right. \\
&\quad \left. \cos^2(\alpha + \theta) - 15B^2 (r^2 - 6h) (r^2 - 2h) \cos^4(\alpha + \theta) + 5\Lambda r^2) \right) \varepsilon^2 + O(\varepsilon^3), \\
\alpha' &= \left( Br (5r^2 - 6h) \cos^3(\theta) \cos^2(\alpha + \theta) - Ar^3 \cos^5(\theta) \right) \varepsilon + \left( A^2 r^6 \cos^{10}(\theta) \right. \\
&\quad + \frac{2}{5} AB r^4 (30h - 17r^2) \cos^8(\theta) \cos^2(\alpha + \theta) + r^2 \cos^6(\theta) (9B^2 (r^2 - 2h)^2 \\
&\quad \left. \cos^4(\alpha + \theta) - \Lambda r^2) \right) \varepsilon^2 + O(\varepsilon^3).
\end{aligned}$$

En este caso la función promedio de segundo orden es  $f_2 = (f_{21}, f_{22})$  donde

$$\begin{aligned}
f_{21} &= \frac{1}{320} Br^3 \sin(2\alpha) (r^2 - 2h) \left( r^2(50B - 49A) + 90B \cos(2\alpha) (r^2 - 2h) - 240Bh \right), \\
f_{22} &= \frac{1}{160} r^2 \left( 63A^2 r^4 + B \cos(2\alpha) (3hr^2(49A - 170B) + 2r^4(50B - 49A) + 480Bh^2) \right. \\
&\quad + 140ABr^2 (3h - 2r^2) + 45B^2 \cos(4\alpha) (2h^2 - 3hr^2 + r^4) \\
&\quad \left. + 2B^2 (282h^2 - 339hr^2 + 85r^4) - 50\Lambda r^2 \right). \tag{4.66}
\end{aligned}$$

De acuerdo con el método del promedio de segundo orden, nuestro objetivo es encontrar los ceros  $(r^*, \alpha^*)$  del sistema

$$f_{2i}(r, \alpha) = 0 \quad \text{para } i = 1, 2, \tag{4.67}$$

y luego verificar que el determinante de la matriz Jacobiana  $J_{f_2(r, \alpha)}$  en los ceros  $(r^*, \alpha^*)$  sea no nulo.

Antes de enunciar los resultados en este Caso 1, consideremos las notaciones siguientes en relación con los parámetros  $A, B$  y  $\Lambda$ :

$$J = 7Bh(4103A^2 + 167260AB - 44500B^2) - 2000\Lambda(49A - 50B).$$

$$L_1 = 35721B^2h^2(A + 3B)^2 + 18900Bh\Lambda(7B - 3A) + 2500\Lambda^2.$$

$$L_2 = 245B^2h^2(25532A^2 - 13520AB + 53045B^2) + 157500Bh\Lambda(49B - 32A) + 562500\Lambda^2.$$

$$L_3 = 30681A^2B^2h^2 - 38766AB^3h^2 - 27300ABh\Lambda + 11769B^4h^2 + 30300B^2h\Lambda + 2500\Lambda^2.$$

$$\begin{aligned}
S &= (3B^2h^2(10227A^2 - 12922AB + 3923B^2) + 300Bh\Lambda(101B - 91A) + 2500\Lambda^2)^{1/2}. \\
W &= 96880A^2Bh - 913885AB^2h + 49A(750\Lambda + \sqrt{L_2}) - 10B(5915B^2h + 12750\Lambda - \\
&\quad 7\sqrt{L_2}). \\
W_1 &= -96880A^2Bh + 913885AB^2h + 49A(\sqrt{L_2} - 750\Lambda) + 10B(5915B^2h + 12750\Lambda + \\
&\quad 7\sqrt{L_2}). \\
Z_1 &= (63h(4A^2 - 15AB - B^2) - 50\Lambda + \sqrt{L_1})(189Bh(19A^2 - 131AB + 60B^2) + \\
&\quad 50\Lambda(7A - 20B) + \sqrt{L_1}(20B - 7A))(35721B^2h^2(A + 3B)^2 + 18900Bh\Lambda(7B - \\
&\quad 3A) + 2\sqrt{L_1}(189Bh(7B - 3A) + 50\Lambda) + 2500\Lambda^2 - 3L_1). \\
Z_2 &= (35721B^2h^2(A + 3B)^2 + 18900Bh\Lambda(7B - 3A) + 2500\Lambda^2)(-6300h\Lambda(7A^3 - \\
&\quad 29A^2B + 8AB^2 + 170B^3) + 11907Bh^2(2A^4 - 23A^3B + 408A^2B^2 - 1171AB^3 + \\
&\quad 160B^4) + 2500\Lambda^2(7A - 20B)) + \sqrt{L_1}(-157500h\Lambda^2(14A^3 + 5A^2B - 311AB^2 + \\
&\quad 760B^3) - 595350Bh^2\Lambda(-44A^4 + 379A^3B - 1606A^2B^2 + 2123AB^3 + 1020B^4) + \\
&\quad 2250423B^2h^3(50A^5 - 737A^4B + 3171A^3B^2 - 4603A^2B^3 + 103AB^4 - 480B^5) + \\
&\quad 125000\Lambda^3(7A - 20B)). \\
Z_3 &= \left( -125000\Lambda^3(6174A^3h + 36932A^2Bh - 8078AB^2h + 49AS - \\
&\quad 46180B^3h + 40BS) + 2500h\Lambda^2(S(6174A^3 + 23555A^2B - 4151AB^2 - \\
&\quad 34060B^3) + 18Bh(254457A^4 + 154987A^3B - 532371A^2B^2 - 628383AB^3 + \\
&\quad 797470B^4)) + 3B^2h^3(3Bh(10227A^2 - 12922AB + 3923B^2)(403074A^4 - \\
&\quad 176449A^3B - 873404A^2B^2 + 502187AB^3 + 196020B^4) + S(64919610A^5 - \\
&\quad 16578219A^4B - 361935217A^3B^2 + 594355419A^2B^3 - 355367061AB^4 + \\
&\quad 71604740B^5)) + 150Bh^2\Lambda(-283219902A^5Bh + 1764A^4(179305B^2h - 547S) + \\
&\quad 49A^3(9786548B^3h + 4733BS) + 14A^2B^2(84257S - 44422812B^2h) + \\
&\quad A(1280909B^3S - 85331526B^5h) + 20B^4(10242937B^2h - 93918S)) + \\
&\quad 6250000\Lambda^4(49A + 40B) \right). \\
Z_4 &= \left( 37100140182A^6B^3h^4 - 9261A^5B^2h^3(6815419B^2h + 4587300\Lambda + 21030S) + \\
&\quad 441A^4Bh^2(-103489172B^4h^2 + 7B^2h(15369000\Lambda + 16111S) + 600\Lambda(43275\Lambda + \\
&\quad 547S)) + 147A^3h(963047970B^6h^3 + B^4h^2(489327400\Lambda + 7386433S) + \\
&\quad 50B^2h\Lambda(948900\Lambda - 4733S) - 105000\Lambda^2(50\Lambda + S)) - 7A^2Bh(10171192842B^6h^3 + \\
&\quad 27B^4h^2(493586800\Lambda + 9434213S) + 300B^2h\Lambda(11407950\Lambda + 84257S) + \\
&\quad 12500\Lambda^2(52760\Lambda + 673S)) + 7A(-723716793B^8h^4 + 9B^6h^3(16922241S - \\
&\quad 203170300\Lambda) - 150B^4h^2\Lambda(26930700\Lambda + 182987S) + 2500B^2h\Lambda^2(57700\Lambda + \\
&\quad 593S) + 875000\Lambda^3(50\Lambda + S)) + 20B(346043907B^8h^4 + 3B^6h^3(512146850\Lambda - \\
&\quad 3580237S) + 900B^4h^2\Lambda(1993675\Lambda + 15653S) + 2500B^2h\Lambda^2(115450\Lambda + 1703S) + \\
&\quad 250000\Lambda^3(50\Lambda + S)) \right).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Z_5 &= ((245B^2h^2(25532A^2 - 13520AB + 53045B^2) + 157500Bh\Lambda(49B - 32A) + \\
&\quad 562500\Lambda)^2 + 105Bh(32A - 49B) - 750\Lambda)^2. \\
Z_6 &= 2744Bh^2\sqrt{Z_5}(467A^2 - 2900AB + 1250B^2)^3(Bh(15J^3W(343A + 10B) + \\
&\quad 60J^2W^2(791A - 1885B) + 8JW^3(5327A - 16090B) - 20W^4(329A + \\
&\quad 890B) + 8100BJ^4) + 1000\Lambda W^2(-6J^2 - 4JW + 3W^2)) - 98hZ_5(467A^2 - \\
&\quad 2900AB + 1250B^2)^2(3Bh(7A^2W^2(6137J^2 + 8240JW - 1525W^2) - \\
&\quad 14ABW(2520J^3 + 27890J^2W + 23477JW^2 - 4810W^3) - 60B^2(450J^4 - \\
&\quad 240J^3W - 8063J^2W^2 - 7613JW^3 - 116W^4)) + 200\Lambda W^2(10B(36J^2 + 17JW - \\
&\quad 18W^2) - 49AJW)) + 384160B^3h^4(467A^2 - 2900AB + 1250B^2)^4(90J^4 + \\
&\quad 120J^3W - 494J^2W^2 - 796JW^3 - 243W^4) + 21Z_5^{3/2}(467A^2 - 2900AB + \\
&\quad 1250B^2)(BW^2(-7A^2h(37165J^2 + 53640JW - 5377W^2) - 2000\Lambda(18J^2 + 5JW - \\
&\quad 9W^2)) + 196AJW^3(189A^2h + 50\Lambda) + 14AB^2hW(6615J^3 + 104150J^2W + \\
&\quad 79497JW^2 - 22430W^3) + 20B^3h(4050J^4 - 2025J^3W - 63053J^2W^2 - \\
&\quad 48015JW^3 + 5849W^4)) + 18Z_5^2(BJ^2W^2(-31619A^2 + 146300AB - 97400B^2) + \\
&\quad 3JW^3(49A - 50B)(63A^2 - 280AB + 365B^2) + BW^4(203A^2 - 41300AB + \\
&\quad 16250B^2) + 90B^2J^3W(49A - 50B) + 8100B^3J^4). \\
Z_7 &= 1800B^3(14(467A^2 - 2900BA + 1250B^2)h + 3\sqrt{Z_5})^2(98(467A^2 - 2900BA + \\
&\quad 1250B^2)^2h^2 + 21(467A^2 - 2900BA + 1250B^2)\sqrt{Z_5}h + 9Z_5)J_1^4 + \\
&\quad 30B^2W_1(1536640B(467A^2 - 2900BA + 1250B^2)^4h^4 + 1372(343A + \\
&\quad 10B)(467A^2 - 2900BA + 1250B^2)^3\sqrt{Z_5}h^3 + 7056(49A - 20B)(467A^2 - 2900BA + \\
&\quad 1250B^2)^2Z_5h^2 + 189(343A - 150B)(467A^2 - 2900BA + 1250B^2)Z_5^{3/2}h + \\
&\quad 54(49A - 50B)Z_5^2)J_1^3 + BW_1^2(-189775040B^2(467A^2 - 2900BA + 1250B^2)^4h^4 + \\
&\quad 164640(467A^2 - 2900BA + 1250B^2)^3((791A - 1885B)Bh - 100\Lambda)\sqrt{Z_5}h^2 - \\
&\quad 294(467A^2 - 2900BA + 1250B^2)^2(42959hA^2 - 390460BhA + 483780B^2h + \\
&\quad 24000\Lambda)Z_5h - 18(31619A^2 - 146300BA + 97400B^2)Z_5^2 - 105(467A^2 - \\
&\quad 2900BA + 1250B^2)(52031hA^2 - 291620BhA + 252212B^2h + 7200\Lambda)Z_5^{3/2})J_1^2 - \\
&\quad 2W_1^3(14(467A^2 - 2900BA + 1250B^2)h + 3\sqrt{Z_5})(10921120B^3(467A^2 - 2900BA + \\
&\quad 1250B^2)^3h^3 + 784B(467A^2 - 2900BA + 1250B^2)^2(B(13105B - 5327A)h + \\
&\quad 500\Lambda)\sqrt{Z_5}h + 9(50B - 49A)(63A^2 - 280BA + 365B^2)Z_5^{3/2} + 7(467A^2 - \\
&\quad 2900BA + 1250B^2)(21B(4120A^2 - 17389BA + 17650B^2)h + 100(50B - \\
&\quad 49A)\Lambda)Z_5)J_1 + BW_1^4(-93350880B^2(467A^2 - 2900BA + 1250B^2)^4h^4 - \\
&\quad 54880(467A^2 - 2900BA + 1250B^2)^3(B(329A + 890B)h - 150\Lambda)\sqrt{Z_5}h^2 + \\
&\quad 1470(467A^2 - 2900BA + 1250B^2)^2(2135hA^2 - 13468BhA - 1392B^2h + \\
&\quad 2400\Lambda)Z_5h + 18(203A^2 - 41300BA + 16250B^2)Z_5^2 + 21(467A^2 - 2900BA + \\
&\quad 1250B^2)(37639hA^2 - 314020BhA + 116980B^2h + 18000\Lambda)Z_5^{3/2}).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Z_8 &= ((245B^2h^2(25532A^2 - 13520AB + 53045B^2) + 157500Bh\Lambda(49B - 32A) + \\
&\quad 562500\Lambda)^{1/2} + 105Bh(49B - 32A) + 750\Lambda)^2. \\
Z_9 &= -2744Bh^2\sqrt{Z_8}(467A^2 - 2900AB + 1250B^2)^3(Bh(15J^3W(343A + 10B) + \\
&\quad 60J^2W^2(791A - 1885B) + 8JW^3(5327A - 16090B) - 20W^4(329A + \\
&\quad 890B) + 8100BJ^4) + 1000\Lambda W^2(-6J^2 - 4JW + 3W^2)) - 98hZ_8(467A^2 - \\
&\quad 2900AB + 1250B^2)^2(3Bh(7A^2W^2(6137J^2 + 8240JW - 1525W^2) - \\
&\quad 14ABW(2520J^3 + 27890J^2W + 23477JW^2 - 4810W^3) - 60B^2(450J^4 - \\
&\quad 240J^3W - 8063J^2W^2 - 7613JW^3 - 116W^4)) + 200\Lambda W^2(10B(36J^2 + 17JW - \\
&\quad 18W^2) - 49AJW)) + 384160B^3h^4(467A^2 - 2900AB + 1250B^2)^4(90J^4 + \\
&\quad 120J^3W - 494J^2W^2 - 796JW^3 - 243W^4) - 21Z_8^{3/2}(467A^2 - 2900AB + \\
&\quad 1250B^2)(BW^2(-7A^2h(37165J^2 + 53640JW - 5377W^2) - 2000\Lambda(18J^2 + 5JW - \\
&\quad 9W^2)) + 196AJW^3(189A^2h + 50\Lambda) + 14AB^2hW(6615J^3 + 104150J^2W + \\
&\quad 79497JW^2 - 22430W^3) + 20B^3h(4050J^4 - 2025J^3W - 63053J^2W^2 - \\
&\quad 48015JW^3 + 5849W^4)) + 18Z_8^2(BJ^2W^2(-31619A^2 + 146300AB - 97400B^2) + \\
&\quad 3JW^3(49A - 50B)(63A^2 - 280AB + 365B^2) + BW^4(203A^2 - 41300AB + \\
&\quad 16250B^2) + 90B^2J^3W(49A - 50B) + 8100B^3J^4). \\
Z_{10} &= 1800B^3(14(467A^2 - 2900BA + 1250B^2)h - 3\sqrt{Z_8})^2(98(467A^2 - 2900BA + \\
&\quad 1250B^2)^2h^2 - 21(467A^2 - 2900BA + 1250B^2)\sqrt{Z_8}h + 9Z_8)J_1^4 + \\
&\quad 30B^2W_1(1536640B(467A^2 - 2900BA + 1250B^2)^4h^4 - 1372(343A + \\
&\quad 10B)(467A^2 - 2900BA + 1250B^2)^3\sqrt{Z_8}h^3 + 7056(49A - 20B)(467A^2 - 2900BA + \\
&\quad 1250B^2)^2Z_8h^2 + 189(150B - 343A)(467A^2 - 2900BA + 1250B^2)Z_8^{3/2}h + \\
&\quad 54(49A - 50B)Z_8^2)J_1^3 + BW_1^2(-189775040B^2(467A^2 - 2900BA + 1250B^2)^4h^4 + \\
&\quad 164640(467A^2 - 2900BA + 1250B^2)^3(B(1885B - 791A)h + 100\Lambda)\sqrt{Z_8}h^2 - \\
&\quad 294(467A^2 - 2900BA + 1250B^2)^2(42959hA^2 - 390460BhA + 60(8063hB^2 + \\
&\quad 400\Lambda))Z_8h - 18(31619A^2 - 146300BA + 97400B^2)Z_8^2 + 105(467A^2 - \\
&\quad 2900BA + 1250B^2)(52031hA^2 - 291620BhA + 252212B^2h + 7200\Lambda)Z_8^{3/2})J_1^2 - \\
&\quad 2W_1^3(14(467A^2 - 2900BA + 1250B^2)h - 3\sqrt{Z_8})(10921120B^3(467A^2 - 2900BA + \\
&\quad 1250B^2)^3h^3 - 784B(467A^2 - 2900BA + 1250B^2)^2(B(13105B - 5327A)h + \\
&\quad 500\Lambda)\sqrt{Z_8}h + 9(49A - 50B)(63A^2 - 280BA + 365B^2)Z_8^{3/2} + 7(467A^2 - \\
&\quad 2900BA + 1250B^2)(21B(4120A^2 - 17389BA + 17650B^2)h + 100(50B - \\
&\quad 49A)\Lambda)Z_8)J_1 + BW_1^4(-93350880B^2(467A^2 - 2900BA + 1250B^2)^4h^4 + \\
&\quad 54880(467A^2 - 2900BA + 1250B^2)^3(B(329A + 890B)h - 150\Lambda)\sqrt{Z_8}h^2 + \\
&\quad 1470(467A^2 - 2900BA + 1250B^2)^2(2135hA^2 - 13468BhA - 1392B^2h + \\
&\quad 2400\Lambda)Z_8h + 18(203A^2 - 41300BA + 16250B^2)Z_8^2 - 21(467A^2 - 2900BA + \\
&\quad 1250B^2)(37639hA^2 - 314020BhA + 116980B^2h + 18000\Lambda)Z_8^{3/2}).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Z_{11} = & \left( B(-(A - 5B))(A - B)(-50\Lambda(378Bh(3A - 7B) + \sqrt{L_1}) + 189Bh(189Bh(A + 3B)^2 + \sqrt{L_1}(3A - 7B)) + 2500\Lambda^2)(-2500\Lambda^2(63h(14A^3 + 5A^2B - 311AB^2 + 760B^3) + L_1(7A - 20B)) + 3150h\Lambda(2L_1(7A^3 - 29A^2B + 8AB^2 + 170B^3) - 189Bh(-44A^4 + 379A^3B - 1606A^2B^2 + 2123AB^3 + 1020B^4)) + 11907Bh^2(\sqrt{L_1}(-2A^4 + 23A^3B - 408A^2B^2 + 1171AB^3 - 160B^4) + 189Bh(50A^5 - 737A^4B + 3171A^3B^2 - 4603A^2B^3 + 103AB^4 - 480B^5)) + 125000\Lambda^3(7A - 20B)) \right)^{1/2}. \\
Z_{12} = & \left( B(-(A - 5B))(A - B)(-50\Lambda(378Bh(3A - 7B) + \sqrt{L_1}) + 189Bh(189Bh(A + 3B)^2 + \sqrt{L_1}(3A - 7B)) + 2500\Lambda^2)(-2500\Lambda^2(63h(14A^3 + 5A^2B - 311AB^2 + 760B^3) + \sqrt{L_1}(7A - 20B)) + 3150h\Lambda(2\sqrt{L_1}(7A^3 - 29A^2B + 8AB^2 + 170B^3) - 189Bh(-44A^4 + 379A^3B - 1606A^2B^2 + 2123AB^3 + 1020B^4)) + 11907Bh^2(\sqrt{L_1}(2A^4 - 23A^3B + 408A^2B^2 - 1171AB^3 + 160B^4) + 189Bh(50A^5 - 737A^4B + 3171A^3B^2 - 4603A^2B^3 + 103AB^4 - 480B^5)) + 125000\Lambda^3(7A - 20B)) \right)^{1/2}. \\
Z_{13} = & \left( -B(63A^2 - 182BA + 115B^2)(-312500000(49A + 40B)\Lambda^5 + 6250000(\sqrt{L_3}(49A + 40B) + (6174A^3 + 50309BA^2 - 12005B^2A - 58300B^3)h)\Lambda^4 - 250000h(\sqrt{L_3}(3087A^3 + 18466BA^2 - 4039B^2A - 23090B^3) + 3B(1044288A^4 + 1744057BA^3 - 3644186B^2A^2 - 3530695B^3A + 4591100B^4)h)\Lambda^3 + 15000Bh^2(7\sqrt{L_3}(109053A^4 + 79212BA^3 - 254665B^2A^2 - 276122B^3A + 360830B^4) + B(338730336A^5 - 272962683BA^4 - 705348581B^2A^3 + 242001963B^3A^2 + 1101068745B^4A - 713739500B^5)h)\Lambda^2 - 450B^2h^3(42\sqrt{L_3}(2426823A^5 - 2732352BA^4 - 4338236B^2A^3 + 4857162B^3A^2 + 2503461B^4A - 2787290B^5) + B(25789366008A^6 - 47686192743BA^5 - 42284241692B^2A^4 + 151637385382B^3A^3 - 108280941972B^4A^2 + 13847757385B^5A + 7182184000B^6)h)\Lambda + 9B^3h^4(\sqrt{L_3}(5014961154A^6 - 7539282345BA^5 - 18166337028B^2A^4 + 53185791778B^3A^3 - 50139613818B^4A^2 + 20922606831B^5A - 3231546140B^6) + B(10227A^2 - 12922BA + 3923B^2)(87479406A^5 - 93440109BA^4 - 273455231B^2A^3 + 498046941B^3A^2 - 227008131B^4A + 6105340B^5)h)) \right)^{1/2}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Z_{14} = & \left( -B(63A^2 - 182BA + 115B^2)(-312500000(49A + 40B)\Lambda^5 - \right. \\
& 6250000(\sqrt{L_3}(49A + 40B) + (-6174A^3 - 50309BA^2 + 12005B^2A + \\
& 58300B^3)h)\Lambda^4 - 250000h(\sqrt{L_3}(-3087A^3 - 18466BA^2 + 4039B^2A + \\
& 23090B^3) + 3B(1044288A^4 + 1744057BA^3 - 3644186B^2A^2 - \\
& 3530695B^3A + 4591100B^4)h)\Lambda^3 - 15000Bh^2(7\sqrt{L_3}(109053A^4 + \\
& 79212BA^3 - 254665B^2A^2 - 276122B^3A + 360830B^4) + B(-338730336A^5 + \\
& 272962683BA^4 + 705348581B^2A^3 - 242001963B^3A^2 - 1101068745B^4A + \\
& 713739500B^5)h)\Lambda^2 - 450B^2h^3(42\sqrt{L_3}(-2426823A^5 + 2732352BA^4 + \\
& 4338236B^2A^3 - 4857162B^3A^2 - 2503461B^4A + 2787290B^5) + \\
& B(25789366008A^6 - 47686192743BA^5 - 42284241692B^2A^4 + \\
& 151637385382B^3A^3 - 108280941972B^4A^2 + 13847757385B^5A + \\
& 7182184000B^6)h)\Lambda + 9B^3h^4(\sqrt{L_3}(-5014961154A^6 + 7539282345BA^5 + \\
& 18166337028B^2A^4 - 53185791778B^3A^3 + 50139613818B^4A^2 - \\
& 20922606831B^5A + 3231546140B^6) + B(10227A^2 - 12922BA + \\
& 3923B^2)(87479406A^5 - 93440109BA^4 - 273455231B^2A^3 + \\
& \left. 498046941B^3A^2 - 227008131B^4A + 6105340B^5)h)\right)^{1/2}.
\end{aligned}$$

Además para el nivel de energía positiva  $H_1 = h$  consideremos los siguientes conjuntos:

$$\begin{aligned}
\Sigma_{AB\Lambda}^1 &= \left\{ (A, B, \Lambda) \in \mathbb{R}^3 : \left| \frac{63A^2h - 70ABh - 28B^2h - 25\Lambda}{(7A + 10B)Bh} \right| < \frac{7}{2}, \right. \\
& \quad \left. (7h(9A - 2B)(2A - B) - 50\Lambda)(63h(A - 2B)(2A + B) - 50\Lambda) \neq 0, \right. \\
& \quad \left. (7A + 10B)B \neq 0 \right\} \\
\Sigma_{AB\Lambda}^2 &= \left\{ (A, B, \Lambda) \in \mathbb{R}^3 : L_1 > 0, \frac{189Bh(7B - 3A) + 50\Lambda - \sqrt{L_1}}{(A - 5B)(A - B)} > 0, \right. \\
& \quad \left. B(A - 5B)(A - B)Z_1 \neq 0 \right\} \\
\Sigma_{AB\Lambda}^3 &= \left\{ (A, B, \Lambda) \in \mathbb{R}^3 : L_1 > 0, \frac{189Bh(7B - 3A) + 50\Lambda + \sqrt{L_1}}{(A - 5B)(A - B)} > 0, \right. \\
& \quad \left. B(A - 5B)(A - B)Z_2 \neq 0 \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Sigma_{AB\Lambda}^4 &= \left\{ (A, B, \Lambda) \in \mathbb{R}^3 : \frac{3Bh(101B - 91A) + 50\Lambda - S}{126A^2 - 364AB + 230B^2} > 0, \right. \\
&\quad \left. B(63A^2 - 182AB + 115B^2)(126A^2 - 364AB + 230B^2)Z_3 \neq 0 \right\} \\
\Sigma_{AB\Lambda}^5 &= \left\{ (A, B, \Lambda) \in \mathbb{R}^3 : \frac{3Bh(101B - 91A) + 50\Lambda + S}{126A^2 - 364AB + 230B^2} > 0, \right. \\
&\quad \left. B(63A^2 - 182AB + 115B^2)(126A^2 - 364AB + 230B^2)Z_4 \neq 0 \right\} \\
\Sigma_{AB\Lambda}^6 &= \left\{ (A, B, \Lambda) \in \mathbb{R}^3 : L_2 > 0, (467A^2 - 2900AB + 1250B^2) BWZ_5Z_6 \neq 0, \right. \\
&\quad \left. \left| \frac{W}{J} \right| < 1, \frac{105Bh(32A - 49B) - 750\Lambda + \sqrt{L_2}}{467A^2 - 2900AB + 1250B^2} < 0 \right\} \\
\Sigma_{AB\Lambda}^7 &= \left\{ (A, B, \Lambda) \in \mathbb{R}^3 : L_2 > 0, (467A^2 - 2900AB + 1250B^2) BW_1Z_5Z_7 \neq 0, \right. \\
&\quad \left. \left| \frac{W_1}{J} \right| < 1, \frac{105Bh(32A - 49B) - 750\Lambda + \sqrt{L_2}}{467A^2 - 2900AB + 1250B^2} < 0 \right\} \\
\Sigma_{AB\Lambda}^8 &= \left\{ (A, B, \Lambda) \in \mathbb{R}^3 : L_2 > 0, (467A^2 - 2900AB + 1250B^2) BWZ_8Z_9 \neq 0, \right. \\
&\quad \left. \left| \frac{W}{J} \right| < 1, \frac{105Bh(32A - 49B) - 750\Lambda + \sqrt{L_2}}{467A^2 - 2900AB + 1250B^2} > 0 \right\} \\
\Sigma_{AB\Lambda}^9 &= \left\{ (A, B, \Lambda) \in \mathbb{R}^3 : L_2 > 0, (467A^2 - 2900AB + 1250B^2) BW_1Z_8Z_{10} \neq 0, \right. \\
&\quad \left. \left| \frac{W_1}{J} \right| < 1, \frac{105Bh(32A - 49B) - 750\Lambda + \sqrt{L_2}}{467A^2 - 2900AB + 1250B^2} > 0 \right\}.
\end{aligned}$$

El resultado principal en este Caso 1 en relación a la existencia de soluciones periódicas del sistema (4.61) es:

**Teorema 4.3 (Existencia)** *En cada nivel de energía positiva  $H_1 = h$ , con  $\varepsilon > 0$  suficientemente pequeño,  $A, B$  y  $\Lambda$  números reales arbitrarios, el sistema hamiltoniano (4.62) tiene familias de soluciones periódicas  $\varphi(t, \varepsilon) = (x(t, \varepsilon), y(t, \varepsilon), p_x(t, \varepsilon), p_y(t, \varepsilon))$  donde*

$$\begin{aligned}
x(t, \varepsilon) &= r^* \cos(t) + O(\varepsilon), \\
y(t, \varepsilon) &= \sqrt{2h - r^{*2}} \cos(t + \alpha^*) + O(\varepsilon), \\
p_x(t, \varepsilon) &= r^* \sin(t) + O(\varepsilon), \\
p_y(t, \varepsilon) &= \sqrt{2h - r^{*2}} \sin(t + \alpha^*) + O(\varepsilon).
\end{aligned}$$

*Las soluciones son contadas como sigue, existe*

(a) al menos una familia de soluciones periódicas si  $(A, B, \Lambda) \in \Sigma_{AB\Lambda}^1$ , y

$$(r^*, \alpha^*) = \left( \sqrt{2h}, \frac{1}{2} \arccos \left( \frac{126A^2h - 140ABh - 56B^2h - 50\Lambda}{49ABh + 70B^2h} \right) \right)$$

(b) al menos una familia de soluciones periódicas si  $(A, B, \Lambda) \in \Sigma_{AB\Lambda}^2$ , y

$$(r^*, \alpha^*) = \left( \sqrt{\frac{189Bh(7B - 3A) + 50\Lambda - \sqrt{L_1}}{126(A - 5B)(A - B)}}, 0 \right)$$

(c) al menos una familia de soluciones periódicas si  $(A, B, \Lambda) \in \Sigma_{AB\Lambda}^3$ , y

$$(r^*, \alpha^*) = \left( \sqrt{\frac{189Bh(7B - 3A) + 50\Lambda + \sqrt{L_1}}{126(A - 5B)(A - B)}}, 0 \right)$$

(d) al menos dos familias de soluciones periódicas si  $(A, B, \Lambda) \in \Sigma_{AB\Lambda}^4$ , y

$$(r^*, \alpha^*) = \left( \sqrt{\frac{3Bh(101B - 91A) + 50\Lambda - S}{126A^2 - 364AB + 230B^2}}, \pm\pi/2 \right)$$

(e) al menos dos familias de soluciones periódicas si  $(A, B, \Lambda) \in \Sigma_{AB\Lambda}^5$ , y

$$(r^*, \alpha^*) = \left( \sqrt{\frac{3Bh(101B - 91A) + 50\Lambda + S}{126A^2 - 364AB + 230B^2}}, \pm\pi/2 \right)$$

(f) al menos una familia de soluciones periódicas si  $(A, B, \Lambda) \in \Sigma_{AB\Lambda}^6$ , y

$$(r^*, \alpha^*) = \left( \sqrt{-\frac{3}{7} \left( \frac{105Bh(32A - 49B) - 750\Lambda + \sqrt{L_2}}{467A^2 - 2900AB + 1250B^2} \right)}, -\frac{1}{2} \operatorname{arcsec} \left( \frac{W}{J} \right) \right)$$

(g) al menos una familia de soluciones periódicas si  $(A, B, \Lambda) \in \Sigma_{AB\Lambda}^7$ , y

$$(r^*, \alpha^*) = \left( \sqrt{-\frac{3}{7} \left( \frac{105Bh(32A - 49B) - 750\Lambda + \sqrt{L_2}}{467A^2 - 2900AB + 1250B^2} \right)}, -\frac{1}{2} \operatorname{arcsec} \left( \frac{W_1}{J} \right) \right)$$

(h) al menos una familia de soluciones periódicas si  $(A, B, \Lambda) \in \Sigma_{AB\Lambda}^8$ , y

$$(r^*, \alpha^*) = \left( \sqrt{\frac{3}{7} \left( \frac{105Bh(32A - 49B) - 750\Lambda + \sqrt{L_2}}{467A^2 - 2900AB + 1250B^2} \right)}, -\frac{1}{2} \operatorname{arcsec} \left( \frac{W}{J} \right) \right)$$

(i) al menos una familia de soluciones periódicas sí  $(A, B, \Lambda) \in \Sigma_{AB\Lambda}^9$ , y

$$(r^*, \alpha^*) = \left( \sqrt{\frac{3}{7} \left( \frac{105Bh(32A - 49B) - 750\Lambda + \sqrt{L_2}}{467A^2 - 2900AB + 1250B^2} \right)}, -\frac{1}{2} \operatorname{arcsec} \left( \frac{W_1}{J} \right) \right),$$

donde las expresiones  $J, L_1, L_2, S, W, W_1$  son dadas previa al Teorema 4.3.

**Demostración.** De (4.66) se tiene que

$$f_{21} = \frac{1}{320} Br^3 \sin(2\alpha) (r^2 - 2h) (r^2(50B - 49A) + 90B \cos(2\alpha) (r^2 - 2h) - 240Bh).$$

Resolviendo la ecuación  $f_{21}(r, \alpha) = 0$ , obtenemos las siguientes cuatro condiciones:

**Condición 1.1:**  $r = 0$ ,

**Condición 1.2:**  $r = \sqrt{2h}$ ,

**Condición 1.3:**  $\sin(2\alpha) = 0$ ,

**Condición 1.4:**  $(r^2(50B - 49A) + 90B \cos(2\alpha) (r^2 - 2h) - 240Bh) = 0$ .

En lo que sigue analizaremos cada condición y en algunos casos se obtendrán sub-condiciones.

**Condición 1.1:**  $r = 0$ . Sustituyendo  $r$  en (4.66), obtenemos

$$f_{21} = f_{22} = 0.$$

Observe que en esta condición la matriz jacobiana de  $f_2$  es nulo y por tanto el método del promedio no da información sobre soluciones periódicas.

**Condición 1.2:** Si  $r = \sqrt{2h}$ , tenemos que la función  $f_{21} \equiv 0$  y  $f_{22}$  en la variable  $\alpha$  es

$$f_{22}(\sqrt{2h}, \alpha) = \frac{1}{40} h^2 (14h(9A^2 - 10AB - 4B^2) - 7Bh \cos(2\alpha)(7A + 10B) - 50\Lambda).$$

Resolviendo la ecuación  $f_{22}(\sqrt{2h}, \alpha) = 0$ , obtenemos que los valores de  $\alpha$  son

$$\alpha^* = \frac{n}{2} \operatorname{arc} \cos \left( \frac{126A^2h - 140ABh - 56B^2h - 50\Lambda}{49ABh + 70B^2h} \right) + k\pi,$$

donde  $n = -1, 1$ , y  $k \in \mathbb{Z}$ . Por la periodicidad de la función coseno, es suficiente considerar  $k \in \{0, 1\}$ . Así tenemos cuatro ceros del tipo

$$(r^*, \alpha^*) = \left( \sqrt{2h}, \frac{n}{2} \arccos \left( \frac{126A^2h - 140ABh - 56B^2h - 50\Lambda}{49ABh + 70B^2h} \right) + k\pi \right), \quad (4.68)$$

donde  $n = -1, 1, k = 0, 1$  y estos ceros están bien definidos para los valores de los parámetros  $A, B$  y  $\Lambda$  si se satisface

$$(7A + 10B)B \neq 0, \quad \left| \frac{63A^2h - 70ABh - 28B^2h - 25\Lambda}{(7A + 10B)Bh} \right| < \frac{7}{2}. \quad (4.69)$$

El Jacobiano de  $f_2$  evaluado en estos ceros  $(r^*, \alpha^*)$  es

$$J_{f_2(\sqrt{2h}, \alpha^*)} = \frac{1}{400} (7h(9A - 2B)(2A - B) - 50\Lambda) (63h(A - 2B)(2A + B) - 50\Lambda) h^4,$$

que es no nulo si

$$(7h(9A - 2B)(2A - B) - 50\Lambda) (63h(A - 2B)(2A + B) - 50\Lambda) \neq 0. \quad (4.70)$$

Así aplicando el método del promedio de segundo orden se puede ver que los cuatro ceros (4.68) corresponden a diferentes condiciones iniciales de la misma solución periódicas del sistema diferencial (4.62). Por tanto existe al menos una solución del sistema y esto completa la demostración del Teorema 4.3 parte (a).

**Observación 4.9** Note que las condiciones sobre los parámetros  $A, B$  y  $\Lambda$  dados en (4.69) y (4.70) forma un conjunto no vacío (ver Figura 4.6).

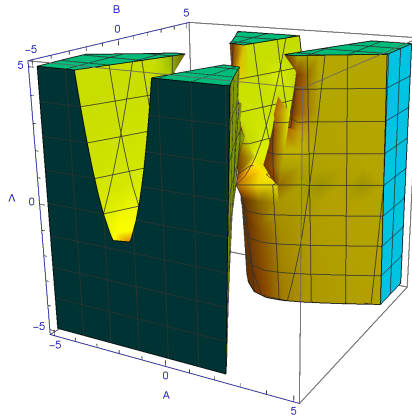


Figura 4.6: Región en el espacio de parámetros  $(A, B, \Lambda) \in \Sigma_{ABA}^1$ .

**Condición 1.3:**  $\sin(2\alpha) = 0 \Leftrightarrow \alpha = \frac{k\pi}{2}$  con  $k \in \mathbb{Z}$ , debido a la periodicidad de la función seno, el estudio se separa en los subcasos  $k = 0, 2$  y  $k \pm 1$ .

**Subcondición 1.3.1:** Si  $\alpha = 0, \pi$  ( es decir  $k = 0, 2$ ), tenemos que la función  $f_{21} \equiv 0$  y  $f_{22}$  en la variable  $r$  es:

$$f_{22}(r, 0) = \frac{1}{160} \left( 63r^2 (r^2(5B - A)) - 6Bh \right) (r^2(B - A) - 3Bh) - 50\Lambda r^4.$$

Resolviendo la ecuación  $f_{22}(r, 0) = 0$ , obtenemos como raíces a:

$$\begin{cases} r_1^* = \sqrt{\frac{189Bh(7B - 3A) + 50\Lambda - \sqrt{L_1}}{126(A - 5B)(A - B)}}, \\ r_2^* = \sqrt{\frac{189Bh(7B - 3A) + 50\Lambda + \sqrt{L_1}}{126(A - 5B)(A - B)}}. \end{cases}$$

Notar que el sistema (4.67) tiene dos ceros  $(r^*, \alpha^*)$ , el primero es

$$(r_1^*, \alpha^*) = \left( \sqrt{\frac{189Bh(7B - 3A) + 50\Lambda - \sqrt{L_1}}{126(A - 5B)(A - B)}}, 0 \right), \quad (4.71)$$

que está bien definido si

$$L_1 > 0, (A - 5B)(A - B) \neq 0, \frac{189Bh(7B - 3A) + 50\Lambda - \sqrt{L_1}}{(A - 5B)(A - B)} > 0. \quad (4.72)$$

Evaluando el Jacobiano  $J_{f_2(r, \alpha)}$  en el cero  $(r_1^*, \alpha^*)$  se tiene

$$J_{f_2(r_1^*, 0)} = \frac{B (189Bh(3A - 7B) - 50\Lambda + \sqrt{L_1})^2 Z_1}{116143430860800(A - 5B)^5(A - B)^5},$$

que es no nulo si

$$B(A - 5B)(A - B)Z_1 \neq 0, \quad (4.73)$$

donde  $L_1$  y  $Z_1$  son expresiones dadas previa al Teorema 4.3. El segundo cero  $(r^*, \alpha^*)$  del sistema (4.67) es

$$(r_2^*, \alpha^*) = \left( \sqrt{\frac{189Bh(7B - 3A) + 50\Lambda + \sqrt{L_1}}{\sqrt{42}(A - 5B)(A - B)}}, 0 \right), \quad (4.74)$$

que está bien definido si

$$L_1 > 0, (A - 5B)(A - B) \neq 0, \frac{189Bh(7B - 3A) + 50\Lambda + \sqrt{L_1}}{(A - 5B)(A - B)} > 0. \quad (4.75)$$

Evaluando el Jacobiano  $J_{f_2(r,\alpha)}$  en el cero  $(r_2^*, \alpha^*)$  se tiene

$$J_{f_2(r_2^*, \alpha^*)} = \frac{B(189Bh(7B - 3A) + 50\Lambda + \sqrt{L_1})^2 Z_2}{14517928857600(A - 5B)^5(A - B)^5},$$

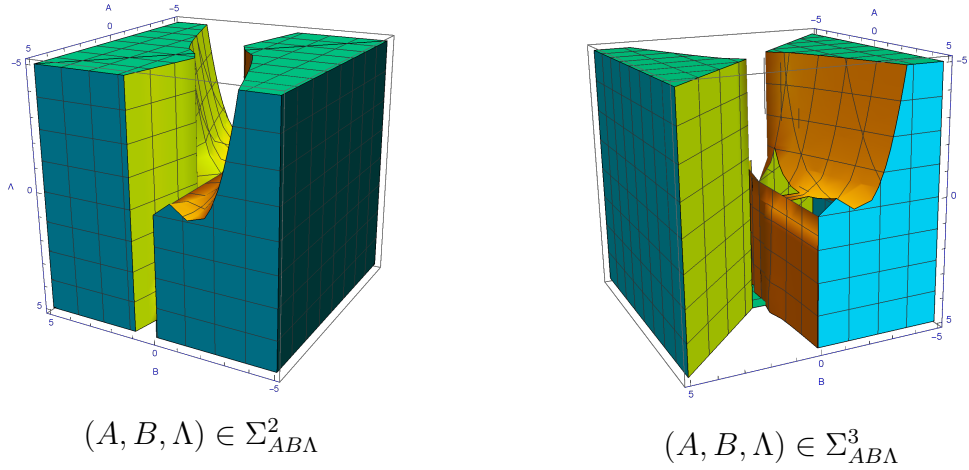
que es no nulo si

$$B(A - 5B)(A - B)Z_2 \neq 0, \quad (4.76)$$

donde  $Z_2$  es la expresión dada previa al Teorema 4.3. Por tanto podemos aplicar el método del promedio de segundo orden para concluir que los ceros en (4.71) y (4.74) proporcionan al menos dos familias de soluciones periódicas del sistema diferencial (4.62). Esto completa la demostración del Teorema 4.3 en los apartados (b) y (c).

**Observación 4.10** Note que las condiciones sobre los parámetros  $A, B, \Lambda$  en (4.72) y (4.73) así como (4.75) y (4.76) forman conjuntos no vacíos (ver Figura 4.7).

Figura 4.7: Regiones en el espacio de parámetros  $(A, B, \Lambda) \in \Sigma_{ABA}^i, i = 2, 3$ .



**Subcondición 1.3.2:** Si  $\alpha = \pm \frac{\pi}{2}$  (es decir para  $k = \pm 1$ ), tenemos que la función  $f_{21} \equiv 0$  y  $f_{22}$  en la variable  $r$  es:

$$f_{22}(r, \pm \pi/2) = \frac{1}{160} r^2 (63A^2 r^4 + 91ABr^2 (3h - 2r^2) + B^2 (174h^2 - 303hr^2 + 115r^4) - 50\Lambda r^2).$$

Resolviendo la ecuación  $f_{22}(r, \pm\pi/2) = 0$ , tenemos como raíces a

$$r_1^* = \sqrt{\frac{3Bh(101B - 91A) + 50\Lambda - S}{126A^2 - 364AB + 230B^2}}, \quad r_2^* = \sqrt{\frac{3Bh(101B - 91A) + 50\Lambda + S}{126A^2 - 364AB + 230B^2}},$$

Notemos que el sistema (4.67) tiene cuatro ceros  $(r^*, \alpha^*)$  dados por

$$(r_1^*, \alpha^*) = \left( \sqrt{\frac{3Bh(101B - 91A) + 50\Lambda - S}{126A^2 - 364AB + 230B^2}}, \pm\pi/2 \right), \quad (4.77)$$

$$(r_2^*, \alpha^*) = \left( \sqrt{\frac{3Bh(101B - 91A) + 50\Lambda + S}{126A^2 - 364AB + 230B^2}}, \pm\pi/2 \right). \quad (4.78)$$

Los ceros  $(r_1^*, \alpha^*)$  están bien definidos para valores de los parámetros  $A, B$  y  $\Lambda$  tal que

$$126A^2 - 364AB + 230B^2 \neq 0, \quad \frac{3Bh(101B - 91A) + 50\Lambda - S}{126A^2 - 364AB + 230B^2} > 0. \quad (4.79)$$

El Jacobiano de  $f_2$  evaluado en (4.77) es

$$J_{f_2(r_1^*, \alpha^*)} = -\frac{B(3Bh(91A - 101B) - 50\Lambda + S)^2 Z_3}{102400(63A^2 - 182AB + 115B^2)^5},$$

que es no nulo si

$$B(63A^2 - 182AB + 115B^2) Z_3 \neq 0. \quad (4.80)$$

Además los ceros (4.78) del sistema (4.67) están bien definidos para los valores de los parámetros  $A, B$  y  $\Lambda$  tal que

$$(126A^2 - 364AB + 230B^2) \neq 0, \quad \frac{3Bh(101B - 91A) + 50\Lambda + S}{126A^2 - 364AB + 230B^2} > 0. \quad (4.81)$$

El Jacobiano de  $f_2$  evaluado en  $(r_2^*, \alpha^*)$  es

$$J_{f_2(r_2^*, \alpha^*)} = -\frac{1}{102400(63A^2 - 182AB + 115B^2)^5} B(3Bh(101B - 91A) + 50\Lambda + S)^2 Z_4,$$

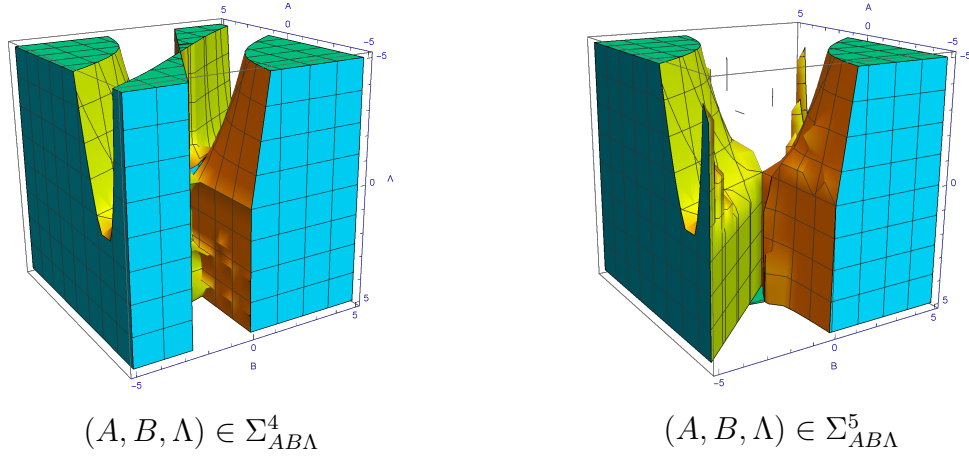
que es no nulo si

$$B(63A^2 - 182AB + 115B^2) Z_4 \neq 0, \quad (4.82)$$

donde  $S, Z_3$  y  $Z_4$  son expresiones dadas previa al Teorema 4.3. Por el método del promedio de segundo orden concluimos que los ceros (4.77) y (4.78) proporcionan al menos cuatro familias de soluciones periódicas del sistema diferencial (4.62). Esto completa la demostración del Teorema 4.3 en los apartados (d) y (e).

**Observación 4.11** Note que las condiciones sobre los parámetros  $A, B, \Lambda$  en (4.79) y (4.80) así como (4.81) y (4.82) forman conjuntos no vacíos (ver Figura 4.8).

Figura 4.8: Regiones en el espacio de parámetros  $(A, B, \Lambda) \in \Sigma_{ABA}^i, i = 4, 5$ .



**Condición 1.4:** Si consideramos

$$r^2(50B - 49A) + 90B \cos(2\alpha) (r^2 - 2h) - 240Bh = 0,$$

entonces tenemos  $\alpha$  escrito en términos de  $r$  como

$$\alpha = \frac{n}{2} \arccos \left( -\frac{49Ar^2 + 240Bh - 50Br^2}{180Bh - 90Br^2} \right) + k\pi,$$

donde  $n = -1, 1$ , y  $k \in \mathbb{Z}$ . Debido a la periodicidad de la función coseno se debe considerar los casos  $k = 0$  y  $k = 1$ . Podemos notar que el caso  $k = 1$  genera una complejidad computacional para localizar ceros explícitos de la función  $f_{22}(r, \alpha)$ . Por lo que sólo consideramos el caso  $k = 0$ .

Si  $k = 0$ , entonces  $\alpha = -\frac{1}{2} \arccos \left( -\frac{49Ar^2 + 240Bh - 50Br^2}{180Bh - 90Br^2} \right)$ , la función  $f_{22}$  en la variable  $r$  es:

$$f_{22}(r, \alpha) = \frac{7}{14400} r^2 (r^4 (467A^2 - 2900AB + 1250B^2) + 90Bhr^2 (32A - 49B) + 1980B^2h^2) - \frac{5\Lambda r^4}{16}.$$

Resolviendo la ecuación  $f_{22}(r, \alpha) = 0$ , obtenemos las siguientes raíces:

$$\begin{cases} r_1^* = \sqrt{-\frac{3}{7} \left( \frac{105Bh(32A - 49B) - 750\Lambda + \sqrt{L_2}}{467A^2 - 2900AB + 1250B^2} \right)}, \\ r_2^* = \sqrt{\frac{3}{7} \left( \frac{105Bh(32A - 49B) - 750\Lambda + \sqrt{L_2}}{467A^2 - 2900AB + 1250B^2} \right)}. \end{cases}$$

Sustituyendo  $r_1^*$  y  $r_2^*$  en  $\alpha$ , se tiene

$$\alpha_1^* = -\frac{1}{2} \operatorname{arcsec} \left( \frac{W}{J} \right), \quad \alpha_2^* = -\frac{1}{2} \operatorname{arcsec} \left( -\frac{W_1}{J} \right),$$

donde las expresiones  $J, L_2, W$  y  $W_1$  son dadas previa al Teorema 4.3. Notar que el sistema (4.67) tiene cuatro ceros:

$$(r_1^*, \alpha_1^*) \quad (r_1^*, \alpha_2^*) \quad (r_2^*, \alpha_1^*) \quad \text{y} \quad (r_2^*, \alpha_2^*). \quad (4.83)$$

El primer cero  $(r_1^*, \alpha_1^*)$  está bien definido si

$$\begin{aligned} L_2 > 0, \quad \frac{105Bh(32A - 49B) - 750\Lambda + \sqrt{L_2}}{467A^2 - 2900AB + 1250B^2} < 0, \\ \left| \frac{W}{J} \right| < 1, \quad (467A^2 - 2900AB + 1250B^2) \neq 0. \end{aligned} \quad (4.84)$$

El Jacobiano de  $f_2$  evaluado en el cero  $(r_1^*, \alpha_1^*)$  es

$$J_{f_2(r_1^*, \alpha_1^*)} = \frac{81BZ_5Z_6}{3011814400W^4 (467A^2 - 2900AB + 1250B^2)^6},$$

que es no nulo si

$$(467A^2 - 2900AB + 1250B^2) BWZ_5Z_6 \neq 0. \quad (4.85)$$

donde las expresiones  $Z_5$  y  $Z_6$  son dadas previa al Teorema 4.3. El segundo cero  $(r_1^*, \alpha_2^*)$  está bien definido para valores de los parámetros  $A, B$  y  $\Lambda$  tal que

$$\begin{aligned} L_2 > 0, \quad \frac{105Bh(32A - 49B) - 750\Lambda + \sqrt{L_2}}{467A^2 - 2900AB + 1250B^2} < 0, \\ \left| \frac{W_1}{J} \right| < 1, \quad (467A^2 - 2900AB + 1250B^2) \neq 0. \end{aligned} \quad (4.86)$$

El Jacobiano de  $f_2$  evaluado en el cero  $(r_1^*, \alpha_2^*)$  se tiene

$$J_{f_2(r_1^*, \alpha_2^*)} = \frac{81BZ_5Z_7}{3011814400W_1^4 (467A^2 - 2900AB + 1250B^2)^6},$$

que es no nulo si

$$(467A^2 - 2900AB + 1250B^2) BW_1 Z_5 Z_7 \neq 0, \quad (4.87)$$

donde la expresión  $Z_7$  es dada previa al Teorema 4.3. El tercer cero  $(r_2^*, \alpha_1^*)$  está bien definido si

$$\begin{aligned} L_2 > 0, \frac{105Bh(32A - 49B) - 750\Lambda + \sqrt{L_2}}{467A^2 - 2900AB + 1250B^2} > 0, \\ \left| \frac{W}{J} \right| < 1, (467A^2 - 2900AB + 1250B^2) \neq 0. \end{aligned} \quad (4.88)$$

El Jacobiano de  $f_2$  evaluado en  $(r_2^*, \alpha_1^*)$  es

$$J_{f_2(r_2^*, \alpha_1^*)} = \frac{81BZ_8Z_9}{3011814400W^4 (467A^2 - 2900AB + 1250B^2)^6},$$

el cual es no nulo si

$$(467A^2 - 2900AB + 1250B^2) BWZ_8Z_9 \neq 0, \quad (4.89)$$

donde las expresiones  $Z_8$  y  $Z_9$  son dadas previa al Teorema 4.3. Finalmente el cuarto cero  $(r_2^*, \alpha_2^*)$  está bien definido para los valores de los parámetros  $A, B$  y  $\Lambda$  que satisfacen las condiciones:

$$\begin{aligned} L_2 > 0, \frac{105Bh(32A - 49B) - 750\Lambda + \sqrt{L_2}}{467A^2 - 2900AB + 1250B^2} > 0, \\ \left| \frac{W_1}{J} \right| < 1, (467A^2 - 2900AB + 1250B^2) \neq 0. \end{aligned} \quad (4.90)$$

El Jacobiano de  $f_2$  evaluado en el cero  $(r_2^*, \alpha_2^*)$  se tiene

$$J_{f_2(r_2^*, \alpha_2^*)} = \frac{81BZ_8Z_{10}}{3011814400W_1^4 (467A^2 - 2900AB + 1250B^2)^6},$$

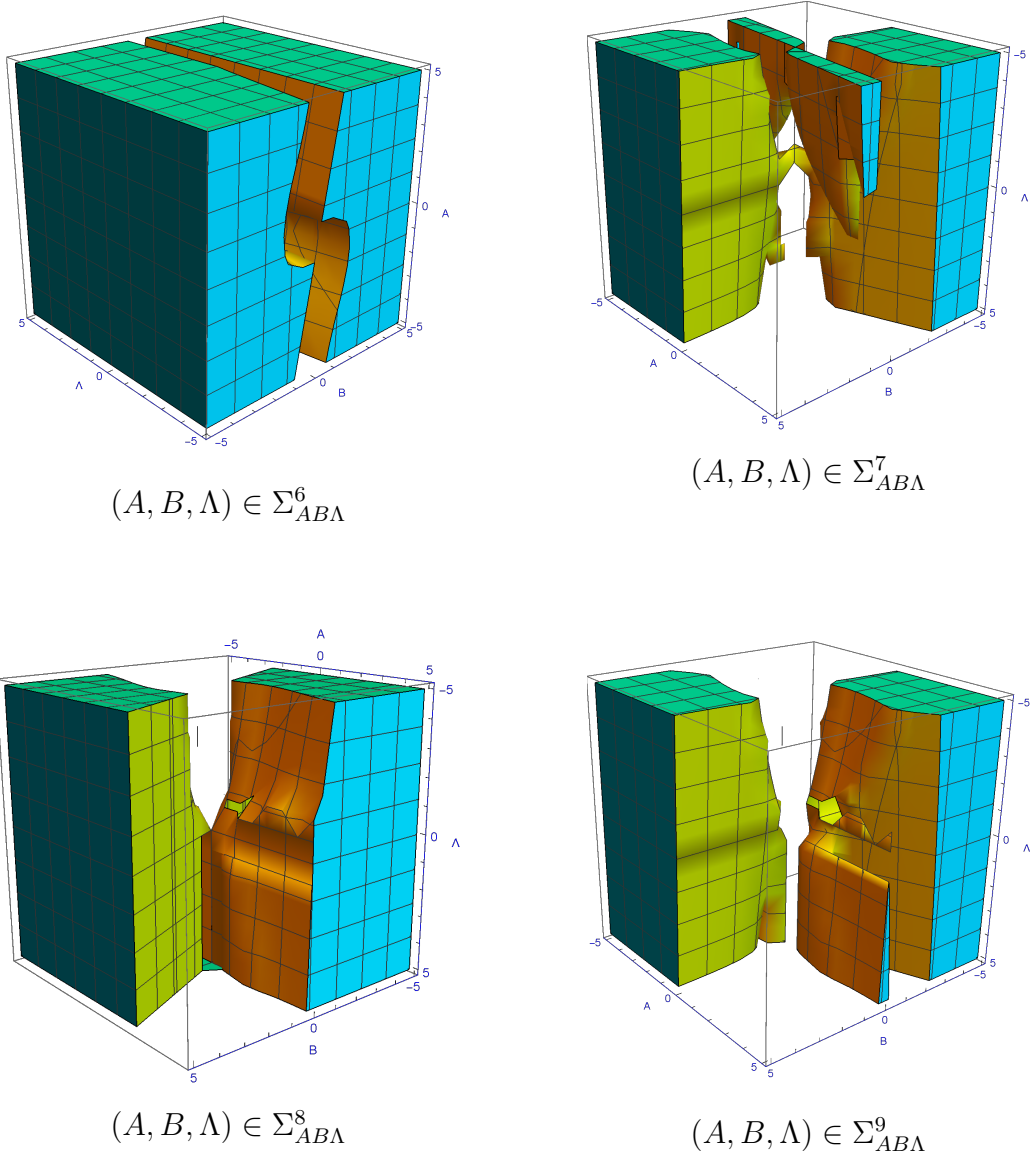
que es no nulo si

$$(467A^2 - 2900AB + 1250B^2) BW_1 Z_8 Z_{10} \neq 0, \quad (4.91)$$

donde la expresión  $Z_{10}$  es dada previa al Teorema 4.3. Aplicando el método del promedio de segundo orden en esta Condición 1.4 obtenidos en (4.83) proporcionan al menos cuatro familias de soluciones periódicas del sistema diferencial (4.62). Esto completa la demostración del Teorema 4.3 en los apartados (f), (g), (h) e (i).

**Observación 4.12** Note que las condiciones sobre los parámetros  $A, B, \Lambda$  dados en (4.124)-(4.125) así como (4.86)-(4.87), (4.88)-(4.89) y (4.90)-(4.91) forman conjuntos no vacíos (ver Figura 4.9).

Figura 4.9: Regiones en el espacio de parámetros  $(A, B, \Lambda) \in \Sigma_{ABA}^i, i = 6, \dots, 9$ .



Esto finaliza la prueba del Teorema de existencia de soluciones periódicas en el caso 1. □

**Corolario 4.2** *La familia de soluciones periódicas  $(x(t, \varepsilon), y(t, \varepsilon), p_x(t, \varepsilon), p_y(t, \varepsilon))$  del sistema hamiltoniano (4.19) obtenidos a partir de los ceros  $(r^*, \alpha^*)$  de la función promedio, en cada nivel de energía positiva  $H_1 = h$  son dados por*

$$\begin{aligned}x(t, \varepsilon) &= r^* \cos(t) + O(\varepsilon), \\y(t, \varepsilon) &= \rho^* \cos(t + \alpha^*) + O(\varepsilon), \\p_x(t, \varepsilon) &= r^* \sin(t) + O(\varepsilon), \\p_y(t, \varepsilon) &= \rho^* \sin(t + \alpha^*) + O(\varepsilon).\end{aligned}$$

A continuación presentamos el Teorema de estabilidad para las soluciones periódicas determinadas en el Teorema 4.3.

**Teorema 4.4 (Estabilidad)** *Todas las familias de soluciones periódicas del Teorema 4.3 son inestables.*

**Demostración.** Para determinar el tipo de estabilidad de las soluciones periódicas dadas en el Teorema 4.3 se aplicará el Teorema 2.6 que dice que el tipo de estabilidad de las soluciones periódicas viene dado por el signo de los autovalores  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  de la matriz jacobiana  $J_{f_2(r, \alpha)}$  evaluada en los ceros  $(r^*, \alpha^*)$ .

(i) Las dos familias de soluciones periódicas dada en el Teorema 4.3 parte (a) son inestables, pues los autovalores de la matriz Jacobiana de  $f_2$  evaluada en los ceros  $(r^*, \alpha^*)$  son

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= -\frac{7}{20}Bh^3(7A + 10B)\sqrt{1 - \frac{(126A^2h - 140ABh - 56B^2h - 50\Lambda)^2}{(49ABh + 70B^2h)^2}}, \\ \lambda_2 &= -\lambda_1.\end{aligned}$$

Notar que la condición de estabilidad sobre los parámetros  $A, B, \Lambda$  es no vacía si  $(A, B, \Lambda) \in \Sigma_{AB\Lambda}^1$  y  $\left(\frac{126A^2h - 140ABh - 56B^2h - 50\Lambda}{49ABh + 70B^2h}\right) < 1$ .

(ii) La familia de soluciones periódicas en el Teorema 4.3 parte (b) son inestables, pues los autovalores de la matriz Jacobiana de  $f_2$  evaluada en los ceros  $(r^*, \alpha^*)$

son

$$\lambda_1 = - \frac{1}{3810240(A-5B)^2(A-B)^2\sqrt{(A-5B)(A-B)}} \sqrt{\frac{189Bh(7B-3A) + 50\Lambda - \sqrt{L_1}}{(A-5B)(A-B)}} Z_{11},$$

$$\lambda_2 = -\lambda_1,$$

donde la expresión  $Z_{11}$  es dada previa al Teorema 4.3. Podemos observar que la condición de estabilidad sobre los parámetros  $A, B, \Lambda$  es no vacía si  $(A, B, \Lambda) \in \Sigma_{AB\Lambda}^2$ ,  $(A-5B)(A-B) > 0$ .

- (iii) La familia de soluciones periódicas del Teorema 4.3 parte (c) son inestables, pues los autovalores de la matriz Jacobiana de  $f_2$  evaluada en los ceros  $(r^*, \alpha^*)$  son:

$$\lambda_1 = - \frac{1}{3810240(A-5B)^2(A-B)^2\sqrt{(A-5B)(A-B)}} \sqrt{\frac{189Bh(7B-3A) + 50\Lambda - \sqrt{L_1}}{(A-5B)(A-B)}} Z_{12},$$

$$\lambda_2 = -\lambda_1,$$

donde la expresión  $Z_{12}$  es dada previa al Teorema 4.3. En este caso la condición de estabilidad sobre los parámetros  $A, B, \Lambda$  es no vacía si  $(A, B, \Lambda) \in \Sigma_{AB\Lambda}^3$ ,  $(A-5B)(A-B) > 0$ .

- (iv) Las dos familias de soluciones periódicas dada en el Teorema 4.3 parte (d) son inestables, pues

- Los autovalores de la matriz Jacobiana  $J_{f_2}$  evaluada en  $(r_1, \pi/2)$  con  $r_1 = \sqrt{\frac{3Bh(101B-91A) + 50\Lambda - S}{126A^2 - 364AB + 230B^2}}$ , son:

$$\lambda_1 = - \frac{1}{160(63A^2 - 182BA + 115B^2)^{5/2}} \sqrt{\frac{3B(101B-91A)h + 50\Lambda - S}{126A^2 - 364BA + 230B^2}} Z_{13}$$

$$\lambda_2 = -\lambda_1,$$

donde la expresión  $Z_{13}$  es dada previa al Teorema 4.3. Se puede observar que la condición de estabilidad sobre los parámetros  $A, B, \Lambda$  es no vacía si  $(A, B, \Lambda) \in \Sigma_{AB\Lambda}^4$ ,  $(63A^2 - 182AB + 115B^2) > 0$ .

- Los autovalores de la matriz Jacobiana  $J_{f_2}$  evaluada en  $(r_1, -\pi/2)$  son:

$$\lambda_1 = -\frac{1}{160(63A^2 - 182BA + 115B^2)^{5/2}} \sqrt{\frac{3B(101B - 91A)h + 50\Lambda + \sqrt{L_3}}{126A^2 - 364BA + 230B^2}} Z_{14},$$

$$\lambda_2 = -\lambda_1,$$

que satisfacen  $\lambda_1 = -\lambda_2$ , donde la expresión  $Z_{14}$  es dada previa al Teorema 4.3.

- Los autovalores de la matriz Jacobiana  $J_{f_2}$  evaluada en  $(r^*, \alpha^*) = (r_2, \pi/2)$  con  $r_2 = \sqrt{\frac{3Bh(101B - 91A) + 50\Lambda + S}{126A^2 - 364AB + 230B^2}}$ , son los mismos que la matriz Jacobiana  $J_{f_2(r_1, \pi/2)}$ , es decir,  $J_{f_2(r_2, \pi/2)} = J_{f_2(r_1, \pi/2)}$ , así decimos que la familia de soluciones periódicas dada en el Teorema 4.3 parte (e) es inestable. Análogamente los autovalores de la matriz Jacobiana  $J_{f_2(r_2, -\pi/2)}$  es igual a los autovalores de  $J_{f_2(r_1, -\pi/2)}$  y como  $J_{f_2(r_2, -\pi/2)} = J_{f_2(r_1, -\pi/2)}$  concluimos por (iv) que la familia de soluciones periódicas (4.78) son inestables.

(v) Finalmente la familias de soluciones periódicas dada en el Teorema 4.3 parte (f), (g), (h), (i) son inestables, pues los autovalores de la matriz Jacobiana de  $f_2$  evaluada en los ceros  $(r^*, \alpha^*)$  satisfacen  $\lambda_1 = -\lambda_2$ . Los autovalores no están escritos por su extensión algebraica.

Así el Teorema de estabilidad queda demostrado.  $\square$

**Caso 2:**  $F = 0$ ,  $\Lambda = 0$ ,  $m = 0$ .

Si  $F = 0$ ,  $\Lambda = 0$ ,  $m = 0$  y  $\lambda \neq 0$ , entonces el Hamiltoniano (4.51) con potencial de grado 6, se reduce a

$$H_2 = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2) + \varepsilon \left( \frac{A}{5}x^5 + Bx^3y^2 \right) + \varepsilon^2 \frac{1}{6}\lambda y^6, \quad (4.92)$$

donde  $A, B, \lambda$  son parámetros reales arbitrarios. El sistema hamiltoniano asociado a la función Hamiltoniana (4.92) es

$$\begin{aligned}
 x' &= p_x, \\
 y' &= p_y, \\
 p'_x &= -x - \varepsilon (Ax^4 + 3Bx^2y^2), \\
 p'_y &= -y - \varepsilon(2Bx^3y) - \varepsilon^2\lambda y^5.
 \end{aligned} \tag{4.93}$$

La periodicidad en la variable independiente del sistema diferencial (4.93) es necesario para aplicar el método del promedio, por lo que hacemos el cambio de variable  $(x, y, p_x, p_y) \rightarrow (r, \theta, \rho, \alpha) \in \mathbb{R}^+ \times S^1 \times \mathbb{R}^+ \times S^1$  definida por

$$x = r \cos \theta, \quad y = \rho \cos(\theta + \alpha), \quad p_x = r \sin \theta, \quad p_y = \rho \sin(\theta + \alpha),$$

para  $r > 0$  y  $\rho > 0$ . El nivel de energía  $h$  de  $H_2$  en coordenadas polares es:

$$h = \frac{1}{2} (r^2 + \rho^2) + \frac{1}{6} \lambda \rho^6 \varepsilon^2 \cos^6(\alpha + \theta) + \varepsilon \left( \frac{1}{5} A r^5 \cos^5(\theta) + B \rho^2 r^3 \cos^3(\theta) \cos^2(\alpha + \theta) \right), \tag{4.94}$$

y las ecuaciones de movimiento son dados por:

$$\begin{aligned}
 \dot{r} &= \frac{1}{r} \varepsilon \left( -Ar^5 \sin(\theta) \cos^4(\theta) - 3Br^3(2h - r^2) \sin(\theta) \cos^2(\theta) \cos^2(\alpha + \theta) \right), \\
 \dot{\theta} &= -1 - \frac{1}{r} \varepsilon \left( Ar^4 \cos^5(\theta) + 3Br^2(2h - r^2) \cos^3(\theta) \cos^2(\alpha + \theta) \right), \\
 \dot{\rho} &= -2Br^3 \varepsilon \sqrt{2h - r^2} \cos^3(\theta) \sin(\alpha + \theta) \cos(\alpha + \theta) + \lambda \varepsilon^2 \left( -(2h - r^2)^{5/2} \right) \\
 &\quad \sin(\alpha + \theta) \cos^5(\alpha + \theta), \\
 \dot{\alpha} &= \frac{1}{r} \varepsilon \left( Ar^4 \cos^5(\theta) + 3Br^2(2h - r^2) \cos^3(\theta) \cos^2(\alpha + \theta) - 2Br^3 \cos^3(\theta) \cos^2(\alpha + \theta) \right) \\
 &\quad + \frac{1}{r} \varepsilon^2 \left( \lambda r^5 \cos^6(\theta) - \lambda (2h - r^2)^2 \cos^6(\alpha + \theta) \right).
 \end{aligned} \tag{4.95}$$

El sistema diferencial en su forma estándar es

$$\begin{aligned}
r' &= \left( r^2 \sin(\theta) \cos^2(\theta) (Ar^2 \cos^2(\theta) - 3B(r^2 - 2h) \cos^2(\alpha + \theta)) \right) \varepsilon + \left( -\frac{1}{5}r^3 \sin(\theta) \right. \\
&\quad \left. \cos^5(\theta) (5A^2r^4 \cos^4(\theta) + 12ABr^2 (5h - 2r^2) \cos^2(\theta) \cos^2(\alpha + \theta) + 15B^2(r^2 - 6h) \right. \\
&\quad \left. + 15B^2(r^2 - 6h)(r^2 - 2h) \cos^4(\alpha + \theta)) \right) \varepsilon^2 + O(\varepsilon^3), \\
\alpha' &= \left( Br(5r^2 - 6h) \cos^3(\theta) \cos^2(\alpha + \theta) - Ar^3 \cos^5(\theta) \right) \varepsilon + \left( A^2r^6 \cos^{10}(\theta) + \frac{2}{5}ABr^4 \right. \\
&\quad \left. (30h - 17r^2) \cos^8(\theta) \cos^2(\alpha + \theta) + 9B^2r^2(r^2 - 2h)^2 \cos^6(\theta) \cos^4(\alpha + \theta) \right. \\
&\quad \left. + \lambda(r^2 - 2h)^2 \cos^6(\alpha + \theta) \right) \varepsilon^2 + O(\varepsilon^3). \tag{4.96}
\end{aligned}$$

En este caso la función promedio de segundo orden es  $f_2 = (f_{21}, f_{22})$  donde

$$\begin{aligned}
f_{21} &= \frac{1}{320} Br^3 \sin(2\alpha) (r^2 - 2h) \left( r^2(50B - 49A) + 90B \cos(2\alpha) (r^2 - 2h) - 240Bh \right), \\
f_{22} &= \frac{1}{160} \left( r^6 (63A^2 - 280AB + 170B^2) + Br^2 (\cos(2\alpha) (3hr^2(49A - 170B) + 2r^4 \right. \\
&\quad \left. (50B - 49A) + 480Bh^2) + 45B \cos(4\alpha) (2h^2 - 3hr^2 + r^4) + 6Bhr^4(70A \right. \\
&\quad \left. - 113B) + 564B^2h^2r^2 + 50\lambda(r^2 - 2h)^2 \right). \tag{4.97}
\end{aligned}$$

Siguiendo el método del promedio de segundo orden, necesitamos determinar los ceros  $(r^*, \alpha^*)$  de

$$f_{2i}(r, \alpha) = 0, \quad \text{para } i = 1, 2, \tag{4.98}$$

y luego debemos verificar que el determinante de la matriz Jacobiana  $J_{f_2(r, \alpha)}$  evaluada en los ceros  $(r^*, \alpha^*)$  sea no nulo.

Antes de enunciar los resultados en este Caso 2, consideremos las notaciones siguientes en relación con los parámetros  $A, B$  y  $\lambda$ :

$$\begin{aligned}
P_1 &= 378(A^2 - 6AB + 5B^2)(567B^2h^2 - 100h\lambda) - (567ABh - 1323B^2h + 50\lambda)^2. \\
P_2 &= 4(378(A^2 - 6AB + 5B^2)(567B^2h^2 - 100h\lambda) - (567ABh - 1323B^2h + 50\lambda)^2)^3 + (-21432600A^4h^2\lambda + 192893400A^3Bh^2\lambda - 486091368A^2B^4h^3 - 514382400A^2B^2h^2\lambda - 5670000A^2h\lambda^2 + 972182736AB^5h^3 + 321489000AB^3h^2\lambda + 25515000ABh\lambda^2 + 378071064B^6h^3 - 150028200B^4h^2\lambda - 8505000B^2h\lambda^2 - 250000\lambda^3)^2. \\
P_3 &= -354375h\lambda^2(2A^2 - 9AB + 3B^2) - 2679075h^2\lambda(A^4 - 9A^3B + 24A^2B^2 - 15AB^3 + 7B^4) + 6751269B^4h^3(3A + B)(7B - 3A) - 31250\lambda^3. \\
P_4 &= -\frac{567ABh - 1323B^2h + 50\lambda}{189(A^2 - 6AB + 5B^2)} + \frac{1}{189\sqrt[3]{2}(A^2 - 6AB + 5B^2)} \left( -21432600A^4h^2\lambda + 192893400A^3Bh^2\lambda - 486091368A^2B^4h^3 - 514382400A^2B^2h^2\lambda - 5670000A^2h\lambda^2 + 972182736AB^5h^3 + 321489000AB^3h^2\lambda + 25515000ABh\lambda^2 + 378071064B^6h^3 - 150028200B^4h^2\lambda - 8505000B^2h\lambda^2 - 250000\lambda^3 + \sqrt{P_2} \right)^{1/3} - \left( \sqrt[3]{2}(378(A^2 - 6AB + 5B^2)(567B^2h^2 - 100h\lambda) - (567ABh - 1323B^2h + 50\lambda)^2) \right) \cdot \left( 189(A^2 - 6AB + 5B^2)(-21432600A^4h^2\lambda + 192893400A^3Bh^2\lambda - 486091368A^2B^4h^3 - 514382400A^2B^2h^2\lambda - 5670000A^2h\lambda^2 + 972182736AB^5h^3 + 321489000AB^3h^2\lambda + 25515000ABh\lambda^2 + 378071064B^6h^3 - 150028200B^4h^2\lambda - 8505000B^2h\lambda^2 - 250000\lambda^3 + \sqrt{P_2})^{1/3} \right)^{-1}. \\
P_5 &= 4(6(63A^2 - 182AB + 115B^2)(87B^2h^2 - 100h\lambda) - (273ABh - 303B^2h + 50\lambda)^2)^3 + (-21432600A^4h^2\lambda - 13759200A^3B^3h^3 + 92874600A^3Bh^2\lambda + 27792072A^2B^4h^3 - 150746400A^2B^2h^2\lambda - 5670000A^2h\lambda^2 - 14859936AB^5h^3 + 105651000AB^3h^2\lambda + 12285000ABh\lambda^2 + 1068984B^6h^3 - 27232200B^4h^2\lambda - 5805000B^2h\lambda^2 - 250000\lambda^3)^2. \\
P_6 &= 126\sqrt[3]{2}A^2h(661B^2h + 600\lambda) - 546ABh(8(-16875h\lambda^2(42A^2 - 91AB + 43B^2) + 189B^3h^3(101B - 91A)(100A^2 - 91AB + 7B^2) - 675h^2\lambda(3969A^4 - 17199A^3B + 27916A^2B^2 - 19565AB^3 + 5043B^4) - 31250\lambda^3) + \sqrt{P_5})^{1/3} + 2^{2/3}(8(-16875h\lambda^2(42A^2 - 91AB + 43B^2) + 189B^3h^3(101B - 91A)(100A^2 - 91AB + 7B^2) - 675h^2\lambda(3969A^4 - 17199A^3B + 27916A^2B^2 - 19565AB^3 + 5043B^4) - 31250\lambda^3) + \sqrt{P_5})^{2/3} + 606B^2h(8(-16875h\lambda^2(42A^2 - 91AB + 43B^2) + 189B^3h^3(101B - 91A)(100A^2 - 91AB + 7B^2) - 675h^2\lambda(3969A^4 - 17199A^3B + 27916A^2B^2 - 19565AB^3 + 5043B^4) - 31250\lambda^3) + \sqrt{P_5})^{1/3} - 3276\sqrt[3]{2}ABh(43B^2h + 50\lambda) + 2\sqrt[3]{2}(31779B^4h^2 + 38700B^2h\lambda + 2500\lambda^2).
\end{aligned}$$

$$P_7 = -16875h\lambda^2(42A^2 - 91AB + 43B^2) + 189B^3h^3(101B - 91A)(100A^2 - 91AB + 7B^2) - 675h^2\lambda(3969A^4 - 17199A^3B + 27916A^2B^2 - 19565AB^3 + 5043B^4) - 31250\lambda^3.$$

$$P_8 = (10593\sqrt[3]{2}h^2B^4) \left( (63A^2 - 182BA + 115B^2) (1068984h^3B^6 - 14859936Ah^3B^5 + 27792072A^2h^3B^4 - 27232200h^2\lambda B^4 - 13759200A^3h^3B^3 + 105651000Ah^2\lambda B^3 - 5805000h\lambda^2B^2 - 150746400A^2h^2\lambda B^2 + 250000\lambda^3 - 5670000A^2h\lambda^2 - 21432600A^4h^2\lambda + \sqrt{P_5})^{1/3} \right)^{-1} - (23478\sqrt[3]{2}Ah^2B^3) \left( (63A^2 - 182BA + 115B^2) (1068984h^3B^6 - 14859936Ah^3B^5 + 27792072A^2h^3B^4 - 27232200h^2\lambda B^4 - 13759200A^3h^3B^3 + 105651000Ah^2\lambda B^3 - 5805000h\lambda^2B^2 - 150746400A^2h^2\lambda B^2 + 12285000Ah\lambda^2B + 92874600A^3h^2\lambda B - 250000\lambda^3 - 5670000A^2h\lambda^2 - 21432600A^4h^2\lambda + \sqrt{P_5})^{1/3} \right)^{-1} + \frac{101hB^2}{63A^2 - 182BA + 115B^2} + (13881\sqrt[3]{2}A^2h^2B^2) \left( (63A^2 - 182BA + 115B^2) (1068984h^3B^6 - 14859936Ah^3B^5 + 27792072A^2h^3B^4 - 27232200h^2\lambda B^4 - 13759200A^3h^3B^3 + 105651000Ah^2\lambda B^3 - 5805000h\lambda^2B^2 - 150746400A^2h^2\lambda B^2 + 250000\lambda^3 - 5670000A^2h\lambda^2 - 21432600A^4h^2\lambda + \sqrt{P_5})^{1/3} \right)^{-1} + (12900\sqrt[3]{2}h\lambda B^2) \left( (63A^2 - 182BA + 115B^2) (1068984h^3B^6 - 14859936Ah^3B^5 + 27792072A^2h^3B^4 - 27232200h^2\lambda B^4 - 13759200A^3h^3B^3 + 105651000Ah^2\lambda B^3 - 5805000h\lambda^2B^2 - 150746400A^2h^2\lambda B^2 + 12285000Ah\lambda^2B + 92874600A^3h^2\lambda B - 250000\lambda^3 - 5670000A^2h\lambda^2 - 21432600A^4h^2\lambda + \sqrt{P_5})^{1/3} \right)^{-1} - \frac{91AhB}{63A^2 - 182BA + 115B^2} - (27300\sqrt[3]{2}Ah\lambda B) \left( (63A^2 - 182BA + 115B^2) (1068984h^3B^6 - 14859936Ah^3B^5 + 27792072A^2h^3B^4 - 27232200h^2\lambda B^4 - 13759200A^3h^3B^3 + 105651000Ah^2\lambda B^3 - 5805000h\lambda^2B^2 - 150746400A^2h^2\lambda B^2 + 12285000Ah\lambda^2B + 92874600A^3h^2\lambda B - 250000\lambda^3 - 5670000A^2h\lambda^2 - 21432600A^4h^2\lambda + \sqrt{P_5})^{1/3} \right)^{-1} - \frac{50\lambda}{3(63A^2 - 182BA + 115B^2)} + ((1068984h^3B^6 - 14859936Ah^3B^5 + 27792072A^2h^3B^4 - 27232200h^2\lambda B^4 - 13759200A^3h^3B^3 + 105651000Ah^2\lambda B^3 - 5805000h\lambda^2B^2$$

$$\begin{aligned}
& -150746400A^2h^2\lambda B^2 + 12285000Ah\lambda^2B + 92874600A^3h^2\lambda B - \\
& 250000\lambda^3 - 5670000A^2h\lambda^2 - 21432600A^4h^2\lambda + \\
& \sqrt{P_5}^{1/3} \left( (3\sqrt[3]{2}(63A^2 - 182BA + 115B^2))^{-1} + \right. \\
& (2500\sqrt[3]{2}\lambda^2) (3(63A^2 - 182BA + 115B^2) (1068984h^3B^6 - 14859936Ah^3B^5 + \\
& 27792072A^2h^3B^4 - 27232200h^2\lambda B^4 - 13759200A^3h^3B^3 + 105651000Ah^2\lambda B^3 - \\
& 5805000h\lambda^2B^2 - 150746400A^2h^2\lambda B^2 + 12285000Ah\lambda^2B + \\
& 92874600A^3h^2\lambda B - 250000\lambda^3 - 5670000A^2h\lambda^2 - 21432600A^4h^2\lambda + \\
& \left. \sqrt{P_5}^{1/3})^{-1} + (12600\sqrt[3]{2}A^2h\lambda) (63A^2 - 182BA + 115B^2) (1068984h^3B^6 - \right. \\
& 14859936Ah^3B^5 + 27792072A^2h^3B^4 - 27232200h^2\lambda B^4 - 13759200A^3h^3B^3 + \\
& 105651000Ah^2\lambda B^3 - 5805000h\lambda^2B^2 - 150746400A^2h^2\lambda B^2 + 12285000Ah\lambda^2B + \\
& 92874600A^3h^2\lambda B - 250000\lambda^3 - 5670000A^2h\lambda^2 - 21432600A^4h^2\lambda + \left. \sqrt{P_5}^{1/3})^{-1}. \right. \\
P_9 = & -\frac{30(224ABh - 343B^2h + 50\lambda)}{7(467A^2 - 2900AB + 1250B^2)} + \left( ( - 5193571446000A^4h^2\lambda - \right. \\
& 8166334982400A^3B^3h^3 + 53826307920000A^3Bh^2\lambda + 11640538009800A^2B^4h^3 - \\
& 154570839570000A^2B^2h^2\lambda - 2383101000000A^2h\lambda^2 + (4(3780(467A^2 - \\
& 2900AB + 1250B^2)(77B^2h^2 - 100h\lambda) - 8100(224ABh - 343B^2h + 50\lambda)^2)^3 + \\
& (-5193571446000A^4h^2\lambda - 8166334982400A^3B^3h^3 + 53826307920000A^3Bh^2\lambda + \\
& 11640538009800A^2B^4h^3 - 154570839570000A^2B^2h^2\lambda - 2383101000000A^2h\lambda^2 - \\
& 15095837484000AB^5h^3 + 64766935800000AB^3h^2\lambda + 12349260000000ABh\lambda^2 + \\
& 25141725756000B^6h^3 - 14269348800000B^4h^2\lambda - 2628045000000B^2h\lambda^2 - \\
& 182250000000\lambda^3)^2)^{1/2} - 15095837484000AB^5h^3 + 64766935800000AB^3h^2\lambda + \\
& 12349260000000ABh\lambda^2 + 25141725756000B^6h^3 - 14269348800000B^4h^2\lambda - \\
& 2628045000000B^2h\lambda^2 - 182250000000\lambda^3)^{1/3} (21\sqrt[3]{2}(467A^2 - 2900AB + \\
& 1250B^2))^{-1} - (\sqrt[3]{2}(3780(467A^2 - 2900AB + 1250B^2)(77B^2h^2 - 100h\lambda) - \\
& 8100(224ABh - 343B^2h + 50\lambda)^2)) (21(467A^2 - 2900AB + 1250B^2) ( - \\
& 5193571446000A^4h^2\lambda - 8166334982400A^3B^3h^3 + 53826307920000A^3Bh^2\lambda + \\
& 11640538009800A^2B^4h^3 - 154570839570000A^2B^2h^2\lambda - 2383101000000A^2h\lambda^2 + \\
& (4(3780(467A^2 - 2900AB + 1250B^2)(77B^2h^2 - 100h\lambda) - \\
& 8100(224ABh - 343B^2h + 50\lambda)^2)^3 + (-5193571446000A^4h^2\lambda - \\
& 8166334982400A^3B^3h^3 + 53826307920000A^3Bh^2\lambda + 11640538009800A^2B^4h^3 - \\
& 154570839570000A^2B^2h^2\lambda - 2383101000000A^2h\lambda^2 - 15095837484000AB^5h^3 + \\
& 64766935800000AB^3h^2\lambda + 12349260000000ABh\lambda^2 + 25141725756000B^6h^3 - \\
& 14269348800000B^4h^2\lambda - 2628045000000B^2h\lambda^2 - 182250000000\lambda^3)^2)^{1/3} - \\
& 15095837484000AB^5h^3 + 64766935800000AB^3h^2\lambda + 12349260000000ABh\lambda^2 + \\
& 25141725756000B^6h^3 - 14269348800000B^4h^2\lambda - 2628045000000B^2h\lambda^2 - \\
& 182250000000\lambda^3)^{1/3})^{-1}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_{10} = & -540101520h^3 - 600112800h^2\lambda - 19845000h\lambda^2 - 125000\lambda^3 + \\
& 6804\sqrt{21}\left(h^3(-729137052h^3 - 150028200h^2\lambda + 168682500h\lambda^2 + \right. \\
& \left. 1500000\lambda^3)\right)^{1/2}. \\
P_{11} = & (-255197968200h^4 - 135025380(2050\lambda + \sqrt[3]{P_{10}})h^3 + 250047(-7500\lambda^2 - \\
& 600\sqrt[3]{P_{10}}\lambda + P_{10}^{2/3})h^2 + 1890(5\lambda(20000\lambda^2 - 525\sqrt[3]{P_{10}}\lambda + 7P_{10}^{2/3}) + \\
& 1701\sqrt{21}(h^3(-729137052h^3 - 150028200\lambda h^2 + 168682500\lambda^2 h + \\
& 1500000\lambda^3))^{1/2})h + 1701\sqrt{21}(h^3(-729137052h^3 - 150028200\lambda h^2 + \\
& 168682500\lambda^2 h + 1500000\lambda^3))^{1/2}(\sqrt[3]{P_{10}} - 50\lambda) + 625\lambda^2(2500\lambda^2 - \\
& 50\sqrt[3]{P_{10}}\lambda + P_{10}^{2/3}))^{1/2}(1630084622715729479892420828h^{10} - \\
& 6154407280987075962180(178850\lambda + 629\sqrt[3]{P_{10}})h^9 + \\
& 11397050520346436967(-267472500\lambda^2 - 338400\sqrt[3]{P_{10}}\lambda + \\
& 143P_{10}^{2/3})h^8 + 603018546050076030(47628\sqrt{21}(h^3(-729137052h^3 - \\
& 150028200\lambda h^2 + 168682500\lambda^2 h + 1500000\lambda^3))^{1/2} - 5\lambda(455160000\lambda^2 - \\
& 727875\sqrt[3]{P_{10}}\lambda + 508P_{10}^{2/3}))h^7 - 45579633110361(1250(3810735000\lambda^2 - \\
& 37261425\sqrt[3]{P_{10}}\lambda + 46454P_{10}^{2/3})\lambda^2 + 1701\sqrt{21}(h^3(-729137052h^3 - \\
& 150028200\lambda h^2 + 168682500\lambda^2 h + 1500000\lambda^3))^{1/2}(57\sqrt[3]{P_{10}} - \\
& 607600\lambda))h^6 + 16881345596430(1701\sqrt{21}(h^3(-729137052h^3 - \\
& 150028200\lambda h^2 + 168682500\lambda^2 h + 1500000\lambda^3))^{1/2}(699750\lambda^2 - \\
& 1665\sqrt[3]{P_{10}}\lambda + P_{10}^{2/3}) - 3125\lambda^3(216510000\lambda^2 - 2566125\sqrt[3]{P_{10}}\lambda + \\
& 12664P_{10}^{2/3}))h^5 + 223298222175\lambda(1701\sqrt{21}(h^3(-729137052h^3 - \\
& 150028200\lambda h^2 + 168682500\lambda^2 h + 1500000\lambda^3))^{1/2}(7887500\lambda^2 - \\
& 91575\sqrt[3]{P_{10}}\lambda + 104P_{10}^{2/3}) - 31250\lambda^3(45045000\lambda^2 - 560025\sqrt[3]{P_{10}}\lambda + \\
& 4832P_{10}^{2/3}))h^4 + 4219543125\lambda^2(1701\sqrt{21}(h^3(-729137052h^3 - \\
& 150028200\lambda h^2 + 168682500\lambda^2 h + 1500000\lambda^3))^{1/2}(17420000\lambda^2 - \\
& 271500\sqrt[3]{P_{10}}\lambda + 1333P_{10}^{2/3}) - 31250\lambda^3(37290000\lambda^2 - 513075\sqrt[3]{P_{10}}\lambda + \\
& 6292P_{10}^{2/3}))h^3 + 19534921875\lambda^3(1701\sqrt{21}(h^3(-729137052h^3 - \\
& 150028200\lambda h^2 + 168682500\lambda^2 h + 1500000\lambda^3))^{1/2}(63000\lambda^2 - \\
& 1305\sqrt[3]{P_{10}}\lambda + 11P_{10}^{2/3}) - 6250\lambda^3(356250\lambda^2 - 5625\sqrt[3]{P_{10}}\lambda + \\
& 86P_{10}^{2/3}))h^2 + 2583984375\lambda^4(1701\sqrt{21}(h^3(-729137052h^3 - \\
& 150028200\lambda h^2 + 168682500\lambda^2 h + 1500000\lambda^3))^{1/2}(3500\lambda^2 - \\
& 90\sqrt[3]{P_{10}}\lambda + P_{10}^{2/3}) - 6250\lambda^3(12500\lambda^2 - 225\sqrt[3]{P_{10}}\lambda + 4P_{10}^{2/3}))h + \\
& 9765625\lambda^5(1701\sqrt{21}(h^3(-729137052h^3 - 150028200\lambda h^2 + 168682500\lambda^2 h + \\
& 1500000\lambda^3))^{1/2}(2500\lambda^2 - 75\sqrt[3]{P_{10}}\lambda + P_{10}^{2/3}) - 15625\lambda^3(2500\lambda^2 - 50\sqrt[3]{P_{10}}\lambda + \\
& P_{10}^{2/3}))^{1/2}(-1000188h^2 + 3150(\sqrt[3]{P_{10}} - 84\lambda)h - 2500\lambda^2 - P_{10}^{2/3})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +50\lambda\sqrt[3]{P_{10}})^{1/2}(1000188h^2 - 2646(\sqrt[3]{P_{10}} - 100\lambda)h + \\
& 2500\lambda^2 + P_{10}^{2/3} - 50\lambda\sqrt[3]{P_{10}})^{1/2}\left(\left(-255197968200h^4 - \right. \right. \\
& 135025380(2050\lambda + \sqrt[3]{P_{10}})h^3 + 250047(-7500\lambda^2 - 600\sqrt[3]{P_{10}}\lambda + \\
& P_{10}^{2/3})h^2 + 1890(5\lambda(20000\lambda^2 - 525\sqrt[3]{P_{10}}\lambda + 7P_{10}^{2/3}) + \\
& 1701\sqrt{21}h^3(-729137052h^3 - 150028200\lambda h^2 + 168682500\lambda^2 h + 1500000\lambda^3))h + \\
& 1701\sqrt{21}(h^3(-729137052h^3 - 150028200\lambda h^2 + 168682500\lambda^2 h + \\
& 1500000\lambda^3))^{1/2}(\sqrt[3]{P_{10}} - 50\lambda) + 625\lambda^2(2500\lambda^2 - 50\sqrt[3]{P_{10}}\lambda + P_{10}^{2/3}))(P_{10})^{-1}\Big)^{1/2}.
\end{aligned}$$

Además para el nivel de energía positiva  $H_2 = h$  consideremos los siguientes conjuntos:

$$\begin{aligned}
\Delta_{AB\lambda}^1 &= \left\{ (A, B, \lambda) \in \mathbb{R}^3 : \left| \frac{9A^2 - 10AB - 4B^2}{B(7A + 10B)} \right| < \frac{1}{2}, \right. \\
& \quad \left. B(7A + 10B)(A - 2B)(9A - 2B)(2A - B)(2A + B) \neq 0 \right\} \\
\Delta_{AB\lambda}^2 &= \left\{ (A, B, \lambda) \in \mathbb{R}^3 : \left( BP_4(2h - P_4)(P_4(7A - 20B) + 60Bh)(P_4(378Bh(3A \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - 7B) + 189P_4(A - 5B)(A - B) + 100\lambda) + 2h(567B^2h - 100\lambda)) \right) \neq 0, \right. \\
& \quad \left. \frac{\sqrt[3]{8P_3 + \sqrt{P_2}}(-378Bh(3A - 7B) - 100\lambda + \sqrt[3]{4}\sqrt[3]{8P_3 + \sqrt{P_2}}) - 2\sqrt[3]{2}P_1}{378\sqrt[3]{8P_3 + \sqrt{P_2}}(A - 5B)(A - B)} > 0 \right\} \\
\Delta_{AB\lambda}^3 &= \left\{ (A, B, \lambda) \in \mathbb{R}^3 : \frac{100\lambda\sqrt[3]{8P_7 + \sqrt{P_5}} - P_6}{\sqrt[3]{8P_7 + \sqrt{P_5}}(378A^2 - 1092AB + 690B^2)} < 0, \right. \\
& \quad \left( BP_8(2h - P_8)(P_8(49A + 40B) + 60Bh)(P_8(3P_8(63A^2 - 182AB \right. \\
& \quad \left. + 115B^2) + 6Bh(91A - 101B) + 100\lambda) + 2h(87B^2h - 100\lambda)) \right) \\
& \quad \left. \sqrt[3]{8P_7 + \sqrt{P_5}}(378A^2 - 1092AB + 690B^2) \neq 0 \right\} \\
\Delta_{AB\lambda}^4 &= \left\{ (A, B, \lambda) \in \mathbb{R}^3 : P_9 > 0, \left| \frac{49AP_9 + 240Bh - 50BP_9}{B(18h - 10P_9)} \right| < 10, \right. \\
& \quad \left( 7P_9(P_9(7A - 20B) + 60Bh)(P_9(49A + 40B) + 60Bh)B \right. \\
& \quad \left( 7P_9(467A^2 - 2900A + 1250B^2) + 60P_9(7Bh(32A - 49B) + 50\lambda) \right. \\
& \quad \left. \left. + 60h(77B^2h - 100\lambda) \right) B(18h - 10P_9) \right) \neq 0 \Big\}.
\end{aligned}$$

El resultado principal en este Caso 2 corresponde a la existencia de soluciones periódicas del sistema (4.93).

**Teorema 4.5 (Existencia)** *En cada nivel de energía positiva  $H_2 = h$ , con  $\varepsilon > 0$  suficientemente pequeño,  $A, B$  y  $\lambda$  números reales arbitrarios, el sistema hamiltoniano (4.93) tiene familias de soluciones periódicas  $\varphi(t, \varepsilon) = (x(t, \varepsilon), y(t, \varepsilon), p_x(t, \varepsilon), p_y(t, \varepsilon))$  donde*

$$\begin{aligned} y(t, \varepsilon) &= r^* \cos(t) + O(\varepsilon), \\ y(t, \varepsilon) &= \sqrt{2h - r^{*2}} \cos(t + \alpha^*) + O(\varepsilon), \\ p_y(t, \varepsilon) &= r^* \sin(t) + O(\varepsilon), \\ p_y(t, \varepsilon) &= \sqrt{2h - r^{*2}} \sin(t + \alpha^*) + O(\varepsilon). \end{aligned}$$

*Las soluciones del sistema hamiltoniano (4.93) son contadas como sigue, existe*

(a) *al menos una familia de soluciones periódicas si  $(A, B, \lambda) \in \Delta_{AB\lambda}^1$ , y*

$$(r^*, \alpha^*) = \left( \sqrt{2h}, \frac{1}{2} \arccos \left( \frac{18A^2 - 20AB - 8B^2}{B(7A + 10B)} \right) \right)$$

(b) *al menos una familia de soluciones periódicas si  $(A, B, \lambda) \in \Delta_{AB\lambda}^2$ , y*

$$\begin{aligned} r^* &= \sqrt{\frac{\sqrt[3]{8P_3 + \sqrt{P_2}}(-378Bh(3A - 7B) - 100\lambda + \sqrt[3]{4}\sqrt[3]{8P_3 + \sqrt{P_2}}) - 2\sqrt[3]{2}P_1}{378\sqrt[3]{8P_3 + \sqrt{P_2}}(A - 5B)(A - B)}}, \\ \alpha^* &= 0 \end{aligned}$$

(c) *al menos dos familias de soluciones periódicas si  $(A, B, \lambda) \in \Delta_{AB\lambda}^3$ , y*

$$(r^*, \alpha^*) = \left( \sqrt{-\frac{100\lambda\sqrt[3]{8P_7 + \sqrt{P_5}} - P_6}{\sqrt[3]{8P_7 + \sqrt{P_5}}(378A^2 - 1092AB + 690B^2)}}, \pm\pi/2 \right)$$

(d) *al menos dos familias de soluciones periódicas si  $(A, B, \lambda) \in \Delta_{AB\lambda}^4$ , y*

$$(r^*, \alpha^*) = \left( \sqrt{P_9}, \pm \frac{1}{2} \arccos \left( -\frac{49AP_9 + 240Bh - 50BP_9}{180Bh - 90BP_9} \right) \right)$$

donde  $P_1, P_2, P_3, P_5, P_6, P_7$  y  $P_9$  son expresiones dadas previa al Teorema 4.5.

**Demostración.** De (4.97) se tiene que

$$f_{21} = \frac{1}{320} Br^3 \sin(2\alpha)(r^2 - 2h) (r^2(50B - 49A) + 90B \cos(2\alpha)(r^2 - 2h) - 240Bh).$$

Resolviendo la ecuación  $f_{21}(r, \alpha) = 0$ , obtenemos las siguientes cuatro condiciones:

**Condición 2.1:**  $r = 0$ ,

**Condición 2.2:**  $r = \sqrt{2h}$ ,

**Condición 2.3:**  $\sin(2\alpha) = 0$ ,

**Condición 2.4:**  $(r^2(50B - 49A) + 90B \cos(2\alpha)(r^2 - 2h) - 240Bh) = 0$ .

A continuación analizaremos cada caso.

**Condición 2.1:** Si  $r = 0$ , entonces sustituyendo en el sistema (4.98) tenemos

$$\begin{aligned} f_{21} &= 0, \\ f_{22} &= \frac{5h^2\lambda}{4}. \end{aligned}$$

Note que el jacobiano de  $f_2$  es nulo pues  $f_{21} = 0$ , así el método del promedio de segundo orden no da información sobre las soluciones periódicas del sistema.

**Condición 2.2:** Si  $r = \sqrt{2h}$ , tenemos que la función  $f_{21} \equiv 0$  y  $f_{22}$  en la variable  $\alpha$  es:

$$f_{22}(\sqrt{2h}, \alpha) = \frac{7}{40}h^3 (18A^2 - B \cos(2\alpha)(7A + 10B) - 20AB - 8B^2).$$

Resolviendo la ecuación  $f_{22}(\sqrt{2h}, \alpha) = 0$ , tenemos como raíces a

$$\alpha_1^* = \frac{n}{2} \arccos \left( \frac{18A^2 - 20AB - 8B^2}{B(7A + 10B)} \right) + k\pi,$$

donde  $n = -1, 1$ , y  $k \in \mathbb{Z}$ . Por la periodicidad de la función coseno, es suficiente considerar  $k \in \{0, 1\}$ . Así tenemos cuatro ceros del tipo

$$(r^*, \alpha^*) = \left( \sqrt{2h}, \frac{n}{2} \arccos \left( \frac{18A^2 - 20AB - 8B^2}{B(7A + 10B)} \right) + k\pi \right). \quad (4.99)$$

donde  $n = -1, 1$ ,  $k = 0, 1$  y estos están bien definidos para los valores de los parámetros  $A$  y  $B$  si

$$B(7AB + 10B) \neq 0, \quad \left| \frac{9A^2 - 10AB - 4B^2}{B(7AB + 10B)} \right| < \frac{1}{2}. \quad (4.100)$$

El Jacobiano de  $f_2$  evaluado en los ceros  $(r^*, \alpha^*)$  de (4.99) es

$$J_{f_2(\sqrt{2h}, \alpha^*)} = \frac{421}{400}(A - 2B)(9A - 2B)(2A - B)(2A + B)h^6,$$

que es no nulo si

$$(A - 2B)(9A - 2B)(2A - B)(2A + B) \neq 0. \quad (4.101)$$

Por el método del promedio de segundo orden podemos concluir que los cuatro ceros (4.99) corresponden a diferentes condiciones iniciales de la misma solución periódica del sistema diferencial (4.93). Portanto existe al menos una solución periódica del sistema y esto completa la demostración del Teorema 4.5 parte (a).

**Observación 4.13** Note que las condiciones sobre los parámetros  $A, B$  en (4.100) y (4.101) forma un conjunto no vacío (ver Figura 4.10).

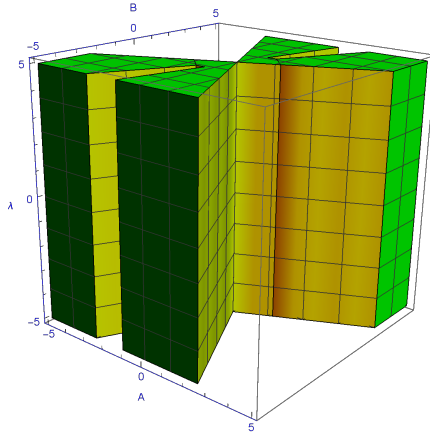


Figura 4.10: Región en el espacio de parámetros  $(A, B, \lambda) \in \Delta_{AB\lambda}^1$ .

**Condición 2.3:**  $\sin(2\alpha) = 0 \Leftrightarrow \alpha = k\pi/2$  con  $k \in \mathbb{Z}$ , debido a la periodicidad de la función seno estudiamos los casos  $k = 0, 2, \pm 1$  en las siguientes subcondiciones:

**Subcondición 2.3.1:** Si  $\alpha = 0$  ó  $\alpha = \pi$ , tenemos que la función  $f_{22}$  en la variable  $r$  es:

$$f_{22}(r, 0) = -\frac{1}{160} \left( 63r^2 (r^2(A - 5B) + 6Bh) (r^2(B - A) - 3Bh) - 50\lambda (r^2 - 2h)^2 \right).$$

Resolviendo la ecuación  $f_{22}(r, 0) = 0$ , tenemos sólo una raíz real

$$r^* = \sqrt{\frac{\sqrt[3]{8P_3 + \sqrt{P_2}}(-378Bh(3A - 7B) - 100\lambda + \sqrt[3]{4}\sqrt[3]{8P_3 + \sqrt{P_2}}) - 2\sqrt[3]{2}P_1}{378\sqrt[3]{8P_3 + \sqrt{P_2}}(A - 5B)(A - B)}}.$$

donde las expresiones  $P_1, P_2, P_3$  son dadas previa al Teorema 4.5. Note que el sistema (4.98) tiene un cero dado por  $(r^*, 0)$ , que está bien definido para los valores de los parámetros  $A, B$  y  $\lambda$  tal que

$$\frac{\sqrt[3]{8P_3 + \sqrt{P_2}}(-378Bh(3A - 7B) - 100\lambda + \sqrt[3]{4}\sqrt[3]{8P_3 + \sqrt{P_2}}) - 2\sqrt[3]{2}P_1}{378\sqrt[3]{8P_3 + \sqrt{P_2}}(A - 5B)(A - B)} > 0,$$

$$378\sqrt[3]{8P_3 + \sqrt{P_2}}(A - 5B)(A - B) \neq 0. \quad (4.102)$$

El Jacobiano de  $f_2$  evaluado en el cero  $(r^*, 0)$  es:

$$J_{f_2(r^*, 0)} = -\frac{1}{12800} \left( 7BP_4^2(2h - P_4)(P_4(7A - 20B) + 60Bh)(P_4(378Bh(3A - 7B) + 189P_4(A - 5B)(A - B) + 100\lambda) + 2h(567B^2h - 100\lambda)) \right),$$

el cual es no nulo si

$$\left( BP_4(2h - P_4)(P_4(7A - 20B) + 60Bh)(P_4(378Bh(3A - 7B) + 189P_4(A - 5B)(A - B) + 100\lambda) + 2h(567B^2h - 100\lambda)) \right) \neq 0, \quad (4.103)$$

donde la expresión  $P_4$  es dada previa al Teorema 4.5. Por tanto concluimos por el método del promedio de segundo orden que el cero  $(r^*, 0)$  proporciona al menos una solución periódica del sistema diferencial (4.93). Esto completa la demostración del Teorema 4.5 parte (b).

**Observación 4.14** Note que las condiciones sobre los parámetros  $A, B$  y  $\lambda$  en (4.102) y (4.103) forma un conjunto no vacío (ver Figura 4.11).

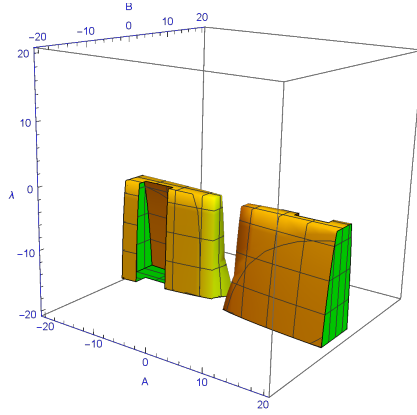


Figura 4.11: Región en el espacio de parámetros  $(A, B, \lambda) \in \Delta_{AB\lambda}^2$ .

**Subcondición 2.3.2:** Si  $\alpha = \pm\pi/2$  (es decir para  $k = \pm 1$ ), entonces la función  $f_{22}$  en la variable  $r$  es:

$$f_{22}(r, \pm\pi/2) = \frac{1}{160} \left( r^6 (63A^2 - 182AB + 115B^2) + 3Bhr^4(91A - 101B) + 174B^2h^2r^2 + 50\lambda (r^2 - 2h)^2 \right).$$

Resolviendo la ecuación  $f_{22}(r, \pm\pi/2) = 0$ , se tiene una raíz real

$$r^* = \sqrt{-\frac{100\lambda \sqrt[3]{8P_7 + \sqrt{P_5}} - P_6}{\sqrt[3]{8P_7 + \sqrt{P_5}}(378A^2 - 1092AB + 690B^2)}},$$

donde las expresiones  $P_5, P_6$  y  $P_7$  son dadas previa al Teorema 4.5. Observe que el sistema (4.98) tiene dos ceros dados por  $(r^*, \pm\pi/2)$ , que están bien definidos si

$$P_5 > 0, \quad \frac{100\lambda \sqrt[3]{8P_7 + \sqrt{P_5}} - P_6}{\sqrt[3]{8P_7 + \sqrt{P_5}}(378A^2 - 1092AB + 690B^2)} < 0, \\ \sqrt[3]{8P_7 + \sqrt{P_5}}(378A^2 - 1092AB + 690B^2) \neq 0. \quad (4.104)$$

Evaluando el Jacobiano en los ceros  $(r^*, \pm\pi/2)$  se tiene

$$J_{f_2}(r^*, \pm\pi/2) = \frac{1}{12800} \left( BP_8^2 (2h - P_8) (P_8(49A + 40B) + 60Bh) (P_8(3P_8(63A^2 - 182AB + 115B^2) + 6Bh(91A - 101B) + 100\lambda) + 2h(87B^2h - 100\lambda)) \right),$$

que es no nulo si

$$\left( BP_8 (2h - P_8) (P_8(49A + 40B) + 60Bh) (P_8(3P_8(63A^2 - 182AB + 115B^2) + 6Bh(91A - 101B) + 100\lambda) + 2h(87B^2h - 100\lambda)) \right) \neq 0, \quad (4.105)$$

donde la expresión  $P_8$  es dada previa al Teorema 4.5. Por el método del promedio de segundo orden concluimos que los ceros  $(r^*, \pm\pi/2)$  proporcionan al menos dos familias de soluciones periódicas del sistema diferencial (4.93). Esto completa la demostración del Teorema 4.5 parte (c).

**Observación 4.15** Note que las condiciones sobre los parámetros  $A, B, \lambda$  en (4.104) y (4.105) forma un conjunto no vacío (ver Figura 4.12).

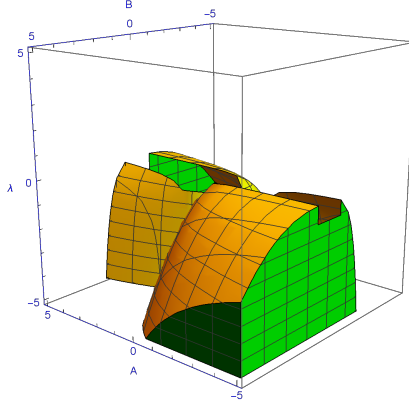


Figura 4.12: Región en el espacio de parámetros  $(A, B, \lambda) \in \Delta_{AB\lambda}^3$ .

**Condición 2.4:** Si consideramos

$$r^2(50B - 49A) + 90B \cos(2\alpha)(r^2 - 2h) - 240Bh = 0,$$

entonces tenemos que  $\alpha$  en términos de  $r$  es

$$\alpha = \frac{n}{2} \arccos \left( -\frac{49Ar^2 + 240Bh - 50Br^2}{180Bh - 90Br^2} \right) + k\pi, \quad (4.106)$$

donde  $n = -1, 1$ , y  $k \in \mathbb{Z}$ . Debido a la periodicidad de la función coseno se debe considerar los casos  $k = 0$  y  $k = 1$ . Se puede ver que cuando  $k = 1$  genera una complejidad computacional para localizar ceros explícitos de  $f_{22}(r, \alpha)$ . Por lo que solo consideraremos el caso  $k = 0$ .

Para  $k = 0$ , es decir, tenemos  $\alpha = \pm \frac{1}{2} \arccos \left( -\frac{49Ar^2 + 240Bh - 50Br^2}{180Bh - 90Br^2} \right)$ , entonces la función  $f_{22}$  en la variable  $r$  es :

$$f_{22}(r, \alpha) = \frac{1}{14400} 7r^2 \left( r^4(467A^2 - 2900AB + 1250B^2) + 90Bhr^2(32A - 49B) + 1980B^2h^2 \right) + \frac{5}{16} \lambda (r^2 - 2h)^2.$$

Resolviendo  $f_{22}(r, \alpha) = 0$ , se tiene la raíz  $r^* = \sqrt{P_9}$ , donde  $P_9$  es una expresión en términos de los parámetros  $A, B, \lambda$  dada previa al Teorema 4.5. Luego sustituyendo la raíz  $r^*$  en (4.106) se tiene

$$\alpha^* = \pm \frac{1}{2} \arccos \left( -\frac{49AP_9 + 240Bh - 50BP_9}{180Bh - 90BP_9} \right).$$

Notar que el sistema (4.98) tiene dos ceros  $(r^*, \alpha^*)$  dados por

$$(r^*, \alpha^*) = \left( \sqrt{P_9}, \pm \frac{1}{2} \arccos \left( -\frac{49AP_9 + 240Bh - 50BP_9}{180Bh - 90BP_9} \right) \right), \quad (4.107)$$

que están bien definidos si

$$P_9 > 0, \quad B(18h - 10P_9) \neq 0, \quad \left| \frac{49AP_9 + 240Bh - 50BP_9}{B(18h - 10P_9)} \right| < 10. \quad (4.108)$$

El Jacobiano de  $f_2$  evaluado en los ceros (4.107) es

$$J_{f_2(r^*, \alpha^*)} = -\frac{1}{34560000} \left( 7P_9^2 (P_9(7A - 20B) + 60Bh) (P_9(49A + 40B) + 60Bh) \right. \\ \left. (7P_9^2 (467A^2 - 2900AB + 1250B^2) + 60P_9(7Bh(32A - 49B) \right. \\ \left. + 50\lambda) + 60h(77B^2h - 100\lambda)) \right),$$

que es no nulo si

$$\left( 7P_9 (P_9(7A - 20B) + 60Bh) (P_9(49A + 40B) + 60Bh) \right. \\ \left. (7P_9 (467A^2 - 2900AB + 1250B^2) + 60P_9(7Bh(32A - 49B) \right. \\ \left. + 50\lambda) + 60h(77B^2h - 100\lambda)) \right) \neq 0, \quad (4.109)$$

Así concluimos por el método del promedio de segundo orden que los ceros (4.107) proporcionan al menos dos familias de soluciones periódicas del sistema diferencial (4.93). Esto completa la demostración del Teorema 4.5 parte (d).

**Observación 4.16** Note que las condiciones sobre los parámetros  $A, B, \lambda$  en (4.108) y (4.109) forma un conjunto no vacío (ver Figura 4.13).

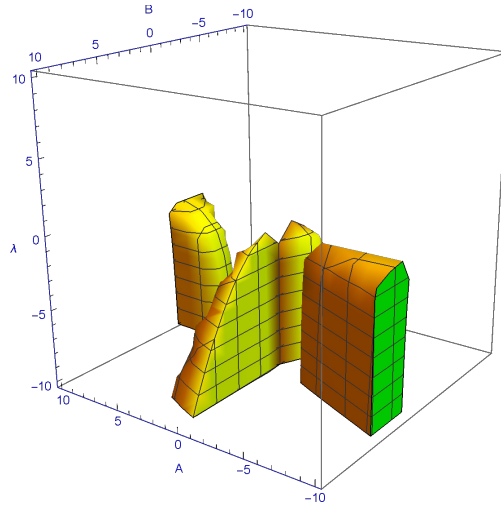


Figura 4.13: Región en el espacio de parámetros  $(A, B, \lambda) \in \Delta_{AB\lambda}^4$ .

Esto finaliza la prueba del Teorema de existencia de soluciones periódicas en el caso 2.  $\square$

**Corolario 4.3** *La familia de soluciones periódicas  $(x(t, \varepsilon), y(t, \varepsilon), p_x(t, \varepsilon), p_y(t, \varepsilon))$  del sistema hamiltoniano (4.93) obtenidos a partir de los ceros  $(r^*, \alpha^*)$  de la función promedio, en cada nivel de energía positivo  $H_2 = h$  son dados por*

$$\begin{aligned} x(t, \varepsilon) &= r^* \cos(t) + O(\varepsilon), \\ y(t, \varepsilon) &= \rho^* \cos(t + \alpha^*) + O(\varepsilon), \\ p_x(t, \varepsilon) &= r^* \sin(t) + O(\varepsilon), \\ p_y(t, \varepsilon) &= \rho^* \sin(t + \alpha^*) + O(\varepsilon). \end{aligned}$$

A continuación presentamos el Teorema de estabilidad para las soluciones periódicas determinadas en el Teorema 4.5

**Teorema 4.6 (Estabilidad)** *Las familias de soluciones periódicas del Teorema 4.5 son inestables.*

**Demostración.** Para determinar el tipo de estabilidad de las soluciones periódicas dadas en el Teorema 4.5 se aplicará el Teorema 2.6 que dice que el tipo de estabilidad de las soluciones periódicas viene dado por el signo de los autovalores  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  de la matriz jacobiana  $J_{f_2(r, \alpha)}$  evaluada en los ceros  $(r^*, \alpha^*)$ .

(i) La familia de soluciones periódicas dada en el Teorema 4.5 parte (a) son inestables, pues los autovalores de la matriz Jacobiana de  $f_2$  evaluada en los ceros  $(r^*, \alpha^*)$  son

$$\lambda_1 = -\frac{21}{20}Bh^3 \sqrt{-\frac{(A-2B)(9A-2B)(2A-B)(2A+B)}{B^2(7A+10B)^2}}(7A+10B),$$

$$\lambda_2 = -\lambda_1.$$

Observemos que la condición de inestabilidad sobre los parámetros  $A, B, \lambda$  es no vacía si  $(A, B, \lambda) \in \Delta_{AB\lambda}^1$  y  $(A-2B)(9A-2B)(2A-B)(2A+B) < 0$ .

(ii) La familia de soluciones periódicas dada en el Teorema 4.5 parte (b) son inestables, pues los autovalores de la matriz Jacobiana de  $f_2$  evaluada en los ceros  $(r^*, \alpha^*)$  son

$$\lambda_1 = \frac{1}{12859560\sqrt{6}P_{10}^{13/6}}P_{11}, \lambda_2 = -\lambda_1.$$

para los valores de los parámetros de  $A = 1, B = -1$ . Notar que la condición de inestabilidad sobre los parámetros  $A, B, \lambda$  es no vacía si  $(A, B, \lambda) \in \Delta_{AB\lambda}^2$ , y  $P_{10} \neq 0$ , donde las expresiones  $P_{10}$  y  $P_{11}$  son dadas previas al Teorema 4.5.

(iii) Las dos familias de soluciones periódicas dada en el Teorema 4.5 parte (c) son inestables, pues los autovalores de la matriz Jacobiana de  $f_2$  evaluada en los ceros  $(r^*, \alpha^*)$  satisfacen  $\lambda_1 = -\lambda_2$ , el cual es no vacía si  $(A, B, \lambda) \in \Delta_{AB\lambda}^3$ . Los autovalores no estan escritos por su extensión algebraica.

(iv) Las dos familias de soluciones periódicas dada en el Teorema 4.5 parte (d) son inestables, pues los autovalores de la matriz Jacobiana de  $f_2$  evaluada en los ceros  $(r^*, \alpha^*)$  satisfacen  $\lambda_1 = -\lambda_2$ , el cual es no vacía si  $(A, B, \lambda) \in \Delta_{AB\lambda}^4$ . Los autovalores no estan escritos por su extensión algebraica. Esto completa la demostración del Teorema de estabilidad del caso 2.  $\square$

**Caso 3:**  $F = 0$ ,  $m = 0$

Si  $F = 0$ ,  $\Lambda \neq 0$ ,  $m = 0$  y  $\lambda \neq 0$ , entonces el Hamiltoniano (4.51) con potencial de grado 6 se reduce a

$$H_3 = \frac{1}{2} (x^2 + y^2) + \frac{1}{2} (p_x^2 + p_y^2) + \varepsilon \left( \frac{A}{5} x^5 + Bx^3 y^2 \right) + \varepsilon^2 \left( \frac{1}{6} \Lambda x^6 + \frac{1}{6} \lambda y^6 \right), \quad (4.110)$$

El sistema hamiltoniano asociado a (4.110) es

$$\begin{aligned} x' &= p_x, \\ y' &= p_y, \\ p'_x &= -x - \varepsilon (Ax^4 + 3Bx^2 y^2) - \varepsilon^2 \Lambda x^5, \\ p'_y &= -y - \varepsilon (2Bx^3 y) - \varepsilon^2 \lambda y^5, \end{aligned} \quad (4.111)$$

donde  $A, B, \Lambda$  y  $\lambda$  son parámetros reales arbitrarios.

La periodicidad en la variable independiente del sistema diferencial (4.111) es necesario para aplicar el método del promedio de segundo orden, por lo que hacemos el cambio de variable  $(x, y, p_x, p_y) \rightarrow (r, \theta, \rho, \alpha) \in \mathbb{R}^+ \times S^1 \times \mathbb{R}^+ \times S^1$  definida por

$$x = r \cos \theta, \quad y = \rho \cos(\theta + \alpha), \quad p_x = r \sin \theta, \quad p_y = \rho \sin(\theta + \alpha),$$

para  $r > 0$  y  $\rho > 0$ . El nivel de energía  $h$  de  $H_3$  en coordenadas polares es:

$$\begin{aligned} h &= \frac{1}{2} (r^2 + \rho^2) + \varepsilon \left( \frac{1}{5} Ar^5 \cos^5(\theta) + B\rho^2 r^3 \cos^3(\theta) \cos^2(\alpha + \theta) \right) \\ &\quad + \varepsilon^2 \left( \frac{1}{6} \lambda \rho^6 \cos^6(\alpha + \theta) + \frac{1}{6} \Lambda r^6 \cos^6(\theta) \right), \end{aligned}$$

y las ecuaciones de movimiento son dados por:

$$\begin{aligned} \dot{r} &= \frac{1}{r} \varepsilon \left( -Ar^5 \sin(\theta) \cos^4(\theta) - 3Br^3 (2h - r^2) \sin(\theta) \cos^2(\theta) \cos^2(\alpha + \theta) \right) \\ &\quad - \Lambda r^5 \varepsilon^2 \sin(\theta) \cos^5(\theta), \\ \dot{\theta} &= -1 - \frac{1}{r} \varepsilon \left( Ar^4 \cos^5(\theta) + 3Br^2 (2h - r^2) \cos^3(\theta) \cos^2(\alpha + \theta) \right) + \Lambda r^4 \varepsilon^2 \cos^6(\theta), \\ \dot{\rho} &= -2Br^3 \varepsilon \sqrt{2h - r^2} \cos^3(\theta) \sin(\alpha + \theta) \cos(\alpha + \theta) + \lambda \varepsilon^2 \left( - (2h - r^2)^{5/2} \right) \\ &\quad \sin(\alpha + \theta) \cos^5(\alpha + \theta), \\ \dot{\alpha} &= \frac{1}{r} \varepsilon \left( Ar^4 \cos^5(\theta) + 3Br^2 (2h - r^2) \cos^3(\theta) \cos^2(\alpha + \theta) - 2Br^3 \cos^3(\theta) \cos^2(\alpha + \theta) \right) \\ &\quad + \frac{1}{r} \varepsilon^2 \left( \Lambda r^5 \cos^6(\theta) - \lambda (2h - r^2)^2 \cos^6(\alpha + \theta) \right). \end{aligned} \quad (4.112)$$

El sistema diferencial en su forma estándar es

$$\begin{aligned}
r' &= \left( r^2 \sin(\theta) \cos^2(\theta) (Ar^2 \cos^2(\theta) - 3B(r^2 - 2h) \cos^2(\alpha + \theta)) \right) \varepsilon \\
&\quad + \left( \frac{1}{5} r^3 \sin(\theta) \cos^5(\theta) (-5A^2 r^4 \cos^4(\theta) + 12ABr^2 (2r^2 - 5h) \cos^2(\theta) \right. \\
&\quad \left. \cos^2(\alpha + \theta) - 15B^2 (r^2 - 6h) (r^2 - 2h) \cos^4(\alpha + \theta) + 5\Lambda r^2) \right) \varepsilon^2 + O(\varepsilon^3), \\
\alpha' &= \left( Br (5r^2 - 6h) \cos^3(\theta) \cos^2(\alpha + \theta) - Ar^3 \cos^5(\theta) \right) \varepsilon + \left( A^2 r^6 \cos^{10}(\theta) \right. \\
&\quad + \frac{2}{5} ABr^4 (30h - 17r^2) \cos^8(\theta) \cos^2(\alpha + \theta) + r^2 \cos^6(\theta) (9B^2 (r^2 - 2h)^2 \\
&\quad \left. \cos^4(\alpha + \theta) - \Lambda r^2) + \lambda (r^2 - 2h)^2 \cos^6(\alpha + \theta) \right) \varepsilon^2 + O(\varepsilon^3). \tag{4.113}
\end{aligned}$$

En este caso la función promedio de segundo orden dado en (4.59) es  $f_2 = (f_{21}, f_{22})$  donde

$$\begin{aligned}
f_{21} &= \frac{1}{320} Br^3 \sin(2\alpha) (r^2 - 2h) (r^2 (50B - 49A) + 90B \cos(2\alpha) (r^2 - 2h) - 240Bh), \\
f_{22} &= \frac{1}{160} \left( 63A^2 r^6 + Br^2 (\cos(2\alpha) (3hr^2 (49A - 170B) + 2r^4 (50B - 49A) + 480Bh^2) \right. \\
&\quad + 45B \cos(4\alpha) (2h^2 - 3hr^2 + r^4)) + 140ABr^4 (3h - 2r^2) + 2B^2 (282h^2 r^2 \\
&\quad \left. - 339hr^4 + 85r^6) + 50\lambda (r^2 - 2h)^2 - 50\Lambda r^4 \right). \tag{4.114}
\end{aligned}$$

De acuerdo con el método del promedio de segundo orden, nuestro propósito es encontrar los ceros  $(r^*, \alpha^*)$  del sistema

$$f_{2i}(r, \alpha) = 0, \quad \text{para } i = 1, 2, \tag{4.115}$$

y luego debemos verificar que el determinante de la matriz Jacobiana  $J_{f_2(r, \alpha)}$  evaluada en los ceros  $(r^*, \alpha^*)$  sea no nulo.

Antes de enunciar los resultados en este Caso 3, consideremos las notaciones siguientes en relación con los parámetros  $A, B, \Lambda$  y  $\lambda$ :

$$\begin{aligned}
N_1 &= -21432600A^4h^2\lambda + 192893400A^3Bh^2\lambda - 486091368A^2B^4h^3 - \\
&\quad 514382400A^2B^2h^2\lambda + 64297800A^2B^2h^2\Lambda - 5670000A^2h\lambda^2 + 5670000A^2h\lambda\Lambda + \\
&\quad (4(378(A^2 - 6AB + 5B^2)(567B^2h^2 - 100h\lambda) - (567ABh - 1323B^2h + 50\lambda - \\
&\quad 50\Lambda)^2)^3 + (-21432600A^4h^2\lambda + 192893400A^3Bh^2\lambda - 486091368A^2B^4h^3 - \\
&\quad 514382400A^2B^2h^2\lambda + 64297800A^2B^2h^2\Lambda - 5670000A^2h\lambda^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +5670000A^2h\lambda\Lambda + 972182736AB^5h^3 + 321489000AB^3h^2\lambda - 257191200AB^3h^2\Lambda + \\
& 25515000ABh\lambda^2 - 17010000ABh\lambda\Lambda - 8505000ABh\Lambda^2 + 378071064B^6h^3 - \\
& 150028200B^4h^2\lambda + 364354200B^4h^2\Lambda - 8505000B^2h\lambda^2 - 11340000B^2h\lambda\Lambda + \\
& 19845000B^2h\Lambda^2 - 250000\lambda^3 + 750000\lambda^2\Lambda - 750000\lambda\Lambda^2 + 250000\Lambda^3)^{1/2} + \\
& 972182736AB^5h^3 + 321489000AB^3h^2\lambda - 257191200AB^3h^2\Lambda + 25515000ABh\lambda^2 - \\
& 17010000ABh\lambda\Lambda - 8505000ABh\Lambda^2 + 378071064B^6h^3 - 150028200B^4h^2\lambda + \\
& 364354200B^4h^2\Lambda - 8505000B^2h\lambda^2 - 11340000B^2h\lambda\Lambda + 19845000B^2h\Lambda^2 - 250000\lambda^3 + \\
& 750000\lambda^2\Lambda - 750000\lambda\Lambda^2 + 250000\Lambda^3.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
N_2 = & 189A^2h(567B^2h + 200\lambda) - 1134ABh(189B^2h + 50(3\lambda + \Lambda)) + 678699B^4h^2 + \\
& 18900B^2h(3\lambda + 7\Lambda) + 2500(\lambda - \Lambda)^2.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
N_3 = & \frac{567\sqrt[3]{2}A^2B^2h^2}{\sqrt[3]{N_1}(A^2 - 6AB + 5B^2)}(3591\sqrt[3]{2}B^4h^2 - 1134\sqrt[3]{2}AB^3h^2 + 300\sqrt[3]{2}B^2h\lambda - \\
& 900\sqrt[3]{2}ABh\lambda + 200\sqrt[3]{2}A^2h\lambda + 700\sqrt[3]{2}B^2h\Lambda - 300\sqrt[3]{2}ABh\Lambda) + \\
& \frac{2500\sqrt[3]{2}\lambda^2}{189\sqrt[3]{N_1}(A^2 - 6AB + 5B^2)} - \frac{5000\sqrt[3]{2}\lambda\Lambda}{189\sqrt[3]{N_1}(A^2 - 6AB + 5B^2)}(2500\sqrt[3]{2}\Lambda^2 + \\
& \sqrt[3]{N_1}) + \frac{7B^2h}{A^2 - 6AB + 5B^2} - \frac{3ABh}{A^2 - 6AB + 5B^2} - \frac{50\lambda}{189(A^2 - 6AB + 5B^2)} + \\
& \frac{50\Lambda}{189(A^2 - 6AB + 5B^2)}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
N_4 = & -21432600A^4h^2\lambda - 13759200A^3B^3h^3 + 92874600A^3Bh^2\lambda + 27792072A^2B^4h^3 - \\
& 150746400A^2B^2h^2\lambda + 17425800A^2B^2h^2\Lambda - 5670000A^2h\lambda^2 + \\
& 5670000A^2h\lambda\Lambda + (4(6(63A^2 - 182AB + 115B^2)(87B^2h^2 - 100h\lambda) - \\
& (273ABh - 303B^2h + 50\lambda - 50\Lambda)^2)^3 + (-21432600A^4h^2\lambda - 13759200A^3B^3h^3 + \\
& 92874600A^3Bh^2\lambda + 27792072A^2B^4h^3 - 150746400A^2B^2h^2\lambda + \\
& 17425800A^2B^2h^2\Lambda - 21432600A^4h^2\lambda - 13759200A^3B^3h^3 + 92874600A^3Bh^2\lambda + \\
& 27792072A^2B^4h^3 - 150746400A^2B^2h^2\lambda + 17425800A^2B^2h^2\Lambda - 5670000A^2h\lambda^2 + \\
& 5670000A^2h\lambda\Lambda + (4(6(63A^2 - 182AB + 115B^2)(87B^2h^2 - 100h\lambda) - \\
& (273ABh - 303B^2h + 50\lambda - 50\Lambda)^2)^3 + (-21432600A^4h^2\lambda - 13759200A^3B^3h^3 + \\
& 92874600A^3Bh^2\lambda + 27792072A^2B^4h^3 - 150746400A^2B^2h^2\lambda + 17425800A^2B^2h^2\Lambda - \\
& 5670000A^2h\lambda^2 + 5670000A^2h\lambda\Lambda - 14859936AB^5h^3 + 105651000AB^3h^2\lambda - \\
& 35380800AB^3h^2\Lambda + 12285000ABh\lambda^2 - 8190000ABh\lambda\Lambda - 4095000ABh\Lambda^2 + \\
& 1068984B^6h^3 - 27232200B^4h^2\lambda + 18538200B^4h^2\Lambda - 5805000B^2h\lambda^2 + \\
& 1260000B^2h\lambda\Lambda + 4545000B^2h\Lambda^2 - 250000\lambda^3 + 750000\lambda^2\Lambda - 750000\lambda\Lambda^2 + \\
& 250000\Lambda^3)^{1/2} - 14859936AB^5h^3 + 105651000AB^3h^2\lambda - 35380800AB^3h^2\Lambda + \\
& 12285000ABh\lambda^2 - 8190000ABh\lambda\Lambda - 4095000ABh\Lambda^2 + 1068984B^6h^3 - \\
& 27232200B^4h^2\lambda + 18538200B^4h^2\Lambda - 5805000B^2h\lambda^2 + 1260000B^2h\lambda\Lambda + \\
& 4545000B^2h\Lambda^2 - 250000\lambda^3 + 750000\lambda^2\Lambda - 750000\lambda\Lambda^2 + 250000\Lambda^3.
\end{aligned}$$

$$N_5 = 63A^2h(661B^2h + 600\lambda) - 546ABh(129B^2h + 50(3\lambda + \Lambda)) + 31779B^4h^2 + 300B^2h(129\lambda + 101\Lambda) + 2500(\lambda - \Lambda)^2.$$

$$N_6 = \frac{13881\sqrt[3]{2}A^2B^2h^2}{\sqrt[3]{N_4}(63A^2 - 182AB + 115B^2)} + \frac{12900\sqrt[3]{2}B^2h\lambda}{\sqrt[3]{N_4}(63A^2 - 182AB + 115B^2)} - \frac{27300\sqrt[3]{2}ABh\lambda}{\sqrt[3]{N_4}(63A^2 - 182AB + 115B^2)} + \frac{12600\sqrt[3]{2}A^2h\lambda}{\sqrt[3]{N_4}(63A^2 - 182AB + 115B^2)} + \frac{10100\sqrt[3]{2}B^2h\Lambda}{\sqrt[3]{N_4}(63A^2 - 182AB + 115B^2)} - \frac{9100\sqrt[3]{2}ABh\Lambda}{\sqrt[3]{N_4}(63A^2 - 182AB + 115B^2)} + \frac{101B^2h}{\sqrt[3]{N_4}(63A^2 - 182AB + 115B^2)} - \frac{91ABh}{\sqrt[3]{N_4}(63A^2 - 182AB + 115B^2)} - \frac{63A^2 - 182AB + 115B^2}{50\lambda} - \frac{63A^2 - 182AB + 115B^2}{50\Lambda} + \frac{3(63A^2 - 182AB + 115B^2)}{2500\sqrt[3]{2}\lambda^2} + \frac{3(63A^2 - 182AB + 115B^2)}{5000\sqrt[3]{2}\lambda\Lambda} - \frac{3\sqrt[3]{N_4}(63A^2 - 182AB + 115B^2)}{2500\sqrt[3]{2}\Lambda^2} - \frac{3\sqrt[3]{N_4}(63A^2 - 182AB + 115B^2)}{\sqrt[3]{N_4}} + \frac{3\sqrt[3]{N_4}(63A^2 - 182AB + 115B^2)}{10593\sqrt[3]{2}B^4h^2} + \frac{3\sqrt[3]{2}(63A^2 - 182AB + 115B^2)}{23478\sqrt[3]{2}AB^3h^2} - \frac{\sqrt[3]{N_4}(63A^2 - 182AB + 115B^2)}{\sqrt[3]{N_4}(63A^2 - 182AB + 115B^2)}.$$

$$N_7 = -5193571446000A^4h^2\lambda - 8166334982400A^3B^3h^3 + 53826307920000A^3Bh^2\lambda + 11640538009800A^2B^4h^3 - 154570839570000A^2B^2h^2\lambda + 9138503430000A^2B^2h^2\Lambda - 2383101000000A^2h\lambda^2 + 2383101000000A^2h\lambda\Lambda + (4(3780(467A^2 - 2900AB + 1250B^2)(77B^2h^2 - 100h\lambda) - 8100(224ABh - 343B^2h + 50\lambda - 50\Lambda)^2)^3 + (-5193571446000A^4h^2\lambda - 8166334982400A^3B^3h^3 + 53826307920000A^3Bh^2\lambda + 11640538009800A^2B^4h^3 - 154570839570000A^2B^2h^2\lambda + 9138503430000A^2B^2h^2\Lambda - 2383101000000A^2h\lambda^2 + 2383101000000A^2h\lambda\Lambda - 15095837484000AB^5h^3 + 64766935800000AB^3h^2\lambda - 22211317800000AB^3h^2\Lambda + 12349260000000ABh\lambda^2 - 9899820000000ABh\lambda\Lambda - 2449440000000ABh\Lambda^2 + 25141725756000B^6h^3 - 14269348800000B^4h^2\lambda + 20818198800000B^4h^2\Lambda - 26280450000000B^2h\lambda^2 - 11226600000000B^2h\lambda\Lambda + 37507050000000B^2h\Lambda^2 - 1822500000000\lambda^3 + 5467500000000\lambda^2\Lambda - 5467500000000\lambda\Lambda^2 + 1822500000000\Lambda^3)^2)^{1/2} - 15095837484000AB^5h^3 + 64766935800000AB^3h^2\lambda - 22211317800000AB^3h^2\Lambda + 12349260000000ABh\lambda^2 - 9899820000000ABh\lambda\Lambda - 2449440000000ABh\Lambda^2 + 25141725756000B^6h^3 - 14269348800000B^4h^2\lambda + 20818198800000B^4h^2\Lambda - 26280450000000B^2h\lambda^2 - 11226600000000B^2h\lambda\Lambda + 37507050000000B^2h\Lambda^2 - 1822500000000\lambda^3 + 5467500000000\lambda^2\Lambda - 5467500000000\lambda\Lambda^2 + 1822500000000\Lambda^3.$$

$$N_8 = 7A^2h(71561B^2h + 46700\lambda) - 140ABh(5299B^2h + 12100\lambda + 2400\Lambda) + 5(218197B^4h^2 + 700B^2h(103\lambda + 147\Lambda) + 7500(\lambda - \Lambda)^2).$$

$$N_9 = 15176A^2Bh - 7A(19199B^2h + 350(\lambda - \Lambda)) + 50B(1057B^2h + 50\lambda - 50\Lambda).$$

$$N_{10} = -\left(3122640\sqrt[3]{2}h^2\right)\left(169(13520091299400h^3 - 47695131666000h^2 + (4(-114704100h^2 - 4471740(77h^2 - 100h))^3 + (13520091299400h^3 - 47695131666000h^2)^2)^{1/2})^{1/3}\right)^{-1} + \left(18000\sqrt[3]{2}h\right)\left((13520091299400h^3 - 47695131666000h^2 + (4(-114704100h^2 - 4471740(77h^2 - 100h))^3 + (13520091299400h^3 - 47695131666000h^2)^2)^{1/2})^{1/3}\right)^{-1} - \left((13520091299400h^3 - 47695131666000h^2 + (4(-114704100h^2 - 4471740(77h^2 - 100h))^3 + (13520091299400h^3 - 47695131666000h^2)^2)^{1/2})^{1/3}\right)\left(24843\sqrt[3]{2}\right)^{-1} - \frac{510h}{1183}.$$

$$N_{11} = \left(3122640\sqrt[3]{2}h^2\right)\left(169(13520091299400h^3 - 47695131666000h^2 + (4(-114704100h^2 - 4471740(77h^2 - 100h))^3 + (13520091299400h^3 - 47695131666000h^2)^2)^{1/2})^{1/3}\right)^{-1} - \left(18000\sqrt[3]{2}h\right)\left((13520091299400h^3 - 47695131666000h^2 + (4(-114704100h^2 - 4471740(77h^2 - 100h))^3 + (13520091299400h^3 - 47695131666000h^2)^2)^{1/2})^{1/3}\right)^{-1} + \left((13520091299400h^3 - 47695131666000h^2 + (4(-114704100h^2 - 4471740(77h^2 - 100h))^3 + (13520091299400h^3 - 47695131666000h^2)^2)^{1/2})^{1/3}\right)\left(24843\sqrt[3]{2}\right)^{-1} + \frac{284430h}{1183}.$$

$$N_{12} = 2N_{11}^4(2h^2 - hN_{10} + N_{10}^2) + 180N_{11}(N_{10} - 2h)^2(480h^2(597h - 100) + 92001hN_{10}^2 + 8(25 - 46668h)hN_{10} - 444N_{10}^3) - N_{11}^3(960h^3 - 226h^2N_{10} + 583hN_{10}^2 + 2N_{10}^3) + N_{11}^2(2880(100 - 247h)h^3 + 2880h^2(547h - 100)N_{10} + 63115hN_{10}^3 + 6(12000 - 136279h)hN_{10}^2 + 34562N_{10}^4) - 8100(N_{10} - 2h)^2(1440h^3(243h + 100) - 480h^2(1219h + 300)N_{10} - 159401hN_{10}^3 + 750h(509h + 48)N_{10}^2 + 49694N_{10}^4).$$

$$N_{13} = (7h(467A^2 - 2420AB + 515B^2) + 750(\lambda - \Lambda)).$$

Además para el nivel de energía positiva  $H_3 = h$  consideremos los siguientes conjuntos:

$$\mathcal{U}_{AB\Lambda\lambda}^1 = \left\{ (A, B, \Lambda, \lambda) \in \mathbb{R}^4 : \left| \frac{63A^2h - 70ABh - 28B^2h - 25\Lambda}{(A + 10B)Bh} \right| < \frac{7}{2}, \right. \\ \left. (7h(9A - 2B)(2A - B) - 50\Lambda)(63h(A - 2B)(2A + B) - 50\Lambda) \right. \\ \left. (A + 10B)B \neq 0 \right\}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{U}_{AB\Lambda}^2 = & \left\{ (A, B, \Lambda, \lambda) \in \mathbb{R}^4 : (BN_3(2h - N_3)(N_3(7A - 20B) + 60Bh)(N_3(378Bh(3A \right. \\
& - 7B) + 189N_3(A - 5B)(A - B) + 100(\lambda - \Lambda)) + 2h(567B^2h - 100\lambda)) \neq 0, \\
& \frac{\sqrt[3]{N_1}(378Bh(3A - 7B) + 100(\lambda - \Lambda)) - 2\sqrt[3]{2}N_2 - \sqrt[3]{4(N_1)^2}}{378\sqrt[3]{N_1}(A - 5B)(A - B)} < 0 \\
& \left. 378\sqrt[3]{N_1}(A - 5B)(A - B) \neq 0 \right\} \\
\mathcal{U}_{AB\Lambda}^3 = & \left\{ (A, B, \Lambda, \lambda) \in \mathbb{R}^4 : N_8 > 0, (BN_6(2h - \sqrt{N_6})(\sqrt{N_6}(49A + 40B) + 60Bh) \right. \\
& (3N_6(63A^2 - 182AB + 115B^2) + 2\sqrt{N_6}(3Bh(91A - 101B) + 50(\lambda - \Lambda)) \\
& + 2h(87B^2h - 100\lambda)) \sqrt[3]{N_4}(378A^2 - 1092AB + 690B^2) \neq 0, \\
& \left. \frac{\sqrt[3]{N_4}(546ABh - 606B^2h + 100\lambda - 100\Lambda) - 2\sqrt[3]{2}N_5 - \sqrt[3]{4(N_4)^2}}{\sqrt[3]{N_4}(378A^2 - 1092AB + 690B^2)} > 0 \right\} \\
\mathcal{U}_{AB\Lambda}^4 = & \left\{ (A, B, \Lambda, \lambda) \in \mathbb{R}^4 : (N_{10} - 2h)N_{10}N_{12} \neq 0, \right. \\
& \left| \frac{B(-12\sqrt[3]{N_7}N_{13} + 1080\sqrt[3]{2}N_8 + \sqrt[3]{4(N_7)^2})}{1080\sqrt[3]{2}N_8(49A - 50B) + \sqrt[3]{4(N_7)^2}(49A - 50B) + 180\sqrt[3]{N_7}N_9} \right| < \frac{1}{90}, \\
& \frac{180\sqrt[3]{N_7}(7Bh(32A - 49B) + 50(\lambda - \Lambda)) - 1080\sqrt[3]{2}N_9 - \sqrt[3]{4(N_7)^2}}{42\sqrt[3]{N_7}(467A^2 - 2900AB + 1250B^2)} < 0, \\
& (\sqrt[3]{2}N_8(49A - 50B) + \sqrt[3]{4(N_7)^2}(49A - 50B) + 180\sqrt[3]{N_7}N_9) \neq 0, \\
& \left. \sqrt[3]{N_7}(467A^2 - 2900AB + 1250B^2) \neq 0 \right\}.
\end{aligned}$$

El resultado principal en este Caso 3, acerca de la existencia de soluciones periódicas del sistema (4.111) es.

**Teorema 4.7 (Existencia)** *En cada nivel de energía positiva  $H_3 = h$ , con  $\varepsilon > 0$  suficientemente pequeño,  $A, B, \Lambda$  y  $\lambda$  números reales arbitrarios, el sistema hamiltoniano (4.111) tiene familias de soluciones periódicas  $\varphi(t, \varepsilon) = (x(t, \varepsilon), y(t, \varepsilon), p_x(t, \varepsilon), p_y(t, \varepsilon))$ , donde*

$$\begin{aligned}
x(t, \varepsilon) &= r^* \cos(t) + O(\varepsilon), \\
y(t, \varepsilon) &= \sqrt{2h - r^{*2}} \cos(t + \alpha^*) + O(\varepsilon), \\
p_x(t, \varepsilon) &= r^* \sin(t) + O(\varepsilon), \\
p_y(t, \varepsilon) &= \sqrt{2h - r^{*2}} \sin(t + \alpha^*) + O(\varepsilon),
\end{aligned}$$

y las soluciones periódicas del sistema hamiltoniano (4.111) son contadas como sigue, existe

(a) al menos una familia de soluciones periódicas si  $(A, B, \Lambda, \lambda) \in \mathcal{U}_{AB\Lambda\lambda}^1$ , y

$$(r^*, \alpha^*) = \left( \sqrt{2h}, \frac{1}{2} \arccos \left( \frac{126A^2h - 140ABh - 56B^2h - 50\Lambda}{7(A + 10B)Bh} \right) \right)$$

(b) al menos una familia de soluciones periódicas si  $(A, B, \Lambda, \lambda) \in \mathcal{U}_{AB\Lambda\lambda}^2$ , y

$$r^* = \sqrt{-\frac{\sqrt[3]{N_1}(378Bh(3A - 7B) + 100(\lambda - \Lambda)) - 2\sqrt[3]{2}N_2 - \sqrt[3]{4(N_1)^2}}{378\sqrt[3]{N_1}(A - 5B)(A - B)}},$$

$$\alpha^* = 0$$

(c) al menos dos familias de soluciones periódicas si  $(A, B, \Lambda, \lambda) \in \mathcal{U}_{AB\Lambda\lambda}^3$ , y

$$r^* = \sqrt{-\frac{\sqrt[3]{N_4}(546ABh - 606B^2h + 100\lambda - 100\Lambda) - 2\sqrt[3]{2}N_5 - \sqrt[3]{4(N_4)^2}}{\sqrt[3]{N_4}(378A^2 - 1092AB + 690B^2)}},$$

$$\alpha^* = \pm \frac{\pi}{2}$$

(d) al menos una familia de soluciones periódicas si  $(A, B, \Lambda, \lambda) \in \mathcal{U}_{AB\Lambda\lambda}^4$ , y

$$r^* = \sqrt{-\frac{180\sqrt[3]{N_7}(7Bh(32A - 49B) + 50(\lambda - \Lambda)) - 1080\sqrt[3]{2}N_9 - \sqrt[3]{4(N_7)^2}}{42\sqrt[3]{N_7}(467A^2 - 2900AB + 1250B^2)}},$$

$$\alpha^* = -\frac{1}{2} \arccos \left( \frac{90B \left( -12\sqrt[3]{N_7}N_{13} + 1080\sqrt[3]{2}N_8 + \sqrt[3]{4(N_7)^2} \right)}{1080\sqrt[3]{2}N_8(49A - 50B) + \sqrt[3]{4(N_7)^2}(49A - 50B) + 180\sqrt[3]{N_7}N_9} \right),$$

donde  $N_1, N_2, N_4, N_5, N_7, N_8, N_9$ , y  $N_{13}$  son expresiones descritas previa al Teorema 4.7.

**Demostración.** De (4.114) se tiene que

$$f_{21} = \frac{1}{320} Br^3 \sin(2\alpha) (r^2 - 2h) (r^2(50B - 49A) + 90B \cos(2\alpha) (r^2 - 2h) - 240Bh).$$

Resolviendo la ecuación  $f_{21}(r, \alpha) = 0$ , obtenemos las siguientes cuatro condiciones:

**Condición 3.1:**  $r = 0$ ,

**Condición 3.2:**  $r = \sqrt{2h}$ ,

**Condición 3.3:**  $\sin(2\alpha) = 0$ ,

**Condición 3.4:**  $(r^2(50B - 49A) + 90B \cos(2\alpha) (r^2 - 2h) - 240Bh) = 0$ .

A continuación analizaremos cada caso.

**Condición 3.1:** Si  $r = 0$ , entonces las funciones  $f_{21}$  y  $f_{22}$  son

$$\begin{aligned} f_{21} &= 0, \\ f_{22} &= \frac{5h^2\lambda}{4}. \end{aligned}$$

Observe que en esta Condición 3.1 el Jacobiano de  $f_2$  es nulo pues  $f_{21} = 0$ . Por tanto el método del promedio de segundo orden no da información sobre soluciones periódicas.

**Condición 3.2:** Si  $r = \sqrt{2h}$ , entonces  $f_{22}$  en la variable  $\alpha$  es

$$f_{22}(\sqrt{2h}, \alpha) = \frac{1}{40}h^2 (14h(9A^2 - 10AB - 4B^2) - 7Bh \cos(2\alpha)(7A + 10B) - 50\Lambda).$$

Resolviendo la ecuación  $f_{22}(\sqrt{2h}, \alpha) = 0$ , obtenemos como raíces a

$$\alpha^* = \frac{n}{2} \arccos \left( \frac{126A^2h - 140ABh - 56B^2h - 50\Lambda}{7(A + 10B)Bh} \right) + k\pi,$$

donde  $n = -1, 1$ , y  $k \in \mathbb{Z}$ . Por la periodicidad de la función coseno, el sistema (4.115) tiene para cada  $k \in \{0, 1\}$  dos ceros dados por

$$(r^*, \alpha^*) = \left( \sqrt{2h}, \frac{n}{2} \arccos \left( \frac{126A^2h - 140ABh - 56B^2h - 50\Lambda}{7(A + 10B)Bh} \right) + k\pi \right). \quad (4.116)$$

donde  $n = -1, 1$  y estos ceros  $(r^*, \alpha^*)$  están bien definidos para valores de los parámetros  $A, B, \Lambda$  y  $\lambda$  si se satisface

$$(A + 10B)B \neq 0, \quad \left| \frac{63A^2h - 70ABh - 28B^2h - 25\Lambda}{(A + 10B)Bh} \right| < \frac{7}{2}. \quad (4.117)$$

El Jacobiano de  $f_2$  evaluado en estos ceros (4.116) es

$$J_{f_2(\sqrt{2h}, \alpha^*)} = \frac{1}{400} (7h(9A - 2B)(2A - B) - 50\Lambda) (63h(A - 2B)(2A + B) - 50\Lambda) h^4,$$

que es no nulo si

$$(7h(9A - 2B)(2A - B) - 50\Lambda) (63h(A - 2B)(2A + B) - 50\Lambda) \neq 0. \quad (4.118)$$

Aplicando el método del promedio de segundo orden se puede ver que los cuatro ceros (4.116) corresponde a diferentes condiciones iniciales de la misma solución periódica del sistema diferencial (4.111). Esto completa la demostración del Teorema 4.7 parte (a).

**Observación 4.17** Note que las condiciones sobre los parámetros dados en (4.117) y (4.118) forman un conjunto no vacío (ver Figura 4.14).

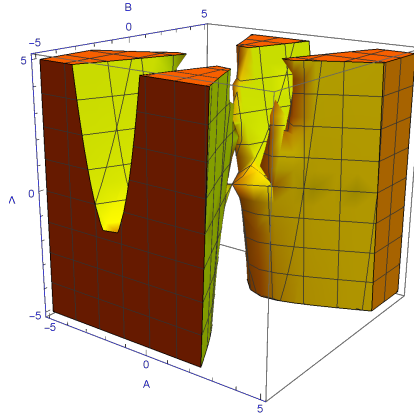


Figura 4.14: Región en el espacio de parámetros  $(A, B, \Lambda) \in \mathcal{U}_{AB\Lambda}^1$ .

**Condición 3.3:**  $\sin(2\alpha) = 0 \Leftrightarrow \alpha = k\frac{\pi}{2}$  con  $k \in \mathbb{Z}$ , debido a la periodicidad de la función seno estudiamos para  $k = 0, 2 \pm 1$ .

**Subcondición 3.3.1:** Si  $\alpha = 0$  ó  $\alpha = \pi$  (es decir  $k = 0, 2$ ), entonces la función la función  $f_{21} \equiv 0$  y  $f_{22}$  en la variable  $r$  es:

$$f_{22}(r, 0) = \frac{1}{160} \left( 63A^2r^6 + 189ABr^4(3h - 2r^2) + 63B^2(18h^2r^2 - 21hr^4 + 5r^6) + 50\lambda(r^2 - 2h)^2 - 50\Lambda r^4 \right).$$

Resolviendo la ecuación  $f_{22}(r, 0) = 0$ , tenemos solo una raíz real positivo

$$r^* = \sqrt{-\frac{\sqrt[3]{N_1}(378Bh(3A - 7B) + 100(\lambda - \Lambda)) - 2\sqrt[3]{2}N_2 - \sqrt[3]{4(N_1)^2}}{378\sqrt[3]{N_1}(A - 5B)(A - B)}},$$

donde las expresiones de  $N_1$  y  $N_2$  son dadas previa al Teorema 4.7. Observemos que el sistema (4.115) tiene un cero dado por  $(r^*, 0)$ , que está bien definido si

$$\begin{aligned} & \sqrt[3]{N_1}(A - 5B)(A - B) \neq 0, \\ & \frac{\sqrt[3]{N_1}(378Bh(3A - 7B) + 100(\lambda - \Lambda)) - 2\sqrt[3]{2}N_2 - \sqrt[3]{4(N_1)^2}}{378\sqrt[3]{N_1}(A - 5B)(A - B)} < 0. \end{aligned} \quad (4.119)$$

El Jacobiano de  $f_2$  evaluado en  $(r^*, 0)$  es

$$\begin{aligned} J_{f_2(r^*, 0)} = & -\frac{1}{12800} (7BN_3^2(2h - N_3)(N_3(7A - 20B) + 60Bh)(N_3(378Bh(3A - 7B) \\ & + 189N_3(A - 5B)(A - B) + 100(\lambda - \Lambda)) + 2h(567B^2h - 100\lambda)), \end{aligned}$$

que es no nulo si

$$\begin{aligned} & (BN_3(2h - N_3)(N_3(7A - 20B) + 60Bh)(N_3(378Bh(3A - 7B) \\ & + 189N_3(A - 5B)(A - B) + 100(\lambda - \Lambda)) + 2h(567B^2h - 100\lambda)) \neq 0, \end{aligned} \quad (4.120)$$

donde la expresión  $N_3$  es dada previas al Teorema 4.7. Por el método del promedio de segundo orden podemos concluir que el cero  $(r^*, 0)$  proporciona al menos una familia de soluciones periódicas del sistema diferencial (4.111). Esto completa la demostración del Teorema 4.7 parte (b).

**Observación 4.18** Note que para  $B = -1$ , las condiciones sobre los parámetros en (4.119) y (4.120) forman un conjunto no vacío (ver Figura 4.15).

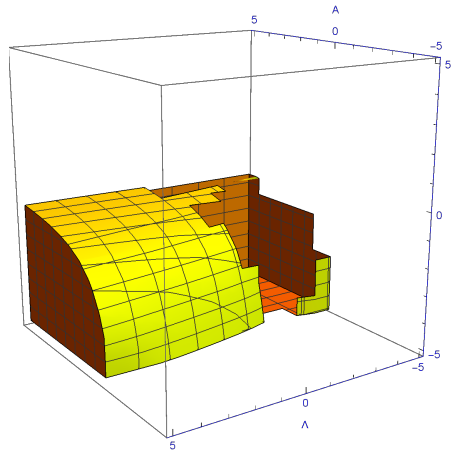


Figura 4.15: Región transversal en el espacio de parámetros  $(A, B, \Lambda, \lambda) \in \mathcal{U}_{AB\Lambda\lambda}^2$ .

**Subcondición 3.3.2:** Si  $\alpha = \pm \frac{\pi}{2}$  (i.e.  $k = \pm 1$ ), entonces la función  $f_{22}$  en la variable  $r$  es:

$$f_{22}(r, \pm\pi/2) = \frac{1}{160} \left( 63A^2r^6 + 91ABr^4(3h - 2r^2) + B^2(174h^2r^2 - 303hr^4 + 115r^6) + 50\lambda(r^2 - 2h)^2 - 50\Lambda r^4 \right).$$

Resolviendo  $f_{22}(r, \pm\pi/2) = 0$ , tenemos solo una raíz real positivo

$$r^* = \sqrt{-\frac{\sqrt[3]{N_4}(546ABh - 606B^2h + 100\lambda - 100\Lambda) - 2\sqrt[3]{2}N_5 - \sqrt[3]{4(N_4)^2}}{\sqrt[3]{N_4}(378A^2 - 1092AB + 690B^2)}},$$

donde las expresiones  $N_4$  y  $N_5$  son dadas previa al Teorema 4.7. Se puede ver que el sistema (4.115) tiene dos ceros dados por  $(r^*, \pm \frac{\pi}{2})$  que están bien definidos si

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{N_4}(378A^2 - 1092AB + 690B^2) &\neq 0, \\ \frac{\sqrt[3]{N_4}(546ABh - 606B^2h + 100\lambda - 100\Lambda) - 2\sqrt[3]{2}N_5 - \sqrt[3]{4(N_4)^2}}{\sqrt[3]{N_4}(378A^2 - 1092AB + 690B^2)} &< 0. \end{aligned} \quad (4.121)$$

Por otro lado es fácil ver que el Jacobiano de  $f_2$  evaluado en  $(r^*, \pm \frac{\pi}{2})$  es

$$\begin{aligned} J_{f_2(r^*, \pm\pi/2)} &= \frac{1}{12800} (BN_6(2h - \sqrt{N_6})(\sqrt{N_6}(49A + 40B) + 60Bh)(3N_6(63A^2 \\ &\quad - 182AB + 115B^2) + 2\sqrt{N_6}(3Bh(91A - 101B) + 50(\lambda - \Lambda)) \\ &\quad + 2h(87B^2h - 100\lambda))), \end{aligned}$$

el cual es no nulo, si

$$\begin{aligned} (BN_6(2h - \sqrt{N_6})(\sqrt{N_6}(49A + 40B) + 60Bh)(3N_6(63A^2 - 182AB + 115B^2) \\ + 2\sqrt{N_6}(3Bh(91A - 101B) + 50(\lambda - \Lambda)) + 2h(87B^2h - 100\lambda))) &\neq 0, \end{aligned} \quad (4.122)$$

donde la expresión  $N_6$  es dada previa al Teorema 4.7. Por el método del promedio de segundo orden podemos concluir que los ceros  $(r^*, \pm \frac{\pi}{2})$  proporcionan al menos dos soluciones periódicas del sistema diferencial (4.111). Esto completa la demostración del Teorema 4.7 parte (c).

**Observación 4.19** Note que para  $B = -1$ , las condiciones sobre los parámetros en (4.121) y (4.122) es no vacío (ver Figura 4.16).

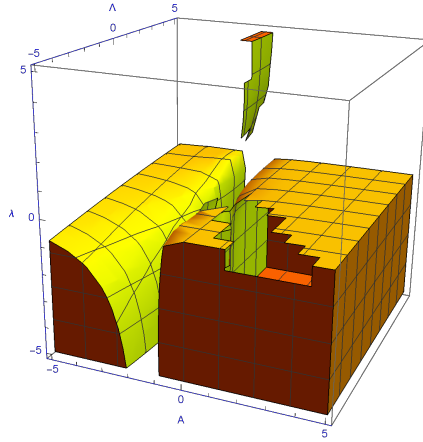


Figura 4.16: Región transversal en el espacio de parámetros  $(A, B, \Lambda, \lambda) \in \mathcal{U}_{AB\Lambda\lambda}^3$ .

**Condición 3.4:** Si

$(-240Bh + (-49A + 50B)r^2 + 90B(-2h + r^2)\cos(2\alpha)) = 0$ , entonces  $\alpha$  en términos de  $r$  es dado por

$$\alpha = \frac{n}{2} \arccos \left( -\frac{49Ar^2 + 240Bh - 50Br^2}{180Bh - 90Br^2} \right) + k\pi, \quad (4.123)$$

donde  $n = -1, 1$ , y  $k \in \mathbb{Z}$ . Debido a la periodicidad de la función coseno se debe considerar los casos  $k = 0$  y  $k = 1$ . Se puede ver que el caso  $k = 1$  genera una complejidad desde el punto de vista computacional. Por lo que consideraremos solo el caso  $k = 0$ .

Si  $k = 0$ , entonces  $\alpha = \frac{n}{2} \arccos \left( -\frac{49Ar^2 + 240Bh - 50Br^2}{180Bh - 90Br^2} \right)$ , con  $n = -1, 1$  y la función  $f_{22}$  en la variable  $r$  es

$$f_{22}(r, \alpha) = \frac{3269}{14400} \left( A^2 r^6 + 140ABr^4 (144h - 145r^2) + 70B^2 r^2 (r^2 - 3h) \right. \\ \left. (125r^2 - 66h) + 4500(\lambda (r^2 - 2h)^2 - \Lambda r^4) \right).$$

Resolviendo la ecuación  $f_{22}(r, \alpha) = 0$  tenemos sólo una raíz real

$$r^* = \sqrt{-\frac{180\sqrt[3]{N_7}(7Bh(32A - 49B) + 50(\lambda - \Lambda)) - 1080\sqrt[3]{2}N_9 - \sqrt[3]{4}(N_7)^2}{42\sqrt[3]{N_7}(467A^2 - 2900AB + 1250B^2)}}.$$

Sustituyendo la raíz  $r^*$  en 4.123 obtenemos que  $\alpha$  es

$$\alpha^* = -\frac{1}{2} \arccos \left( \frac{90B \left( -12\sqrt[3]{N_7}N_{13} + 1080\sqrt[3]{2}N_8 + \sqrt[3]{4}(N_7)^2 \right)}{1080\sqrt[3]{2}N_8(49A - 50B) + \sqrt[3]{4}(N_7)^2(49A - 50B) + 180\sqrt[3]{N_7}N_9} \right),$$

donde las expresiones  $N_7, N_8, N_9$  y  $N_{13}$  son dadas previas al Teorema 4.7. Note que el sistema (4.115) tiene un cero dado por  $(r^*, \alpha^*)$  que está bien definida si cumple las siguientes condiciones

$$\begin{aligned} & \sqrt[3]{2}N_8(49A - 50B) + \sqrt[3]{4(N_7)^2}(49A - 50B) + 180\sqrt[3]{N_7}N_9 \neq 0, \\ & \sqrt[3]{N_7}(467A^2 - 2900AB + 1250B^2) \neq 0, \\ & \left| \frac{B \left( -12\sqrt[3]{N_7}N_{13} + 1080\sqrt[3]{2}N_8 + \sqrt[3]{4(N_7)^2} \right)}{1080\sqrt[3]{2}N_8(49A - 50B) + \sqrt[3]{4(N_7)^2}(49A - 50B) + 180\sqrt[3]{N_7}N_9} \right| < \frac{1}{90}, \\ & \frac{180\sqrt[3]{N_7}(7Bh(32A - 49B) + 50(\lambda - \Lambda)) - 1080\sqrt[3]{2}N_9 - \sqrt[3]{4(N_7)^2}}{\sqrt[3]{N_7}(467A^2 - 2900AB + 1250B^2)} < 0. \end{aligned} \quad (4.124)$$

El Jacobiano de  $f_2$  evaluado en este cero  $(r^*, \alpha_1^*)$  es

$$J_{f_2(r^*, \alpha_1^*)} = \frac{1}{207360000 (N_{10} - 2h)^2 N_{10}^2 N_{12}},$$

el cual es no nulo, si

$$(N_{10} - 2h) N_{10} N_{12} \neq 0, \quad (4.125)$$

donde las expresiones  $N_{10}$  y  $N_{12}$  son dadas previas al Teorema 4.7. Así podemos concluir por el método del promedio de segundo orden que el cero  $(r^*, \alpha^*)$  proporciona al menos una familia de soluciones periódicas del sistema diferencial (4.111). Esto completa la demostración del Teorema 4.7 parte (d).

**Observación 4.20** Note que para  $B = 1$ , las condiciones sobre los parámetros en (4.124) y (4.125) forman un conjunto no vacío (ver Figura 4.17).

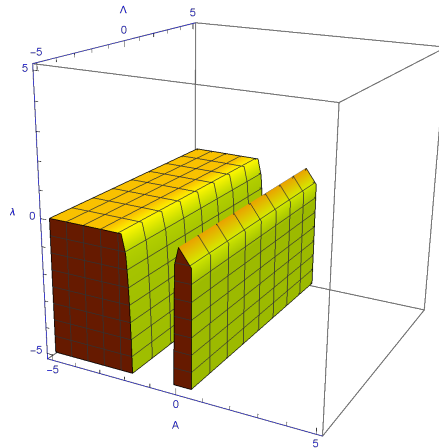


Figura 4.17: Región transversal en el espacio de parámetros  $(A, B, \Lambda, \lambda) \in \mathcal{U}_{AB\Lambda\lambda}^4$ .

Esto finaliza la demostración del Teorema 4.7.  $\square$

**Corolario 4.4** *La familia de soluciones periódicas  $(x(t, \varepsilon), y(t, \varepsilon), p_x(t, \varepsilon), p_y(t, \varepsilon))$  del sistema hamiltoniano (4.111) obtenidos a partir de los ceros  $(r^*, \alpha^*)$  de la función promedio, en cada nivel de energía positiva  $H_3 = h$  son dados por*

$$\begin{aligned} x(t, \varepsilon) &= r^* \cos(t) + O(\varepsilon), \\ y(t, \varepsilon) &= \rho^* \cos(t + \alpha^*) + O(\varepsilon), \\ p_x(t, \varepsilon) &= r^* \sin(t) + O(\varepsilon), \\ p_y(t, \varepsilon) &= \rho^* \sin(t + \alpha^*) + O(\varepsilon). \end{aligned}$$

A continuación presentamos un resultado parcial sobre la estabilidad de soluciones periódicas determinadas en el Teorema 4.7.

**Teorema 4.8 (Estabilidad)** *La familia de soluciones periódicas del Teorema 4.7 parte (a) es inestable.*

**Demostración.** Para determinar el tipo de estabilidad de las soluciones periódicas dadas en el Teorema 4.7 parte (a) se aplicará el Teorema 2.6 que dice que el tipo de estabilidad de las soluciones periódicas viene dado por el signo de los autovalores  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  de la matriz jacobiana  $J_{f_2(r, \alpha)}$  evaluada en los ceros  $(r^*, \alpha^*)$ .

La familia de soluciones periódicas del Teorema 4.7 parte (a) es inestable, pues los autovalores de la matriz Jacobiana de  $f_2$  evaluada en  $(r^*, \alpha^*)$  son

$$\lambda_1 = -\frac{7}{20}Bh^3(7A + 10B)\sqrt{1 - \frac{(126A^2h - 140ABh - 56B^2h - 50\Lambda)^2}{(49ABh + 70B^2h)^2}},$$

$$\lambda_2 = -\lambda_1.$$

Podemos observar que la condición de inestabilidad es no vacía si  $(A, B, \Lambda) \in \mathcal{U}_{AB\Lambda}^1$  y

$$\frac{126A^2h - 140ABh - 56B^2h - 50\Lambda}{49ABh + 70B^2h} < 1.$$

□

**Observación 4.21** Notemos que no podemos establecer la estabilidad de las familias de soluciones periódicas del Teorema 4.7 parte (b), (c) y (d) usando el método del promedio de segundo orden ya que:

para  $B < 0$ , los autovalores de la matriz Jacobiana de  $f_2$  evaluados en los ceros  $(r^*, \alpha^*)$  son complejos conjugados, para  $B > 0$ , los autovalores de la matriz Jacobiana de  $f_2$  evaluado en los ceros  $(r^*, \alpha^*)$  son indeterminados y finalmente para  $B = 0$ , los autovalores de la matriz Jacobiana de  $f_2$  evaluados en los ceros  $(r^*, \alpha^*)$  es nulo.

# Capítulo 5

## Ecuaciones diferenciales en time scales

En este capítulo consideraremos el problema de la existencia de soluciones periódicas para ecuaciones diferenciales dinámicas perturbadas en time scale mediante el método de promedio. El propósito es recopilar informaciones básicas y resultados generales del comportamiento de los Sistemas Dinámicos en time scale y estudiar en este contexto el método del promedio.

### 5.1. Introducción y resultados básicos

En esta sección, presentaremos algunas definiciones básicas, conceptos y resultados generales relativos a time scale. Para obtener más detalles sobre espacios se puede ver por ejemplo [44,48], 4]. La teoría de time scale fue introducida por primera vez por Hilger [62] en 1990 para estudiar las diferencias entre análisis discretos y continuos. Por tanto el estudio de espacios time scale ofrece una gran ayuda para unificar sistemas dinámicos discretos y continuos. Este contexto presenta una poderosa herramienta para aplicaciones en modelos de economía y biología, entre otros.

### 5.1.1. Conjuntos time scales

**Definición 5.1** Un time scale  $\mathbb{T}$  es un subconjunto cerrado arbitrario no vacío de los números reales  $\mathbb{R}$ . Los conjuntos  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{N}$ ,  $\mathbb{N}_0$ , es decir, los números reales, los enteros, los números naturales y los no negativos son ejemplos de time scale, como también son

$$[0, 1] \cup [2, 3] , [0, 1] \cup \mathbb{N},$$

mientras que los conjuntos  $\mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{C}$ ,  $(0, 1)$ , es decir, los números racionales, los números irracionales, los números complejos y el intervalo abierto entre 0 y 1, no son time scale.

Asumimos que el conjunto  $\mathbb{T}$  satisface los siguientes axiomas.

**Axioma 1:** Existe una relación  $\leq$  en  $\mathbb{T}$ , que es

- (i) reflexivo ( $t \leq t$  para todo  $t \in \mathbb{T}$ ),
- (ii) transitivo ( $r \leq s$  y  $s \leq t \Rightarrow r \leq t$  para todas las  $r, s, t \in \mathbb{T}$ ),
- (iii) antisimétrico ( $r \leq s$  y  $s \leq r \Rightarrow r = s$  para todo  $r, s \in \mathbb{T}$ ),
- (iv) total ( $r \leq s$  o  $s \leq r$  para todo  $r, s \in \mathbb{T}$ ).

La relación  $\leq$  hace que  $\mathbb{T}$  sea un conjunto o cadena linealmente ordenado.

**Axioma 2:** Cualquier subconjunto de  $\mathbb{T}$  que está acotado superiormente tiene un límite superior mínimo en  $\mathbb{T}$ , es decir, la cadena  $(\mathbb{T}, \leq)$  es condicionalmente completa.

**Topología de orden:** El conjunto de intervalos abiertos

$$(r, s) = [t \in \mathbb{T} : r < t < s, r, s \in \mathbb{T} \cup \{\pm\infty\}]$$

genera una topología en  $\mathbb{T}$  y es llamado *topología de orden* en  $\mathbb{T}$ .

**Definición 5.2** Para  $t \in \mathbb{T}$  definimos el *operador de salto hacia adelante* y el *operador de salto hacia atrás*  $\sigma, \rho : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$ , respectivamente, de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\sigma(t) &= \inf\{s \in \mathbb{T} : s > t\}, \\ \rho(t) &= \sup\{s \in \mathbb{T} : s < t\}.\end{aligned}$$

En caso de que  $\mathbb{T}$  esté acotado superiormente, complementamos la definición por  $\sigma(\max \mathbb{T}) = \max \mathbb{T}$  y  $\rho(\min \mathbb{T}) = \min \mathbb{T}$ , si  $\mathbb{T}$  es acotado inferiormente. Los operadores nos permiten clasificar los elementos de  $\mathbb{T}$  como :

$t$ es disperso a la derecha	$\sigma(t) > t$
$t$ es denso a la derecha	$\sigma(t) = t$
$t$ es disperso a la izquierda	$\rho(t) < t$
$t$ es denso a la izquierda	$\rho(t) = t$
$t$ es aislado	$\rho(t) < t < \sigma(t)$
$t$ es denso	$\rho(t) = t = \sigma(t)$

## 5.2. rd-Continuidad y $\Delta$ -Diferenciabilidad en time scale

Para crear una noción de diferenciación para funciones definidas en  $(\mathbb{T}, \leq)$ , necesitamos medir la distancia entre dos elementos de  $\mathbb{T}$ . El siguiente axioma ofrece esta facilidad.

**Axioma 3:** En una cadena  $(\mathbb{T}, \leq)$  condicionalmente completa, existe una función

$\mu : \mathbb{T} \times \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$  que satisface las propiedades

- (i)  $\mu(r, s) + \mu(s, t) = \mu(r, t), t, r, s \in \mathbb{T}$ ,
- (ii)  $\mu(r, s) > 0$  si  $r > s, r, s \in \mathbb{T}$ ,
- (iii)  $\mu$  es continuo.

**Definición 5.3** Definimos la función de *graininess*  $\mu : \mathbb{T} \rightarrow [0, \infty)$  por

$$\mu(t) = \sigma(t) - t.$$

**Ejemplo 5.1** Si  $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ , entonces tenemos para cualquier  $t \in \mathbb{T}$ ,

$$\sigma(t) = \inf\{s \in \mathbb{R} : s > t\} = \inf(t, \infty) = t$$

y similarmente  $\rho(t) = t$ . Así, cada punto  $t \in \mathbb{R}$  es denso. La función de *graininess*  $\mu$  es

$$\mu(t) \equiv 0, \text{ para todo } t \in \mathbb{T}.$$

Usamos el símbolo  $[a, b]_{\mathbb{T}}$  para denotar un intervalo compacto en  $\mathbb{T}$ , es decir, si  $a, b \in \mathbb{T}$ , entonces  $[a, b]_{\mathbb{T}} = \{t \in \mathbb{T}; a \leq t \leq b\}$ . El intervalo abierto y semi abierto se definen de forma análoga.

Para cualquier time scale  $\mathbb{T}$ , podemos definir su norma como

$$\|\mathbb{T}\| := \sup\{\mu(t) : t \in \mathbb{T}\}.$$

Claramente  $\|\mathbb{T}\| \in [0, +\infty]$ ,  $\|\mathbb{R}\| = 0$ ,  $\|\mathbb{Z}\| = 1$  y  $\|\{n^2 : n \in \mathbb{N}\}\| = +\infty$ , si  $a, b > 0$ , entonces  $\|\cup_{k=1}^{\infty} [k(a+b), k(a+b)+a]\| = b$ .

Definimos el conjunto  $\mathbb{T}^k$  de la siguiente manera: si  $\mathbb{T}$  tiene un máximo  $m$  disperso a la izquierda, entonces  $\mathbb{T}^k = \mathbb{T} - \{m\}$ . De lo contrario,  $\mathbb{T}^k = \mathbb{T}$ . Así

$$\mathbb{T}^k = \begin{cases} \mathbb{T} - (\rho(\sup \mathbb{T}), \sup \mathbb{T}], & \text{si } \sup \mathbb{T} < \infty, \\ \mathbb{T}, & \text{si } \sup \mathbb{T} = \infty. \end{cases}$$

Finalmente, para la función  $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ , definimos  $f^\sigma : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$  por

$$f^\sigma(t) = f(\sigma(t)) \text{ para todo } t \in \mathbb{T},$$

es decir  $f^\sigma = f \circ \sigma$ .

**Definición 5.4** Una función  $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$  es llamado regular siempre que sus límites del lado derecho existen en todos los puntos densos a la derecha en  $\mathbb{T}$  y existen los límites en el lado izquierdo en todos los puntos densos a la izquierda en  $\mathbb{T}$ .

**Definición 5.5** Una función  $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$  es rd-continua siempre que sea continua en puntos densos a la derecha en  $\mathbb{T}$  y sus límites en el lado izquierdo existen (finitos) para todo los puntos densos a la izquierda en  $\mathbb{T}$ . El conjunto de funciones rd-continuas  $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$  será denotado por

$$C_{rd} = C_{rd}(\mathbb{R}) = C_{rd}(\mathbb{T}, \mathbb{R}).$$

**Teorema 5.1** Para una función  $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ . Entonces tenemos las siguientes propiedades:

- (i) Si  $f$  es continua en  $t$ , entonces  $f$  es rd-continua en  $t$ .
- (ii) Si  $f$  es rd-continua en  $t$ , entonces  $f$  es regular en  $t$ .
- (iii) El operador de salto  $\sigma$  es rd-continua.
- iv) Si  $f$  es regular ó rd-continua, entonces también lo es  $f^\sigma$ .
- v) Asumimos que  $f$  es continua. Si  $g : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$  es regular ó rd-continua, entonces  $f \circ g$  es regular ó rd-continua, respectivamente.

**Demostración.** La demostración de este teorema se puede ver en [44]. □

Dada una función  $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ , la derivada usual en  $\mathbb{R}$   $f'(t)$  es reemplazada por  $\Delta$ -derivada  $f^\Delta(t)$ , donde  $t \in \mathbb{T}^k$ . Similarmente, la integral habitual  $\int_a^b f(t)dt$  se reemplaza por  $\Delta$ -integral  $\int_a^b f(t)\Delta t$ . Las definiciones precisas de estos conceptos se pueden encontrar en [62]. El hecho importante es que

$$f^\Delta(t) = \begin{cases} \lim_{s \rightarrow t} \frac{f(t) - f(s)}{t - s}, & \text{si } t \text{ es denso a la derecha} \\ \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\sigma(t) - t}, & \text{si } t \text{ es disperso a la derecha} \end{cases}$$

con la condición de que  $\Delta$ -derivada  $f^\Delta(t)$  exista.

**Definición 5.6** Una función  $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$  es  $\Delta$ -diferenciable en  $t \in \mathbb{T}$ , si existe un número real, denotado por  $f^\Delta(t)$ , llamado la  $\Delta$ - derivada de  $f$  en  $t$ , tal que para todo  $\varepsilon > 0$  existe una vecindad  $U$  de  $t$  tal que

$$|f(\sigma(t)) - f(s) - f^\Delta(t)(\sigma(t) - s)| \leq \varepsilon |\sigma(t) - s|, \text{ para todo } s \in U.$$

Llamamos a  $f^\Delta(t)$  la derivada delta (o Hilger) de  $f$  en  $t$ . Además, decimos que  $f$  es  $\Delta$ -diferenciable en  $\mathbb{T}^k$  siempre que  $f^\Delta(t)$  exista para todo  $\mathbb{T}^k$ . La función  $f^\Delta : \mathbb{T}^k \rightarrow \mathbb{R}$  es entonces llamado la derivada de  $f$  en  $\mathbb{T}^k$ .

Para una función  $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ , hay una segunda derivada  $f^{\Delta\Delta}$  siempre que  $f^\Delta$  sea diferenciable en  $\mathbb{T}^{k^2} = (\mathbb{T}^k)^k$  con derivada  $f^{\Delta\Delta} = (f^\Delta)^\Delta : \mathbb{T}^{k^2} \rightarrow \mathbb{R}$ .

**Teorema 5.2** Sea  $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$  una función y  $t \in \mathbb{T}^k$ . Entonces tenemos las siguientes propiedades

- (i) Si  $f$  es diferenciable en  $t$ , entonces  $f$  es rd-continua en  $t$ ,
- (ii) Si  $f$  es rd-continua en  $t$  y  $t$  está dispersa a la derecha, entonces  $f$  es diferenciable en  $t$  con

$$f^\Delta(t) = \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\mu(t)},$$

- (iii) Si  $t$  es denso a la derecha, entonces  $f$  es diferenciable en  $t$  si el límite

$$\lim_{s \rightarrow t} \frac{f(t) - f(s)}{t - s}$$

existe, en este caso

$$f^\Delta(t) = \lim_{s \rightarrow t} \frac{f(t) - f(s)}{t - s}.$$

- (iv) Si  $f$  es diferenciable en  $t$ , entonces  $f(\sigma(t)) = f(t) + \mu(t)f^\Delta(t)$ .

**Teorema 5.3** Asumimos que  $f, g : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$  son funciones diferenciables en  $t \in \mathbb{T}^k$ . Entonces

1. La suma  $f + g : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$  es diferenciable en  $t$  y se tiene que

$$(f + g)^\Delta(t) = f^\Delta(t) + g^\Delta(t).$$

2. Para cualquier constante real  $\alpha$ ,  $\alpha f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$  es diferenciable en  $t$  con

$$(\alpha f)^\Delta(t) = \alpha f^\Delta(t).$$

3. El producto  $fg : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$  es diferenciable en  $t$  y se satisface

$$(fg)^\Delta(t) = f^\Delta(t)g(t) + f(\sigma(t))g^\Delta(t) = f(t)g^\Delta(t) + f^\Delta(t)g(\sigma(t)).$$

4. Si  $f(t)f(\sigma(t)) \neq 0$ , entonces  $1/f$  es diferenciable en  $t$  con

$$\left(\frac{1}{f}\right)^\Delta(t) = -\frac{f^\Delta(t)}{f(t)f(\sigma(t))}.$$

5. Si  $g(t)g(\sigma(t)) \neq 0$ , entonces  $f/g$  es diferenciable en  $t$  con

$$\left(\frac{f}{g}\right)^\Delta(t) = \frac{f^\Delta(t)g(t) - f(t)g^\Delta(t)}{g(t)g(\sigma(t))}.$$

**Ejemplo 5.2** (i) Si  $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$  es definido por  $f(t) = \alpha$  para todo  $t \in \mathbb{T}$ , donde  $\alpha$  es una constante real constante, entonces  $f^\Delta(t) \equiv 0$ . Esto es claro porque para cualquier  $\varepsilon > 0$ ,

$$|f(\sigma(t)) - f(s) - 0(\sigma(t) - s)| = |\alpha - \alpha| = 0 \leq \varepsilon|\sigma(t) - s|$$

para todo  $s \in \mathbb{T}$ .

(ii) Si  $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$  es definido por  $f(t) = t$  para todo  $t \in \mathbb{T}$ , entonces  $f^\Delta(t) \equiv 1$ . Pues  $\varepsilon > 0$ ,

$$|f(\sigma(t)) - f(s) - 1(\sigma(t) - s)| = |\sigma(t) - s - (\sigma(t) - s)| = 0 \leq \varepsilon|\sigma(t) - s|$$

para todo  $s \in \mathbb{T}$ .

El siguiente concepto de  $\Delta$ -integral de Riemann en time scale representa una generalización del clásico integral de Riemann:

### 5.2.1. Integrabilidad en time scale

Sea  $\mathbb{T}$  un time scale. Una partición de  $[a, b]_{\mathbb{T}}$  es una sucesión finita de puntos

$$\{t_0, t_1, \dots, t_m\} \subset [a, b]_{\mathbb{T}}, \quad a = t_0 < t_1 < \dots < t_m = b.$$

Dada esa partición, ponemos  $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$ . Una partición consiste en una sucesión de puntos  $\{\xi_1, \dots, \xi_m\}$  tal que  $\xi_i \in [t_{i-1}, t_i)$  para cada  $i \in \{1, \dots, m\}$ . El conjunto de todas las particiones de puntos de  $[a, b]_{\mathbb{T}}$  se denotará con el símbolo  $D = D(a, b)$ . Si no se indica lo contrario, siempre asumiremos que los puntos de división son  $\{t_0, t_1, \dots, t_m\}$  y  $\{\xi_1, \dots, \xi_m\}$ .

**Definición 5.7** Una función acotada  $f : [a, b]_{\mathbb{T}} \rightarrow \mathbb{R}$  es llamado  $\Delta$ -integral de Riemann si existe un número  $S \in \mathbb{R}$  con la propiedad de que para cada  $\varepsilon > 0$ , existe un  $\delta > 0$ ;  $|\sum_{i=1}^m f(\xi_i)\Delta t_i - S| < \varepsilon$  para todo  $D \in D_{\delta(a,b)}$ . El número  $S$  es llamado el valor  $\Delta$ -integral de Riemann de  $f$  sobre  $[a, b]_{\mathbb{T}}$  y escribimos

$$\int_a^b f(t)\Delta t = S.$$

Las propiedades de  $\Delta$ -integral de Riemann son similares a las propiedades del clásico integral de Riemann, (ver [20] o el Capítulo 5 de [48] para las pruebas correspondientes).

**Teorema 5.4** ■ Si  $f$  es una función  $\Delta$ -integral de Riemann en  $[a, b]_{\mathbb{T}}$ , entonces también es  $\Delta$ -integral de Riemann en cada sub-intervalo  $[c, d]_{\mathbb{T}}$  de  $[a, b]_{\mathbb{T}}$ .

- Cada función rd-continua es  $\Delta$ -integral de Riemann.
- El producto de dos funciones  $\Delta$ -integrables de Riemann es de nuevo  $\Delta$ -integrable de Riemann.

**Teorema 5.5** Si  $f : [a, b]_{\mathbb{T}} \rightarrow \mathbb{R}$  es una función  $\Delta$ -integral de Riemann, entonces para cada  $\varepsilon > 0$ , existe un  $\delta > 0$  tal que  $\sum_{i=1}^m (M_i - m_i) \Delta t_i < \varepsilon$  para todo  $D \in D_{\delta(a,b)}$ , donde  $M_i = \sup_{u \in [t_{i-1}, t_i]} f(u)$  y  $m_i = \inf_{u \in [t_{i-1}, t_i]} f(u)$ .

**Teorema 5.6 (Existencia de Pre-antiderivadas)** Sea  $f$  una función regular. Entonces existe una función  $F$  el cuál es pre-diferenciable en la región de diferenciación  $D_0$  tal que

$$F^{\Delta}(t) = f(t), \quad \text{para todo } t \in D_0$$

**Definición 5.8** Asumimos que  $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$  es una función regular. Una función  $F$  como en el Teorema 5.6 es llamado una pre-antiderivada de  $f$ . Definimos la integral indefinida de una función regular  $f$  por

$$\int f(t) \Delta t = F(t) + C, t \in \mathbb{T},$$

donde  $C$  es una constante y  $F$  es una pre-antiderivada de  $f$ . Definimos la  $\Delta$ -integral de Cauchy por

$$\int_r^s f(t) \Delta t = F(s) - F(r), \quad \text{para todo } t \in \mathbb{T}.$$

Una función  $F : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$  es llamado una antiderivada de  $f$  tal que

$$F^{\Delta}(t) = f(t), \quad \text{para todo } t \in \mathbb{T}^k.$$

**Teorema 5.7 (Existencia de antiderivadas)** Cada función rd-continua  $f$  tiene una antiderivada. En particular si  $t_0 \in \mathbb{T}$ , entonces  $F$  definido por

$$F(t) := \int_{t_0}^t f(\tau) \Delta\tau, \text{ para } t \in \mathbb{T}$$

es una antiderivada de  $f$ .

El siguiente Teorema son propiedades elementales de  $\Delta$ -integral.

**Teorema 5.8** Si  $a, b, c \in \mathbb{T}$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ , y  $f, g \in C_{rd}$ . Entonces

$$(a) \int_a^b [f(t) + g(t)] \Delta t = \int_a^b f(t) \Delta t + \int_a^b g(t) \Delta t,$$

$$(b) \int_a^b (\alpha f)(t) \Delta t = \alpha \int_a^b f(t) \Delta t,$$

$$(c) \int_a^b f(t) \Delta t = - \int_b^a f(t) \Delta t,$$

$$(d) \int_a^a f(t) \Delta t = 0,$$

$$(e) \int_a^b f(t) \Delta t = \int_a^c f(t) \Delta t + \int_c^b f(t) \Delta t,$$

(f) Si  $|f(t)| \leq g(t)$  en  $[a, b]$ , entonces

$$| \int_a^b f(t) \Delta t | \leq \int_a^b g(t) \Delta t,$$

(g) Si  $f(t) \geq 0$  para todo  $a \leq t < b$ , entonces  $\int_a^b f(t) \Delta t \geq 0$ ,

**Teorema 5.9** Si  $a, b \in \mathbb{T}$  y  $f, g \in C_{rd}$ , y  $f, g$  diferenciables, entonces

$$(a) \int_a^b f(\sigma(t)) g^\Delta(t) \Delta t = (fg)(b) - (fg)(a) - \int_a^b f^\Delta(t) g(t) \Delta t,$$

$$(b) \int_a^b f(t) g^\Delta(t) \Delta t = (fg)(b) - (fg)(a) - \int_a^b f^\Delta(t) g(\sigma(t)) \Delta t.$$

**Teorema 5.10** Si  $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$  es una función arbitraria y  $t \in \mathbb{T}$ , entonces

$$\int_t^{\sigma(t)} f(\tau) \Delta\tau = \mu(t) f(t).$$

La  $\Delta$ -integral de Riemann de una función matricial  $f : [a, b]_{\mathbb{T}} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ , donde  $A = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^n$ , se define de manera directa como la matriz

$$\left\{ \int_a^b a_{ij}(t) \Delta t \right\}_{i,j=1}^n$$

(siempre que exista); lo denotamos por  $\int_a^b A(t) \Delta t$ .

### 5.3. Ecuaciones diferenciales y soluciones en time scale

Consideraremos el siguiente sistema diferencial con valor inicial (PVI)

$$\begin{aligned}x^\Delta &= f(t, x), t \in J^k, \\x(t_0) &= x_0,\end{aligned}\tag{5.1}$$

donde  $J^k \subseteq J$  con  $J$  un subconjunto cerrado (posiblemente ilimitado arriba) de un time scale  $\mathbb{T}$  (que es un subconjunto cerrado, no vacío de los números reales) con  $f : J^k \times D \subseteq J^k \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  y  $(t_0, x_0)$  es un punto dado en  $J^k \times D$ . El  $\Delta$  denota “diferenciación”.

Una solución del sistema diferencial (5.1) es una función delta-diferenciable  $\phi : I \subseteq J \rightarrow \mathbb{R}$  tal que los puntos  $(t, \phi(t))$  están en  $I \times D$  para todo  $t \in I \subseteq J$  y  $\phi(t)$  satisface la ecuación diferencial (5.1) para todo  $t \in I^k \subseteq J^k$ .

Comenzaremos con el desarrollo de Teoría de Floquet en time scale. Si queremos formular el Teorema de Floquet en time scale, debemos introducir una nueva suposición sobre “el espacio tiempo”  $\mathbb{T}$ .

**Definición 5.9 (Kaufmann and Raffoul [15])** Sea  $T > 0$  un número real. Un time scale  $\mathbb{T}$  es llamado  $T$ -periódico si  $t \in \mathbb{T}$  implica  $t \pm T \in \mathbb{T}$  y  $\mu(t) = \mu(t \pm T)$ . Para  $\mathbb{T} \neq \mathbb{R}$ , el  $T$  positivo más pequeño es llamado el período de time scale.

**Ejemplo 5.3** El time scale  $\mathbb{T} = \cup_{k=0}^{\infty} [2k, 2k + 1]$  es un time scale 2 periódico.

**Definición 5.10 (Kaufmann and Raffoul [15])** Sea  $\mathbb{T} \neq \mathbb{R}$  un time scale periódico con periodo  $T$ . Decimos que la función  $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$  es periódico con período  $\omega$  si existe un número natural  $n$  tal que  $\omega = np$ ,  $f(t + \omega) = f(t)$  para todo  $t \in \mathbb{T}$  y  $\omega$  es el número más pequeño tal que  $f(t + \omega) = f(t)$ . Si  $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ , decimos que  $f$  es periódico con período  $\omega > 0$  si  $\omega$  es el número positivo más pequeño tal que  $f(t + \omega) = f(t)$  para todos los  $t \in \mathbb{T}$ .

Si  $\phi(t)$  es una solución arbitraria de (5.1), entonces la función  $\psi(t) := \phi(t + T)$  es también una solución de (5.1) como

$$\psi^\Delta(t) = \phi^\Delta(t + T) = a(t + T)\phi(t + T) = a(t)\psi(t),$$

entonces hay una constante  $c \neq 0$  tal que

$$\psi(t) \equiv \phi(t)c,$$

para todo  $t \in \mathbb{T}$ . Podemos escribir  $c := \phi^{-1}(t_0)\phi(t_0 + T)$ . Por lo tanto

$$\phi(t_0 + 2T) = \phi((t_0 + T) + T) = \phi(t_0 + T)c = \phi(t_0)c^2$$

De la prueba conocida del Teorema de Floquet para EDO es claro que nos gustaría probar que existe una constante  $b > 0$  tal que

$$c^2 = e_b(t_0 + 2T, t_0).$$

Si esto es cierto, podemos proceder de la siguiente manera. Escribamos

$$p(t) := \phi(t) \frac{1}{e_b(t, t_0)} = \phi(t)e_b(t_0, t),$$

entonces

$$\begin{aligned} p(t + 2T) &= \phi(t + 2T)e_b(t_0, t + 2T) \\ &= \phi(t)c^2 e_b(t_0, t + 2T) \\ &= \phi(t)e_b(t_0 + 2T, t_0)e_b(t_0, t + 2T) \\ &= \phi(t)e_b(t_0 + 2T, t + 2T) \\ &= \phi(t)e_b(t_0, t) \\ &= p(t); \end{aligned}$$

por lo tanto, hay una función  $2T$ -periódica  $p(t)$  tal que

$$\phi(t) = p(t)e_b(t, t_0),$$

que es exactamente la prueba del Teorema de Floquet (real).

### 5.3.1. El logaritmo real generalizado

El enfoque habitual en EDO es construir explícitamente  $b$ , que a menudo se llama el logaritmo real (matriz) de  $c$ . Esta es la parte más complicada de la teoría de Floquet. Pero cualquier uso conocido de la teoría de Floquet no es constructivo, por lo que de hecho es suficiente para probar la existencia de tal  $b$ . Para hacer esto, recordemos que  $e_b(t, t_0)$  es la solución única del problema inicial

$$x^\Delta(t) = bx(t), \quad x(t_0) = 1, \quad t, t_0 \in \mathbb{T}, \quad (5.2)$$

de donde tenemos que encontrar una representación de la solución  $x(t)$  de (5.2). Para este fin, podemos reemplazar (5.2) por una ecuación diferencial ordinaria en  $\mathbb{R}$  como en [40]. No hay un inverso habitual para  $e_b(t, t_0)$ , que es una rica fuente de dificultades de la teoría de Floquet sobre time scale.

### 5.3.2. La solución del sistema dinámico lineal

**Teorema 5.11 (Existencia)** Consideremos el sistema diferencial lineal homogéneo de primer orden en time scale

$$x^\Delta(t) = A(t)x(t), \quad x(t_0) = x_0, \quad t_0 \in \mathbb{T}. \quad (5.3)$$

Para cualquier condición inicial  $x(t_0) = x_0$ , el sistema diferencial lineal homogéneo (5.3) tiene una única solución dado por

$$x(t) = \Phi_A(t, t_0)x_0, \quad (5.4)$$

donde  $x(t) \in C_{rd}^1(\mathbb{T}, \mathbb{R}^{n \times n})$ .

La matriz de transición  $\Phi_A(t, t_0)$  (podemos ver como una función de dos variables), definido por la serie generalizada Peano-Baker

$$\begin{aligned} \Phi_A(t, \tau) = & I + \int_{\tau}^t A(s_1)\Delta s_1 + \int_{\tau}^t A(s_1) \int_{\tau}^{s_1} A(s_2)\Delta s_2\Delta s_1 \cdots \\ & + \int_{\tau}^t A(s_1) \int_{\tau}^{s_1} A(s_2)\Delta s_2\Delta s_1 \int_{\tau}^{s_{i-1}} A(s_i)\Delta s_i \cdots \Delta s_1 + \cdots \end{aligned}$$

converge absolutamente y uniformemente para  $t, t_0 \in [-T, T]$ , donde  $T > 0$  es arbitrario.

**Demostración.** Esto se demuestra en el libro de Bohner y Peterson (ver en [44]). A continuación presentamos un ejemplo de un sistema diferencial y obtendremos su matriz de transición

**Ejemplo 5.4** Consideremos el sistema diferencial lineal de  $2 \times 2$

$$X^\Delta(t) = \begin{pmatrix} 0 & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix} X(t), \quad X(t_0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

la matriz de transición a través de la serie Peano-Baker es

$$\Phi_A(t, t_0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \int_{t_0}^t \begin{pmatrix} 0 & s_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Delta s_1 + \int_{t_0}^t \begin{pmatrix} 0 & s_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \int_{t_0}^{s_1} \begin{pmatrix} 0 & s_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Delta s_2 \Delta s_1 + \dots$$

Es fácil ver que todos los términos de la serie Peano-Baker son la matriz cero después del segundo término. Por lo tanto,

$$\Phi_A(t, t_0) = \begin{pmatrix} 1 & \int_{t_0}^t s_1 \Delta s_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Teorema 5.12** Supongamos que  $A(t) \equiv A$  es una matriz constante. Entonces la matriz de transición para la ecuación (5.3) es

$$\Phi_A(t, t_0) \equiv e_A(t, t_0),$$

donde la matriz exponencial es definido por series de potencia

$$e_A(t, t_0) = \sum_{i=0}^{\infty} A^i h_i(t, t_0) x_0,$$

que converge absolutamente y uniformemente para  $t, t_0 \in [-T, T]_{\mathbb{T}}$ , para algún  $T > 0$ .

### 5.3.3. Funciones exponenciales generalizadas

La función  $p : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$  es regresiva si  $1 + \mu p(t) \neq 0$  para todo  $t \in \mathbb{T}^k$ , este concepto motiva la definición de los siguientes conjuntos:

$$\mathfrak{R} = \{p : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R} : p \in C_{rd}(\mathbb{T}) \text{ y } 1 + \mu p(t) \neq 0 \text{ para todo } t \in \mathbb{T}^k\},$$

$$\mathfrak{R}^+ = \{p \in \mathfrak{R} : 1 + \mu p(t) > 0 \text{ para todo } t \in \mathbb{T}^k\}.$$

El conjunto de funciones rd-continuas  $f$  denotamos por:

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{R}(\mathbb{T}) = \mathfrak{R}(\mathbb{T}, \mathbb{R}).$$

La función  $p : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$  es uniformemente regresiva en  $\mathbb{T}$  si existe una constante positiva  $\delta$  tal que  $0 < \delta^{-1} \leq |1 + \mu p(t)|$ ,  $t \in \mathbb{T}^k$ . Una matriz  $A$  es regresiva si y solo si todos sus autovalores están en  $\mathfrak{R}$ . De forma equivalente, la matriz  $A(t)$  es regresiva

si y sólo si  $1 + \mu(t)A$  es invertible para todo  $t \in \mathbb{T}^k$ .

Si  $p \in \mathfrak{R}$  entonces definimos la función exponencial generalizada en time scale por

$$e_p(t, s) = \exp\left(\int_s^t \xi_{\mu(t)}(p(\tau))\Delta\tau\right), \text{ para todo } s, t \in \mathbb{T}$$

**Teorema 5.13**    ■ Si  $p \in \mathfrak{R}$ , entonces  $e_p(t, r)e_p(t, s) = e_p(t, s)$

- $e_p(\sigma(t), s) = (1 + \mu(t)p(t))e_p(t, s)$ .
- Si  $p \in \mathfrak{R}^+$ , entonces  $e_p(t, t_0) > 0$  para todo  $t \in \mathbb{T}$
- Si  $1 + \mu(t)p(t) < 0$ , para algún  $t \in \mathbb{T}$ , entonces  $e_p(t, t_0)e_p(\sigma(t), t_0) < 0$ .
- Si  $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ , entonces  $e_p(t, s) = e^{\int_s^t p(\tau)d\tau}$ . Además, si  $p$  es constante, entonces  $e_p(t, s) = e^{p(t,s)}$ .
- Si  $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ , entonces  $e_p(t, s) = \prod_{\tau=s}^{t-1} (1 + p(\tau))$ . Además, si  $\mathbb{T} = h\mathbb{Z}$ , con  $h > 0$  y  $p$  es constante, entonces  $e_p(t, s) = (1 + hp)^{(t-s)/h}$ .

Si  $p \in \mathfrak{R}$  y  $p : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$  es rd-continua, entonces la ecuación diferencial

$$y^\Delta(t) = p(t)y(t) + f(t), \tag{5.5}$$

es llamado regresivo.

### Matrices regresivos

Sea  $A$  una función matricial  $m \times n$  en  $\mathbb{T}$ . Se dice que la matriz  $A$  es rd-continuo en  $\mathbb{T}$  si cada elemento lo es, y todos las funciones matriciales rd-continuas definidos en  $\mathbb{T}$  se denotan por

$$C_{rd}(\mathbb{T}, \mathbb{R}^{m \times n}).$$

Una función  $A$  matricial  $m \times n$  en  $\mathbb{T}$  se denomina regresiva si

$$I + \mu(t)A(t)$$

es invertible para todo  $t \in \mathbb{T}$ , y la clase de todos las funciones regresivos rd-continuos se denota por

$$R = R(\mathbb{T}, \mathbb{R}^{m \times n}).$$

**Teorema 5.14 (Variación de constantes)** Consideremos el sistema diferencial regresivo

$$y^\Delta(t) = A(t)y(t) + f(t). \quad (5.6)$$

Para cualquier condición inicial  $x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}$ , el sistema diferencial regresivo (5.6) tiene una única solución  $y : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}^n$  dado por

$$y(t) = y_0 e_p(t, t_0) + \int_{t_0}^t e_p(t, \sigma(\tau)) f(\tau) \Delta\tau.$$

**Teorema 5.15** Supongamos  $A, B \in \mathfrak{R}$  son funciones matriciales en  $\mathbb{T}$ . Las siguientes condiciones son válidas

- (i)  $\Phi_A(t, r)\Phi_A(r, s) = \Phi_A(t, s)$  para todo  $r, s, t \in \mathbb{T}$
- (ii)  $\Phi_A(\sigma(t), s) = (I + \mu(t)A(t))\Phi_A(t, s)$ .
- (iii) Si  $\mathbb{T} = \mathfrak{R}$  y  $A$  es una constante, entonces  $\Phi_A(t, s) = e_A(t, s) = e^{A(t-s)}$
- (iv) Si  $\mathbb{T} = h\mathbb{Z}$ , con  $h > 0$ , y  $A$  es una constante, entonces  $\Phi_A(t, s) = e_A(t, s) = (I + hA)^{\frac{t-s}{h}}$ .

Decimos que el sistema  $n \times 1$  vectorial

$$y^\Delta(t) = A(t)y(t) + f(t), \quad (5.7)$$

es regresivo siempre que  $A \in \mathfrak{R}$  y  $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}^n$  es una función vectorial rd-continua.

**Teorema 5.16 (Variación de constantes)** Consideremos el sistema diferencial vectorial regresivo

$$y^\Delta(t) = A(t)y(t) + f(t), \quad (5.8)$$

Para cualquier condición inicial  $y(t_0) = y_0 \in \mathbb{R}^n$ , el sistema diferencial regresivo (5.8) tiene una única solución  $y : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}^n$  dado por

$$y(t) = \Phi_A(t, t_0)y_0 + \int_{t_0}^t \Phi_A(t, \sigma(\tau))f(\tau)\Delta\tau.$$

**Ejemplo 5.5** Para encontrar la solución al sistema diferencial lineal

$$x^\Delta(t) = \begin{pmatrix} a(t) & 1 \\ 0 & b(t) \end{pmatrix} x(t), \quad x(t_0) = x_0 = \begin{pmatrix} x_{1_0} \\ x_{2_0} \end{pmatrix}$$

escribimos el sistema como dos ecuaciones:

$$\begin{aligned} x_1^\Delta(t) &= a(t)x_1(t) + b(t)x_2(t), & x_1(t_0) &= x_{1_0} \\ x_2^\Delta(t) &= b(t)x_2(t), & x_2(t_0) &= x_{2_0}. \end{aligned}$$

Es fácil ver que  $x_2(t) = e_b(t, t_0)x_{2_0}$ . La primera ecuación se puede ver como

$$x_1^\Delta(t) = a(t)x_1(t) + e_b(t, t_0)x_{2_0}, \quad x_1(t_0) = x_{1_0}$$

la solución es

$$x(t) = e_a(t, t_0)x_{1_0} + \int_{t_0}^t e_a(t, \sigma(s))e_b(t, t_0)x_{2_0}\Delta s.$$

en su forma matricial, obtenemos

$$x(t) = \begin{pmatrix} e_a(t, t_0) & \int_{t_0}^t e_a(t, \sigma(s))e_b(t, t_0)\Delta s \\ 0 & e_b(t, t_0) \end{pmatrix} x_0.$$

es decir obtenemos  $\Phi_A(t, t_0)$ .

### 5.3.4. Sistema Hamiltoniano lineal en time scale

El propósito en esta subsección es presentar la teoría del sistema hamiltoniano lineal en *time scale*.

Un sistema hamiltoniano lineal en *time scale*  $\mathbb{T}$  es un sistema diferencial lineal de primer orden de la forma

$$x^\Delta = H(t)x, \tag{5.9}$$

donde  $H : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}^{2n \times 2n}$  es una matriz de funciones rd-continuas que satisface la identidad

$$H^T(t)F + FH(t) + \mu(t)H^T(t)FH(t) = 0, \tag{5.10}$$

con  $\mu$  función de graininess de *time scale* y  $F = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}$ . El sistema (5.9) con la matriz  $H$  que satisface la identidad (5.10) fue introducido y estudiado en [12, 57] con el nombre de “sistema dinámico simpléctico”. El concepto de un sistema dinámico Hamiltoniano fue introducido por Ahlbrandt (ver en [8]).

## 5.4. Teorema del promedio en time scale

El propósito en esta sección es estudiar la existencia de soluciones periódicas para las ecuaciones diferenciales perturbadas en time scale.

Introducimos algunas notaciones. Sea  $x = (x_1, \dots, x_n) \in U$ ,  $t \in \mathbb{T}$ . Sea  $f : \mathbb{T} \times U \rightarrow \mathbb{R}^n \in C_{rd}^k$ , donde  $C_{rd}^k$  denota el conjunto de todos k-ésima rd-funciones continuas, para cada  $(t, x) \in \mathbb{T} \times U$ . Definimos la función promedio  $F(\cdot, \varepsilon)$  en time scale por

$$F(\cdot, \varepsilon) = \sum_{i=1}^k \int_0^T \frac{1}{T} \varepsilon^i f_i(s, \cdot) \Delta s. \quad (5.11)$$

Los resultados que presentaremos a continuación han sido probados por Guo, Li, Xing y Yang y los detalles de la prueba puede el lector revisar en [60].

**Teorema 5.17** *Asumimos que  $\mathbb{T}$  es time scale  $T$ -periódica,  $U \subset \mathbb{R}^n$  un conjunto abierto y acotado. Consideramos la siguiente ecuación diferencial*

$$x^\Delta(t) = \sum_{i=1}^k \varepsilon^i f_i(t, x) + \varepsilon^{k+1} r(t, x, \varepsilon), \quad (5.12)$$

donde  $f_i : \mathbb{T} \times U \rightarrow \mathbb{R}^n$  para  $i = 1, \dots, k$ ,  $r : \mathbb{T} \times U \times (-\varepsilon_0, \varepsilon_0) \rightarrow \mathbb{R}^n$  son funciones rd-continuas,  $T$ -periódicas en  $t$  y localmente Lipchitz con respecto a  $x$ . Además, suponemos que se cumplen las siguientes condiciones:

i) Para cada  $t \in \mathbb{T}$ ,  $p \in \partial U$ , existe una vecindad  $N_p$  de  $p$ , una constante  $\sigma > 0$  independiente de  $\varepsilon$  y  $1 \leq j \leq n$  tal que

$$\left| \sum_{i=1}^k \varepsilon^i (f_i)^j(t, q) \right| \geq |\varepsilon|^k \sigma$$

para algún  $q \in N_p$ ,  $t \in [0, T]_{\mathbb{T}}$ ,  $y \varepsilon \in [-\varepsilon_0, \varepsilon_0] - \{0\}$ .

ii) Supongamos que para cada  $\varepsilon \in [-\varepsilon_0, \varepsilon_0] - \{0\}$ ,

$$\deg(F(\cdot, \varepsilon), U, 0) \neq 0,$$

donde  $F(\cdot, \varepsilon)$  es definido en (5.11).

Entonces, existe una solución  $x(t)$   $T$ -periódica de la ecuación (5.12) tal que  $x(t) \in U$ , para  $|\varepsilon| > 0$  suficientemente pequeño.

**Demostración.** La demostración de éste Teorema se puede ver en [60].

**Observación 5.1** El resultado de la teoría del promedio para ecuaciones diferenciales en time scale de orden arbitrario extiende la teoría del promedio para ecuaciones diferenciales ordinarios a orden arbitrario en  $\varepsilon$ .

Aquí bosquejamos la prueba del método de promedio de primer orden para ecuaciones diferenciales en time scale.

**Teorema 5.18** *Consideramos la siguiente ecuación diferencial*

$$x^\Delta(t) = \varepsilon f_1(t, x) + \varepsilon^2 r(t, x, \varepsilon), \quad (5.13)$$

donde  $f_1 : \mathbb{T} \times U \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $r : \mathbb{T} \times U \times (-\varepsilon_0, \varepsilon_0) \rightarrow \mathbb{R}^n$  son funciones rd-continuas,  $T$ -periódicas en  $t$ ,  $f_1(t, x)$  y  $r(t, x, \varepsilon)$  son localmente Lipchitz con respecto a  $x$ . Definimos la función promedio  $F : U \times (-\varepsilon_0, \varepsilon_0) \rightarrow \mathbb{R}^n$  por

$$F(y, \varepsilon) = \frac{1}{T} \int_0^T \varepsilon f_1(t, x) \Delta t. \quad (5.14)$$

Además, suponemos que para algún subconjunto abierto acotado  $U \subset \mathbb{R}^n$ ,  $\varepsilon \in [-\varepsilon_0, \varepsilon_0] - \{0\}$ ,

$$\deg(F(\cdot, \varepsilon), U, 0) \neq 0. \quad (5.15)$$

Entonces existe una solución  $T$ -periódica  $x(t)$  de la ecuación (5.13) tal que  $x(t) \in U$ , para  $|\varepsilon| > 0$  suficientemente pequeño.

**Demostración.** Por simplicidad, denotemos

$$F(t, x, \varepsilon) = \varepsilon f_1(t, x) + \varepsilon^2 r(t, x, \varepsilon),$$

Ahora consideremos la ecuación

$$x^\Delta(t) = F(t, x, \varepsilon), \quad (5.16)$$

donde  $F : \mathbb{T} \times U \times (-\varepsilon_0, \varepsilon_0) \rightarrow \mathbb{R}^n$  es una función rd-continua,  $T$ -periódica en  $t$ , localmente Lipschitz en  $x$ , y  $\mathbb{T}$  un time scale  $T$ -periódica,  $U$  es un subconjunto abierto de  $\mathbb{R}^n$ .

Sea  $x(t)$  la solución de (5.13). Por el teorema de existencia y unicidad en time scale

(ver, Sección 8.3 de [44]), existe un  $\varepsilon_0 > 0$  tal que para algún  $y_0 \in \bar{U}$ , y  $\varepsilon \in [-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$ , la solución  $x(t)$  existe para todo  $t \in [0, T]_{\mathbb{T}}$ , y tenemos

$$x(t) = y_0 + \int_0^t F(s, x, \varepsilon) \Delta s. \quad (5.17)$$

Según el Lema 2.1 en [9], sabemos que la existencia de solución T-periódica de (5.13) es equivalente al siguiente problema de valor acotado de

$$\begin{aligned} x^\Delta(t) &= F(t, x, \varepsilon), \\ x(T) &= x(0), \end{aligned} \quad (5.18)$$

donde  $\varepsilon \in [-\varepsilon_0, \varepsilon_0] - \{0\}$ ,  $0, t \in \mathbb{T}$ .

Sea

$$X = \{y : [0, T]_{\mathbb{T}} \rightarrow \mathbb{R}^n, \ y(t) \text{ es rd-continuo en } [0, T]_{\mathbb{T}}\},$$

y definimos la norma como  $\|y\| = \sup_{t \in [0, T]_{\mathbb{T}}} |y(t)|$ . Podemos ver que  $X$  es un espacio de Banach con la norma  $\|\cdot\|$ .

Para  $y_0 \in \mathbb{R}^n$  y  $x \in X$  con  $x(t) \in \bar{U}$  para todo  $t \in [0, T]_{\mathbb{T}}$ , definimos un operador  $\tau : X \rightarrow X$  de la siguiente manera:

$$\tau(y_0, x) = \begin{pmatrix} y_0 + \frac{1}{T} \int_0^T \varepsilon f(s, x(s), \varepsilon) \Delta s \\ y_0 + \int_0^t \varepsilon f(s, x(s), \varepsilon) \Delta s \end{pmatrix}, \quad (5.19)$$

A continuación, la prueba es el mismo que el Teorema 1.1 en [9]. La única diferencia está en la prueba de  $0 \notin (id - H)(\partial(U \times V) \times [0, 1])$ . Ahora damos una prueba de ello y omitiremos otros detalles.

Denotemos  $F(t, x, \varepsilon) = \varepsilon f(t, x, \varepsilon)$ . Definimos

$$X_\lambda = \left\{ x \in X : \left| \frac{x(t) - x(s)}{t - s} \right| \leq |\varepsilon| \lambda M, \ \forall t \neq s \right\},$$

donde  $M$  es una constante que satisface

$$M = \sup_{t \in [0, T]_{\mathbb{T}}, x \in \bar{U}, \varepsilon \in [-\varepsilon_0, \varepsilon_0]} |f(t, x, \varepsilon)|.$$

Definimos una retracción  $\alpha_\lambda : X \rightarrow X_\lambda$  para  $\lambda \in [0, 1]$ . Consideremos el operador homotópico  $\tau : U \times V \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$

$$\tau(y_0, x, \lambda) = \begin{pmatrix} y_0 + \frac{1}{T} \int_0^T \varepsilon f(s, \alpha_\lambda \circ x(s), \varepsilon) \Delta s \\ \alpha_\lambda \circ y_0 + \lambda \int_0^t \varepsilon f(s, \alpha_\lambda \circ x(s), \varepsilon) \Delta s \end{pmatrix}, \quad (5.20)$$

donde  $(y_0, x, \lambda) \in U \times V \times [0, 1]$ ,  $V = \{x \in X : x(t) \in U, \forall t \in [0, T]_{\mathbb{T}}\}$ .

Probemos que

$$0 \notin (id - H)(\partial(U \times V) \times [0, 1]) \quad (5.21)$$

donde  $id$  es el operador identidad.

Supongamos lo contrario, es decir

$$0 \in (id - H)(\partial(U \times V) \times [0, 1]),$$

esto es: existe  $(\tilde{y}_0, \tilde{x}, \tilde{\lambda}) \in \partial(U \times V) \times [0, 1]$ , tal que  $(id - H)(\tilde{y}_0, \tilde{x}, \tilde{\lambda}) = 0$ , entonces (5.21) puede ser probado por los siguientes dos casos:

(a) Cuando  $\tilde{\lambda} = 0$  por la definición del conjunto  $X_\lambda$ , tenemos

$$\begin{aligned} X_0 &= \left\{ x \in X : \left| \frac{x(t) - x(s)}{t - s} \right| \leq 0, \forall t \neq s \right\} \\ &= \{x \in X : x(t) = x(s), \forall t \neq s\} \end{aligned}$$

lo que implica que  $\alpha_0 \circ x(t) = \alpha_0 \circ x(0)$ , para todo  $t \in [0, T]_{\mathbb{T}}$ . Como  $(id - H)(\tilde{y}_0, \tilde{x}, 0) = 0$ , tenemos

$$(\tilde{y}_0, \tilde{x}, 0) = H(\tilde{y}_0, \tilde{x}, 0),$$

es decir

$$\begin{pmatrix} \tilde{y}_0 \\ \tilde{x}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{y}_0 + \frac{1}{T} \int_0^T \varepsilon f(s, \alpha_0 \circ \tilde{x}(s), \varepsilon) \Delta s \\ \alpha_0 \circ \tilde{y}_0 \end{pmatrix}.$$

Así

$$\tilde{x}(t) \equiv \tilde{y}_0,$$

para todo  $t \in [0, T]_{\mathbb{T}}$  y

$$\frac{1}{T} \int_0^T \varepsilon f(s, \alpha_0 \circ \tilde{x}(s), \varepsilon) \Delta s = 0.$$

Esto es

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \int_0^T (\varepsilon f_1(t, \tilde{y}_0) + \varepsilon^2 r(t, \tilde{y}_0, \varepsilon)) \Delta s &= 0 \\ \frac{1}{T} \int_0^T \varepsilon f_1(s, \tilde{y}_0) \Delta s &= -\frac{1}{T} \int_0^T \varepsilon^2 r(s, \tilde{y}_0, \varepsilon) \Delta s. \end{aligned}$$

Si  $(\tilde{y}_0, \tilde{x}(t)) \in \partial(U \times V)$ , entonces  $\tilde{y}_0 \in \partial U$ . Cuando  $|\varepsilon| > 0$  es suficientemente pequeño, tenemos

$$\frac{1}{T} \int_0^T \varepsilon f_1(s, \tilde{y}_0) \Delta s = 0.$$

Es una contradicción a (ii) del Teorema 5.17 pues el grado de Brouwer  $\deg(F(\cdot, \varepsilon), U, 0) \neq 0$ .

(b) Cuando  $\tilde{\lambda} \in (0, 1]$ ,  $(0 < \tilde{\lambda} \leq 1)$ , como  $(id - H)(\tilde{y}_0, \tilde{x}, \tilde{\lambda}) = 0$  tenemos

$$\begin{pmatrix} \tilde{y}_0 \\ \tilde{x}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{y}_0 + \frac{1}{T} \int_0^T \varepsilon f(s, \alpha_{\tilde{\lambda}} \circ \tilde{x}(s), \varepsilon) \Delta s \\ \alpha_{\tilde{\lambda}} \circ \tilde{y}_0 + \tilde{\lambda} \int_0^t \varepsilon f(s, \alpha_{\tilde{\lambda}} \circ \tilde{x}(s), \varepsilon) \Delta s \end{pmatrix}.$$

Notemos que

$$\begin{aligned} \left| \frac{\tilde{x}(t) - \tilde{x}(s)}{t - s} \right| &= \frac{1}{|t - s|} |\tilde{x}(t) - \tilde{x}(s)| \\ &= \frac{1}{|t - s|} \left| \alpha_{\tilde{\lambda}} \circ \tilde{y}_0 + \tilde{\lambda} \int_0^t \varepsilon f(s, \alpha_{\tilde{\lambda}} \circ \tilde{x}(s), \varepsilon) \Delta s \right. \\ &\quad \left. - \alpha_{\tilde{\lambda}} \circ \tilde{y}_0 - \tilde{\lambda} \int_0^s \varepsilon f(s, \alpha_{\tilde{\lambda}} \circ \tilde{x}(s), \varepsilon) \Delta s \right| \\ &= \frac{\tilde{\lambda}}{|t - s|} \left| \int_0^t \varepsilon f(s, \alpha_{\tilde{\lambda}} \circ \tilde{x}(s), \varepsilon) \Delta s + \int_s^0 \varepsilon f(s, \alpha_{\tilde{\lambda}} \circ \tilde{x}(s), \varepsilon) \Delta s \right| \\ &= \frac{\tilde{\lambda} |\varepsilon|}{|t - s|} \left| \int_s^t f(\tau, \alpha_{\tilde{\lambda}} \circ \tilde{x}(\tau), \varepsilon) \Delta \tau \right| \\ &\leq \frac{\tilde{\lambda} |\varepsilon|}{|t - s|} \int_s^t |f(\tau, \alpha_{\tilde{\lambda}} \circ \tilde{x}(\tau), \varepsilon)| \Delta \tau \\ &= \frac{\tilde{\lambda} |\varepsilon| M}{|t - s|} |t - s| = \tilde{\lambda} |\varepsilon| M. \end{aligned} \tag{5.22}$$

Por definición de  $X_{\tilde{\lambda}}$ , obtenemos  $\tilde{x} \in X_{\tilde{\lambda}}$ , y  $\alpha_{\tilde{\lambda}} \circ \tilde{x} = \tilde{x}$ . Por lo tanto

$$\frac{1}{T} \int_0^T \varepsilon f(s, \tilde{x}(s), \varepsilon) \Delta s = 0,$$

y

$$\tilde{x}(t) = \tilde{y}_0 + \tilde{\lambda} \int_0^t \varepsilon f(s, \tilde{x}(s), \varepsilon) \Delta s.$$

De donde

$$\begin{aligned}
|\tilde{x}(t) - \tilde{y}_0| &= \tilde{\lambda}|\varepsilon| \left| \int_0^t f(s, \tilde{x}(s), \varepsilon) \Delta s \right| \\
&\leq \tilde{\lambda}|\varepsilon| \int_0^t |f(s, \tilde{x}(s), \varepsilon)| \Delta s \\
&\leq \tilde{\lambda}|\varepsilon| M_0 t \\
&\leq |\varepsilon| M_0 T, \quad t \in [0, T]_{\mathbb{T}},
\end{aligned} \tag{5.23}$$

donde  $M_0$  es una constante positiva. Como  $f_1(t, x)$  es localmente Lipschitz con respecto a  $x$ , tenemos

$$\begin{aligned}
&\left| \int_0^T f_1(t, \alpha_{\tilde{\lambda}} \circ \tilde{x}(t), \varepsilon) \Delta t - \int_0^T f_1(t, \tilde{y}_0) \Delta t \right| \\
&\left| \int_0^T (f_1(t, \alpha_{\tilde{\lambda}} \circ \tilde{x}(t)) + \varepsilon r(t, \alpha_{\tilde{\lambda}} \circ \tilde{x}(t), \varepsilon)) \Delta t - \int_0^T f_1(t, \tilde{y}_0) \Delta t \right| \\
&\leq \left| \int_0^T f_1(t, \alpha_{\tilde{\lambda}} \circ \tilde{x}(t)) \Delta t - \int_0^T f_1(t, \tilde{y}_0) \Delta t \right| + \left| \int_0^T \varepsilon r(t, \alpha_{\tilde{\lambda}} \circ \tilde{x}(t), \varepsilon) \Delta t \right| \\
&\leq \int_0^T L |\tilde{x}(t) - \tilde{y}_0| \Delta t + \left| \int_0^T \varepsilon r(t, \alpha_{\tilde{\lambda}} \circ \tilde{x}(t), \varepsilon) \Delta t \right| \\
&\leq |\varepsilon| \left( LM_0 T(T-0) + \left| \int_0^T r(t, \alpha_{\tilde{\lambda}} \circ \tilde{x}(t), \varepsilon) \Delta t \right| \right),
\end{aligned}$$

donde  $L$  es la constante local de Lipschitz. Entonces

$$\left| \int_0^T f_1(t, \tilde{y}_0) \Delta t \right| \leq |\varepsilon| \left( LM_0 T^2 + \left| \int_0^T r(t, \alpha_{\tilde{\lambda}} \circ \tilde{x}(t), \varepsilon) \Delta t \right| \right). \tag{5.24}$$

Si  $\tilde{y}_0 \in \partial U$ , de (5.15) tenemos

$$\int_0^T f_1(t, \tilde{y}_0) \Delta t \neq 0.$$

Esto es una contradicción a (5.24), para  $\varepsilon \rightarrow 0$ , por tanto  $\tilde{y}_0 \notin \partial U$ . Afirmamos que  $x(t) \in \partial V$ , tenemos  $x(t) \in \partial U$  para algunos  $t \in [0, T]_{\mathbb{T}}$ . Esto es una contradicción a (5.4), cuando  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Por (a) y (b), obtenemos

$$0 \notin (id - H)(\partial(U \times V) \times [0, 1]).$$

Por lo tanto, de la invarianza de homotopía, la teoría del grado topológico y el Lema 5.3 en [1], tenemos

$$\begin{aligned} & \deg(id - H(y_0, x, 1), U \times V, 0) \\ &= \deg(id - H(y_0, x, 0), U \times V, 0) \\ &= \deg(F(\cdot, \varepsilon), U, 0) \\ &\neq 0. \end{aligned}$$

Entonces, existe  $(\tilde{x}_*, \tilde{y}_{0*}) \in U \times V$ , tal que

$$\begin{pmatrix} \tilde{y}_{0*} \\ \tilde{x}_*(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{y}_{0*} + \frac{1}{T} \int_0^T \varepsilon f(s, \alpha_1 \circ \tilde{x}_*(s), \varepsilon) \Delta s \\ \alpha_1 \circ \tilde{y}_{0*} + \int_0^t \varepsilon f(s, \alpha_1 \circ \tilde{x}_*(s), \varepsilon) \Delta s \end{pmatrix}. \quad (5.25)$$

Una prueba similar que (b) produce que  $\tilde{x}_*(t) \in X_1$ , esto es

$$H(\tilde{y}_{0*}, \tilde{x}_*(t), 1) = \tau(\tilde{y}_{0*}, \tilde{x}_*(t)). \quad (5.26)$$

Por lo tanto, de (5.25) y (5.26), obtenemos que  $(\tilde{y}_{0*}, \tilde{x}_*(t), 1)$  es un punto fijo de  $\tau$  en  $X$ . Así  $\tilde{x}_*(t)$  es una solución del problema acotado (5.18). Esto completa la prueba del Teorema.  $\square$

Para finalizar esta sección presentaremos dos ejemplos donde se utiliza el método del promedio de primer orden para determinar la existencia de soluciones periódicas de sistemas diferenciales en time scale.

**Ejemplo 5.6** Consideremos la ecuación diferencial

$$y^\Delta(t) = \varepsilon(\sin(t\pi) + 1)y(t) + \varepsilon^2 r(t, x, \varepsilon), \quad (5.27)$$

en time scale  $\mathbb{T} = \cup_{k=0}^{\infty} [2k, 2k + 1]$ , es decir  $\mathbb{T}$  es 2-periódica. Sea

$$f_1(t, y(t)) = (\sin(t\pi) + 1)y(t).$$

$f_1(t, y)$  es 2-periódico en la primera variable, pues

$$\begin{aligned} f_1(t + 2, y(t)) &= (\sin((t + 2)\pi) + 1)y(t) \\ &= \sin(t\pi + 2\pi)y(t) + y(t) \\ &= (\sin(t\pi)\cos(2\pi)^1 + \sin(2\pi)^0 \cos(t\pi))y(t) + y(t) \\ &= f_1(t, y(t)). \end{aligned}$$

Además,  $f_1$  es Lipschitz-continua en la segunda variable, lo que significa que

$$\begin{aligned} |f_1(t, y_1) - f_1(t, y_2)| &= |(\sin(t\pi) + 1)y_1(t) - (\sin(t\pi) + 1)y_2(t)| \\ &\leq |\sin(t\pi) + 1||y_1(t) - y_2(t)| \\ &\leq 2|y_1(t) - y_2(t)| \quad \text{para algún } t \in \mathbb{T} \end{aligned}$$

Como  $F(y, \varepsilon) = \varepsilon\left(1 + \frac{1}{\pi}\right)y$ , entonces  $F(0, \varepsilon) = 0$ . Por lo tanto,  $\deg(F(\cdot, \varepsilon), U, 0) \neq 0$ . Entonces todas las hipótesis del Teorema 5.18 se cumplen, lo que implica que la ecuación (5.27) tiene una solución 2-periódica. Se usó una ecuación similar para describir el crecimiento de una población de plantas en [4]. En nuestro caso, el coeficiente de crecimiento varía en lugar de ser constante.

**Ejemplo 5.7** Consideremos la ecuación diferencial

$$\begin{aligned} x^\Delta &= \varepsilon^2 y + \varepsilon^3 x^2 y^3 \cos^2(t) + 2\varepsilon^4 y \sin(t) + \varepsilon^5 \sin t(x^2 + y^2), \\ y^\Delta &= \varepsilon^2 x^3 y^2 (\sin^2 t + 3) + \varepsilon^3 x^3 y^4 + 2\varepsilon^4 x \sin(t) + \varepsilon^5 \cos t(x^2 + y^2), \end{aligned} \quad (5.28)$$

con time scale  $\mathbb{T} = \cup_{k=0}^{\infty} [2k\pi, (k+1)\pi]$ , donde  $\sin t(x^2 + y^2)$ ,  $\cos t(x^2 + y^2)$  son rd-continuos y  $2\pi$ -periódicos en la variable  $t$ . Sea

$$\begin{aligned} f_1 &= (0, x^3 y^2 (\sin^2 t + 3))^T, \\ f_2 &= (y, 0)^T, \\ f_3 &= (x^2 y^3 \cos^2 t, x^3 y^4)^T, \\ f_4 &= (2y \sin t, 2x \sin t)^T, \\ r &= (\sin t(x^2 + y^2), \cos t(x^2 + y^2))^T. \end{aligned}$$

entonces

$$(x^\Delta, y^\Delta)^T = \varepsilon f_1 + \varepsilon^2 f_2 + \varepsilon^3 f_3 + \varepsilon^4 f_4 + \varepsilon^5 r.$$

Para  $\varepsilon > 0$  suficientemente pequeño y  $U$  una vecindad del origen, entonces para  $(x, y) \in \partial U$ , tenemos  $(x, y) \neq (0, 0)$ . Si  $(x, y) \in \partial U$  y  $y \neq 0$ , existe una vecindad  $N(\eta)$  de  $(x, y)$ , tal que

$$\left| \frac{1}{\varepsilon^2} y' + \frac{1}{\varepsilon} x'^2 y'^3 \cos^2(t) + 2y' \sin(t) \right| \geq |y'|$$

para algún  $(x', y') \in N(\eta)$ . Si  $(x, y) \in \partial U$  y  $x \neq 0$ , existe una vecindad  $N(\eta)$  de  $(x, y)$ , tal que

$$\left| \frac{1}{\varepsilon^3} x'^3 y'^2 (\sin^2(t) + 3) + \frac{1}{\varepsilon} x'^3 y'^4 + 2x' \cos(t) \right| \geq |x'|$$

para algún  $(x', y') \in N(\eta)$ . De acuerdo con el Teorema 5.18, consideremos la función promedio

$$F(y, \varepsilon) = \sum_{i=1}^k \frac{1}{T} \int_0^T \varepsilon^i f_i(s, y) \Delta s$$

donde

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \cos^2 t \Delta t &= \int_0^{\pi} \cos^2 t dt + \cos^2 t|_{t=\pi} = \frac{\pi}{2} + 1, \\ \int_0^{2\pi} \sin^2 t \Delta t &= \int_0^{\pi} \sin^2 t dt + \sin^2 t|_{t=\pi} = \frac{\pi}{2}, \\ \int_0^{2\pi} \sin t \Delta t &= \int_0^{\pi} \sin t dt + \sin t|_{t=\pi} = 2. \end{aligned}$$

Así, tenemos

$$F(x, y, \varepsilon) = \left( \varepsilon^2 y^2 + \varepsilon^3 x^2 y^3 \left( \frac{\pi}{2} + 1 \right) + 4\varepsilon^2 y, \varepsilon^3 x^3 y^2 \left( \frac{\pi}{2} + 3 \right) + \varepsilon^3 x^3 y^4 + 4\varepsilon^2 x \right)^T,$$

y  $F(0, 0, \varepsilon) = 0$ . Por lo tanto,  $\deg(F(\cdot, \varepsilon), U, 0) \neq 0$ .

Entonces todas las hipótesis del Teorema 5.18 se cumplen, lo que nos permite concluir que el sistema (5.28) tiene una solución  $2\pi$  periódica.



# Conclusiones

En esta tesis, hemos presentado dos problemas :

- (1) En el primer problema consideramos un sistema Hamiltoniano con dos grados de libertad con función potencial polinomial homogéneo de grado cinco y establecemos algunos resultados de la aplicación del método del promedio de primer y segundo orden. A partir de los grados de las partes homogéneas de tercer, cuarto y quinto grado exhibimos algunos ejemplos. Los principales resultados para este problema se resumen en las proposiciones del Capítulo 3 de esta tesis.
- (2) En el segundo problema hemos utilizado la técnica del método del promedio de segundo orden para establecer la existencia de familias de soluciones periódicas y su tipo de estabilidad en un sistema hamiltoniano con dos grados de libertad y con potencial polinomial de grado seis. Los principales resultados para este problema se resumen en los teoremas del Capítulo 4 de esta tesis.

Algunas limitaciones:

- (a) El método del promedio da información parcial sobre el número de familias periódicas del sistema hamiltoniano, específicamente garantiza una cota inferior para el número de soluciones periódicas.
- (b) Las regiones obtenidas vía el método del promedio de segundo orden son regiones óptimas a través del método, sin embargo, utilizando otras técnicas u otros cambios de variables podrán aparecer más familias de soluciones periódicas del sistema ver por ejemplo [63,11].

Algunas proyecciones:

- Estudiar sistemas hamiltonianos con grados de libertad mayor a dos.
- Utilizar otras técnicas u otros cambios de variables que permitan obtener nuevas soluciones periódicas de los sistemas estudiados.
- Estudiar existencia de soluciones periódicas cuando las regiones del parámetro son degeneradas (Jacobiano nulo de la función promedio).
- Dar respuesta si las regiones que garantizan existencia de soluciones periódicas para potenciales de la forma

$$V_3(x, y) = A x^3 + Bxy^2, V_5(x, y) = C x^5 + Dxy^4$$

son homeomorfas o no, para los correspondientes parámetros,  $A, B, C$  y  $D$ .

- Aplicar el teorema del promedio en time scale a sistemas Hamiltonianos

# Bibliografía

- [1] A. BUICA, AND J. LLIBRE, *Averaging methods finding periodic orbits via Brouwer degree*, Bulletin des Sciences Mathématiques, vol. 128, 1, pp. 7–22 (2004).
- [2] A. CASTRO, *Periodic orbits of mechanical systems with homogeneous polynomial terms of degree five*, Astrophysics and Space Science, vol. 361, 1, pp. 8, (2016).
- [3] A.E. LACOMBA AND J. LLIBRE, *Dynamics of a galactic Hamiltonian system*, Journal of Mathematical Physics, vol. 53, 7, pp. 9, (2012).
- [4] A. SLAVÍK, *Averaging dynamic equations on time scales*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, vol. 388, 2, pp. 996–1012, (2012).
- [5] C. LIZAMA AND J. G. MESQUITA , *Almost automorphic solutions of dynamic equations on time scales*, Journal of Functional Analysis, vol. 265, 10, pp. 2267–2311, (2013).
- [6] C. CHICONE, Ordinary differential equations with applications. Texts in Applied Mathematics, Springer, New York, 2006.
- [7] C.L. SIEGEL, J. MOSER, Lectures on celestial mechanics, Springer, New York, Grundlehren Math. vol. 187, 1971.
- [8] C.D. AHLBRANDT, M. BOHNER AND J. RIDENHOUR, *Hamiltonian Systems on time scales*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, vol. 250, 2, pp. 561–578, (2000).

- [9] C. WANG AND Y. LI, *Affine-periodic solutions for nonlinear differential equations on time scales*, Ordinary Differential Equations, vol. 46, 5, pp. 286–302, (2015).
- [10] D. CAMPOS AND J.F. ISAZA, *Prolegómenos a los Sistemas Dinámicos*, Universidad Nacional de Colombia, sede Bogotá, 2002.
- [11] D. CARRASCO, J. F. PALACIN, C. VIDAL, J. VIDARTE, AND P. YANGUAS, *Dynamics of axially symmetric perturbed Hamiltonians in 1:1:1 resonance*, J. Nonlinear Sci., vol. 28, 4, (2018).
- [12] DOŠLÝ, ONDŘEJ AND R. HILSCHER, *Roman Disconjugacy, transformations and quadratic functionals for symplectic dynamic systems on time scales*, Journal of Journal of Difference Equations and Applications, vol. 7, 2, pp. 265–295, (2001).
- [13] D. CARRASCO, M. URIBE, C. VIDAL, *Periodic orbits associated to Hamiltonian functions of degree four*, Journal of Nonlinear Mathematical Physics, vol. 21, 3, pp. 336–356, (2014).
- [14] D. CARRASCO AND C. VIDAL, *Periodic solutions, stability and non-integrability in a generalized Hénon-Heiles Hamiltonian system*, Journal of Nonlinear Mathematical Physics, vol. 20, 2, pp. 199–213, (2013).
- [15] E.R. KAUFMANN AND Y. N. RAFFOUL, *Periodic solutions for a neutral nonlinear dynamical equation on a time scale*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, vol 319, 1, pp. 315–325, (2006).
- [16] E. LACOMBA AND J. LLIBRE, *Dynamics of a galactic Hamiltonian system*, Journal of Nonlinear Mathematical Physics, vol. 53, 072901, 2012.
- [17] F. VERHULST, *Nonlinear differential equations and dynamical systems*, Universitext, Springer, 1991.
- [18] F. EL SABAA AND H.H. SHERIEF, *Periodic orbits of galactic motion*, Astrophysics and Space Science, vol. 167, 2, pp. 305–315, (1990).
- [19] F. ALFARO, J. LLIBRE AND E. PÉREZ., *Periodic orbits for a class of galactic potential*, Astrophysics and Space Science, vol. 344, 1, pp. 39–44, (2013).

- 
- [20] G. SH. GUSEINOV, *Integration on time scales*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, vol. 285, 1, pp. 107–127, (2003).
- [21] H. GOLDSTEIN, C. P. POOLE AND J. L. SAFKO, *Classical Mechanics*, Third Edition, Addison-Wesley, Reading (2001).
- [22] J. LLIBRE, R. RAMIREZ AND N. SADOVSKAIA, *Integrability of the constrained rigid body*, Nonlinear Dynamics, vol. 73, 4, 2273–2290, (2013).
- [23] J. LLIBRE, D. NOVAES AND M. A. TEIXEIRA, *Higher order averaging theory for finding periodic solutions via Brouwer degree*, Nonlinearity, vol. 27, 3, pp. 563–583 (2014).
- [24] J. LLIBRE, P. PASCA AND C. VALLS, *Periodic solutions of a galactic potential*, Chaos, Solitons & Fractals, vol. 61, pp. 38–43 (2014).
- [25] J. OZAKI AND S. KUROSAKI, *Periodic orbits of Hénon Heiles Hamiltonian*, Progress of Theoretical Physics, vol. 95, 3, pp. 519–529, (1996).
- [26] J. GINÉ, M. GRAU AND J. LLIBRE, *Averaging theory at any order for computing periodic orbits*, Physica D. Nonlinear Phenomena, vol. 250, pp. 58–65, (2013).
- [27] J. GINÉ, J. LLIBRE, K. WU, X. ZHANG, *Averaging methods of arbitrary order, periodic solutions and integrability*, Journal of Differential Equations, vol. 260, 5, pp. 4130–4156, (2016).
- [28] J.A. SANDERS, F. VERHULST AND J. MURDOCK, *Averaging Methods in Nonlinear Dynamical Systems*, Springer, Second edition, 2007.
- [29] J.F. PALACIÁN, C. VIDAL, J. VIDARTE, AND P. YANGUAS, *Periodic solutions and KAM tori in a triaxial potential*, SIAM Journal on Applied Dynamical Systems, vol. 16, 1, pp. 159–187, (2018).
- [30] J. LLIBRE, R. MOECKEL AND C. SIMÓ, *Central Configurations, Periodic Orbits, and Hamiltonian Systems*, Birkhäuser, 2015.
- [31] J. MARTÍNEZ, *Mecánica Analítica*, Paraninfo, Madrid 1986.

- [32] J. OYARCE, Método del promedio aplicado a ecuaciones diferenciales ordinarias. Tesis, Bio-Bio, Chile, 2016.
- [33] J.A. SANDERS AND F. VERHULST, Averaging method in nonlinear dynamical systems, Applied Mathematical Sciences, vol. 59, Springer, 1985.
- [34] J. LLIBRE, R. MARTINEZ, C. SINÉ, Ordinary Differential Equations, vol. 58, (1985).
- [35] J.L.G. GUIRAO, J. LLIBRE AND J.A. VERA, *Generalized van der Waals Hamiltonian: periodic orbits and  $C^1$  nonintegrability*, Physical Review E, vol. 85, (2012).
- [36] J.L.G. GUIRAO, J. LLIBRE AND J.A. VERA, *Periodic orbits of a perturbed 3-dimensional isotropic oscillator with axial symmetry*, Nonlinear Dynamics, vol. 83, 1 – 2, pp.839–848 (2016).
- [37] J. LLIBRE, A. MAKHLOUF, *Periodic orbits of the generalized Friedmann-Robertson-Walker Hamiltonian systems*, Astrophysics and Space Science, vol. 344, pp. 45–50, 2013.
- [38] K.R. MEYER, J.F. PALACIÁN AND P. YANGUAS, *Singular reduction of resonant Hamiltonians*, Nonlinearity, vol. 31, 6, pp. 2854–2894, (2018).
- [39] L. JIMÉNEZ AND J. LLIBRE, *Periodic orbits and non integrability of Henon-Heiles systems*, J. Phys. A Journal of Physics. A, vol. 44, 20, pp. 14, (2011).
- [40] L. ADAMEC, *A remark on matrix equation  $x^\Delta(t) = A(t)x$  on small time scales*, Computers & Mathematics with Applications, vol. 10, pp. 1107–1117, (2004).
- [41] L. JIMÉNEZ AND J. LLIBRE., *Periodic orbits and nonintegrability of generalized classical Yang-Mills Hamiltonian systems*, Journal of Mathematical Physics, vol. 52, 3, pp. 9, (2011).
- [42] M.A. ALMEIDA, I.C. MOREIRA, AND H. YOSBIDA, *On the non-integrability of the Störmer problem*, Journal of Physics, vol. 25, 5, pp. 227–230, (1992).

- [43] M.T. DE BUSTOS, J.L.G. GUIRAO, J. LLIBRE AND J.A. VERA, *New families of periodic orbits for a galactic potential*, Chaos, Solitons & Fractals, vol. 82, 3, pp. 97–102, (2016).
- [44] M. BOHNER, AND A. PETERSON, Dynamic Equations on time scales. (English summary) An Introduction with Applications, Birkhäuser Boston, pp. ISBN: 0-8176-4225-0, 2001.
- [45] M. CORBERA, J. LLIBRE AND C. VALLS , *Periodic motion in perturbed elliptic oscillators revisited*, Astrophysics and Space Science, vol. 361, 10, pp. 8, (2016).
- [46] M. ADIVAR AND Y.N. RAFFOUL, *Existence results for periodic solutions of intego-dynamic equations on time scales*, Annali di Matematica Pura ed Applicata, vol. 188, 4, pp. 543–559, (2009).
- [47] M. BOHNER AND G. SH. GUSEINOV, *Partial differentiation on time scales*, Dynamic Systems and Applications, vol. 13, 3-4, pp. 351–379, (2004).
- [48] M. BOHNER AND A. PETERSON , *Advances in Dynamic Equations on Time Scales*, Birkhauser, Boston, 2003.
- [49] M.M. DESSOKY, A.A. ELMANDOUH, AND A. HOBINY, *Periodic orbits of the generalized Friedmann-Robertson-Walker potential in galactic dynamics in a rotating reference frame*, Citation: AIP Advances 7, 035021, (2017).
- [50] M. HÉNON AND C. HEILES, *The applicability of the third integral of motion: some numerical experiments*, The Astronomical Journal, vol. 69, pp. 73–84, (1964).
- [51] N. CARANICOLAS AND H. VARVOGLIS, *Families of periodic orbits in a quartic potential*, Astronomy & Astrophysics, 141, 383–388, (1984).
- [52] N.A. LEMOS, *Mecánica Analítica*, Sau Paulo: Editorial Livraria da Física, 2007.
- [53] N.N. BOGOLIUBOV, *On some statistical methods in mathematical physics*, Izv. vo Akad. Nauk Ukr. SSR, Kiev, 1945.
- [54] N.N. BOGOLIUBOV AND Y. A. MITROPOLSKI, *Asymptotic Methods in the Theory of Non-Linear Oscillations*, New York: Gordon and Breach, 1961.

- [55] N.N. BOGOLIUBOV AND N. KRYLOV, The application of methods of nonlinear mechanics in the theory of stationary oscillations, Publ. vol. 8 of the Ukrainian Acad. Sci. Kiev, 1934.
- [56] P. FATOU, *Sur le mouvement d'un système soumis à des forces à courte période*, Bulletin de la Société Mathématique de France, vol 56, pp. 98–139, (1928).
- [57] R. HILSCHER, V. ZEIDAN, *Reid roundabout theorems for time scale symplectic systems*, World Scientific Publishing, pp. 267–288, (2010).
- [58] R.D. EUZEBIO AND J. LLIBRE, *Periodic solutions of El Niño model through the Vallis differential systems*, Discrete and Continuous Dynamical Systems, vol. 35, 9, pp. 3455–3469, (2014).
- [59] R. ABRAHAM AND J.E. MARSDEN, *Foundations of Mechanics*, 2nd edition, 1967.
- [60] R. GUO, Y. LI, J. XING AND X. YANG, *Existence of periodic solutions of dynamic equations on time scales by averaging*, Discrete and Continuous Dynamical Systems-Series, vol. 10, 5, pp. 959–9710, (2017).
- [61] S. FERRER, H. HANSSMANN, J. PALACIÁN AND P. YANGUAS *On perturbed oscillators in 1–1–1 resonance: the case of axially symmetric cubic potentials*, Journal of Geometry and Physics, vol. 40, 3-4, pp. 320–369, (2002).
- [62] S. HILGER, *Analysis on measure chains - a unified approach to continuous and discrete calculus*, Results in Mathematics, vol. 18, 1–2, pp. 18–56, (1990).
- [63] T. DE ZEEUW, *Motion in the core of a triaxial potential*, Royal Astronomical Society. Monthly Notices, vol. 215, 4, 731–760 (1985).
- [64] V. I. ARNOLD, *Méthodes mathématiques de la mécanique classique*, Editions Mir, 1976.
- [65] Y. GUO AND C. RAGAZZO, *On Steady States in a Collisionless Plasma*, Communications on Pure and Applied Mathematics, vol. 49, 11, pp. 1145, (1996).

- 
- [66] Y. LI AND C. WANG, *Almost periodic functions on time scales and applications*, Discrete Dynamics in Nature and Society, vol. 20, (2011).