UNIVERSIDAD CATÓLICA DE LA SANTÍSIMA CONCEPCIÓN
FACULTAD DE EDUCACIÓN – FACULTAD DE INGENIERÍA
MAGÍSTER EN DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA

TRATAMIENTO DE LA INECUACIÓN EN EL CONTEXTO ESCOLAR DE CHILE Y RUSIA.

POR: YERKA VANESSA MONJE FERNÁNDEZ

DIRECTORA DE TESIS:
DRA. MARÍA JOSÉ SECKEL SANTIS

TESIS PARA OPTAR AL GRADO DE MAGÍSTER EN DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA

CONCEPCIÓN, AGOSTO DE 2017

ÍNDICE

Resumen	7
Introducción	9
CAPÍTULO I: ÁREA PROBLEMÁTICA Y ANTECEDENTES	12
1.1. Antecedentes curriculares	12
1.2. Resultados pruebas internacionales	17
1.3. Objetivos de investigación	21
CAPÍTULO II: FUNDAMENTO DEL ESTUDIO	22
2.1. Significado de la inecuación	22
2.2. La enseñanza de la inecuación y sus implicaciones	28
2.2.1. Errores	28
2.2.1.1 Error de tipo gráfico	29
2.2.1.2 Error en la simbología	30
2.2.1.3 Error en la interpretación de soluciones	30
2.2.2. Mirada didáctica	30
2.3. Idoneidad epistémica como herramienta para el análisis del curriculum de matemática	33
2.3.1 Criterio I: Representatividad de los campos de problemas Propuestos	34
2.3.2 Criterio II: Tipo de representaciones activadas en el planteamiento y solución de las tareas	35
2.3.3 Criterio III: Conocimiento previos a la introducción de la inecuación	35
2.3.4 Criterio IV: representatividad de los significados institucionales pretendidos (o implementados) respecto del significado global de referencia	37
2.4. Esquema de complejidad del objeto matemático inecuación	37

CAPÍTULO III: METODOLOGÍA DE INVESTIGACIÓN 40
3.1. Enfoque metodológico 40
3.2. Fases de la investigación 40
3.3. Técnica de análisis 42

CAPÍTULO IV: ANÁLISIS DE RESULTADOS 44
4.1 Análisis de planes y programas chilenos 45
4.2 Análisis de textos escolares chilenos 57
4.2.1. Actividades propuestas en cuarto año básico 59
4.2.2. Actividades propuestas en quinto año básico 60
4.2.3. Actividades propuestas en sexto año básico 62
4.2.4. Actividades propuestas en séptimo año básico 63
4.2.5. Actividades propuestas en octavo año básico 67
4.2.6. Actividades propuestas en primer año medio 72
4.2.7. Actividades propuestas en segundo año medio 74
4.2.8. Actividades propuestas en tercer año medio 76
4.2.9. Actividades propuestas en cuarto año medio 77
4.3. Análisis de textos escolares rusos 82
4.4. Comparación de los resultados 88
4.4.1. Comparación entre curriculum chileno y textos escolares Chilenos 88
4.4.2. Comparación entre textos escolares chilenos y textos escolares rusos 90

CAPÍTULO V: CONCLUSIONES 93

REFERENCIAS 96

ÍNDICE DE TABLAS Y FIGURAS

Tabla 1: Resultados obtenidos en el diagnóstico 14

Figura 1: Pregunta 11 13

Figura 2: Pregunta 12 y 13 13

Figura 3: Ejercicios de funciones 15

Figura 4: Ejercicios de funciones 2 16

Figura 5: Ejercicios de funciones 3 16

Figura 6: Resultado en prueba de octavo año básico en matemática 17

Figura 7: Preguntas de la prueba de octavo año básico en matemática 18

Figura 8: Gráficos por eje de la prueba de octavo año básico en matemática 18

Figura 9: Tabla de puntajes de la prueba de octavo año básico en matemática 19

Figura 10: Gráfico de puntajes de la prueba de octavo año básico en matemática 19

Figura 11: Puntajes en Prueba de matemática 20

Figura 12: Esquema cíclico de desigualdad e inecuaciones 32

Figura 13: Esquema concepto de inecuaciones 33

Figura 14: Esquema de complejidad de la inecuación 38

Figura 15: Objetivos de aprendizaje relacionados con la inecuación. 46

Figura 16: Actividad propuesta en el currículum de cuarto básico. 47

Figura 17: Actividad propuesta en el currículum de séptimo básico. 48

Figura 18: Segunda actividad propuesta en el currículum de séptimo básico 48

Figura 19: Actividad propuesta en el currículum de octavo básico 49

Figura 20: Segunda actividad propuesta en el currículum de octavo básico 50

Figura 21: Tercera actividad propuesta en el currículum de octavo básico 50

Figura 22: Actividad propuesta en el currículum de segundo medio 51

Figura 23: Segunda actividad propuesta en el currículum de segundo medio 51

Figura 24: Tercera actividad propuesta en el currículum de segundo medio 52

Figura 25: Actividad propuesta en el currículum de tercero medio 53

Figura 26: Actividad propuesta en el currículum de tercero medio 54

Figura 27: Actividad propuesta en el currículum de cuarto medio 54

Figura 28: Segunda actividad propuesta en el currículum de cuarto medio 55

Figura 29: Esquema de complejidad comparado con el curriculum chileno 56

Figura 30: Contenidos de aprendizaje relacionados con la inecuación 58
Figura 31: Primera actividad propuesta en el texto escolar de cuarto básico 59
Figura 32: Segunda actividad propuesta en el texto escolar de cuarto básico 59
Figura 33: Tercera actividad propuesta en el texto escolar de cuarto básico 60
Figura 34: Primera actividad propuesta en el texto escolar de quinto básico 60
Figura 35: Segunda actividad propuesta en el texto escolar de quinto básico 61
Figura 36: Tercera actividad propuesta en el texto escolar de quinto básico 61
Figura 37: Cuarta actividad propuesta en el texto escolar de quinto básico 62
Figura 38: Primera actividad propuesta en el texto escolar de sexto básico 62
Figura 39: Segunda actividad propuesta en el texto escolar de sexto básico 63
Figura 40: Primera actividad propuesta en el texto escolar de séptimo básico 64
Figura 41: Segunda actividad propuesta en el texto escolar de séptimo básico 64
Figura 42: Tercera actividad propuesta en el texto escolar de séptimo básico 65
Figura 43: Cuarta actividad propuesta en el texto escolar de séptimo básico 66
Figura 44: Quinta actividad propuesta en el texto escolar de séptimo básico 66
Figura 45: Sexta actividad propuesta en el texto escolar de séptimo básico 67
Figura 46: Primera actividad propuesta en el texto escolar de Octavo básico 68
Figura 47: Segunda actividad propuesta en el texto escolar de Octavo básico 69
Figura 48: Tercera actividad propuesta en el texto escolar de Octavo básico 69
Figura 49: Cuarta actividad propuesta en el texto escolar de Octavo básico 70
Figura 50: Quinta actividad propuesta en el texto escolar de Octavo básico 71
Figura 51: Sexta actividad propuesta en el texto escolar de Octavo básico 71
Figura 52: Séptima actividad propuesta en el texto escolar de Octavo básico 72
Figura 53: Octava actividad propuesta en el texto escolar de Octavo básico 72
Figura 54: Primera actividad propuesta en el texto escolar de primero medio 73
Figura 55: Segunda actividad propuesta en el texto escolar de primero medio 74
Figura 56: Tercera actividad propuesta en el texto escolar de primero medio 74
Figura 57: Primera actividad propuesta en el texto escolar de segundo medio 75
Figura 58: Segunda actividad propuesta en el texto escolar de segundo medio 75
Figura 59: Tercera actividad propuesta en el texto escolar de segundo medio 76
Figura 60: Primera actividad propuesta en el texto escolar de tercero medio 76

Figura 61: Primera actividad propuesta en el texto escolar de cuarto medio 77
Figura 62: Segunda actividad propuesta en el texto escolar de cuarto medio 78
Figura 63: Tercera actividad propuesta en el texto escolar de cuarto medio 78
Figura 64: Cuarta actividad propuesta en el texto escolar de cuarto medio 78
Figura 65: Quinta actividad propuesta en el texto escolar de cuarto medio 79
Figura 66: Sexta actividad propuesta en el texto escolar de cuarto medio 79
Figura 67: Séptima actividad propuesta en el texto escolar de cuarto medio 79
Figura 68: Octava actividad propuesta en el texto escolar de cuarto medio 80
Figura 69: Novena actividad propuesta en el texto escolar de cuarto medio 80
Figura 70: Esquema de complejidad comparado con los textos escolares chilenos 81
Figura 71: Esquema de contenidos de inecuación en textos escolares rusos 82
Figura 72: Esquema de complejidad comparado con los textos escolares rusos 87

RESUMEN

En este trabajo se realizó un análisis del tratamiento de la inecuación en el contexto escolar de Chile y Rusia. En el caso de Chile, se indagó su tratamiento tanto en los planes y programas de estudio propuestos por el Ministerio de Educación, como en los textos escolares que distribuye gratuitamente dicha entidad y, en el caso de Rusia, se indagó su tratamiento a partir de los textos escolares. Se trata de una investigación exploratoria que sigue una metodología cualitativa, la que permitió determinar los objetivos de aprendizaje que se proponen para cada nivel, desde cuarto año básico hasta cuarto año medio en el caso de Chile (desde los 9 años hasta los 18 años) y desde la sexta clase hasta la undécima clase para el caso de Rusia (desde los 12 años hasta los 17 años). Asimismo, con la idea de profundizar el análisis, para el caso de Chile se muestra una selección de actividades extraídas de los planes y programas de estudio y de los textos escolares, lo que permite comprender con mayor profundidad el aprendizaje que se espera lograr en relación a la inecuación durante la formación escolar.

Cabe destacar que para lograr llevar a cabo el análisis, el estudio se propuso realizar una reconstrucción de la complejidad matemática de la inecuación, que corresponde a la suma de todos los componentes que tienen lugar en determinado objeto matemático y las conexiones que existen entre ellos (Rondero y Font, 2015). Para ello se hizo una revisión bibliográfica que dio lugar a una propuesta de complejidad matemática de la inecuación que sirvió de referente a la hora de analizar su tratamiento en el contexto escolar de Chile y Rusia.

Dentro de los hallazgos revelamos la presencia quiebres en la progresión de la enseñanza de la inecuación en el contexto escolar chileno y, además, se evidencia que el tratamiento que se le da a dicho objeto no contempla su complejidad, dejando de lado algunos de sus componentes. Por el contrario, al analizar el contexto escolar de Rusia, se observa que han contemplado todos los componentes de la complejidad matemática de la inecuación a través de una propuesta de enseñanza progresiva.

ABSTRACT

In this research, an analysis of the treatment of inequality in the Chilean and Russian school contexts was carried out. In the case of Chile, its treatment was investigated both: the curriculum, through its plans and programs proposed by the Ministry of Education, and the Chilean school distributed free of charge by that institution. In the case of Russia, its treatment was investigated from the school texts.

It has been decided to work on an exploratory research that follows a qualitative methodology, which allowed to determine the learning objectives that are proposed for each level: in the case of Chile, from fourth grade of primary school to twelfth grade of high school (from 9 to 18 years old); and in the case of Russia, from sixth grade of middle school to the eleventh grade of high school (from 12 to 17 years old). Furthermore, to go further into the analysis, a selection of activities drawn from the Chilean curriculum and textbooks, will allow to deeply understand the learning that is expected to be achieved in relation to inequality during school education.

It is noteworthy that in order to carry out the analysis, the research proposed a reconstruction of the mathematical complexity of inequality, corresponding to the sum of all the components that take place in a certain mathematical object and the connections that exist between them (Rondero and Font, 2015). For this purpose, a bibliographic review was carried out, which then led to a proposal of mathematical complexity of the inequality that served as a reference when analyzing its treatment in the Chilean and Russian school contexts.

Within the findings, we reveal the presence of breakdowns in the progression of the teaching of inequality in the Chilean school context. Moreover, it is clear that the treatment given to this object does not contemplate its complexity, leaving aside some of its components. On the contrary, when analyzing the Russian school context, it is observed that they have considered all the components of the mathematical complexity of the inequality through a proposal of progressive education.

INTODUCCION

En los últimos años el Ministerio de Educación chileno ha realizado ajustes en el currículum de matemática que son importantes de analizar. La pertinencia en el tratamiento de determinados objetos matemáticos o la progresión de estos para su enseñanza, son focos de interés en diversas investigaciones (por ejemplo: Vásquez, 2014; Rivas, 2014).

Las modificaciones del currículum chileno comenzaron desde el 2009 con los niveles de tercer y cuarto año medio. Específicamente, en cuarto año medio se presenta la unidad de inecuaciones, tanto lineales como sistema de inecuaciones. Luego se continuaron con los ajustes de primer y segundo año medio el año 2011, donde no se implementa ninguna unidad de inecuaciones. Posterior a eso los de cuarto año básico hasta sexto año básico en el 2012, es en estos donde los cambios se vuelven relevantes para este trabajo de investigación, debido a que en estos ajustes se incluyeron contenidos de álgebra como inecuaciones. Estos ajustes se volvieron hacer presentes en el 2016 para séptimo y octavo año básico, donde las inecuaciones continúan como una unidad nueva.

Este contexto de cambios, en conjunto con mis estudios de postgrado en el ámbito de la didáctica de la matemática, despertó en mí, la curiosidad por indagar sobre la incorporación de la inecuación en distintos niveles de la educación escolar chilena, es decir, me interesé por analizar si los cambios que se estaban implementando contemplaban la complejidad y progresión (en cuanto al grado de dificultad) del objeto matemático en cuestión. Todo esto, con el propósito de visualizar si en un futuro el estudiantado podrá mejorar, o no, sus resultados académicos respecto a la comprensión de la inecuación.

Como antecedente se observaba, a partir de datos internos de la Universidad Católica de la Santísima Concepción, que los estudiantes de primer año de ingeniería evidenciaban un bajo dominio del conocimiento de la inecuación, lo que se presentará con más detalles en el capítulo 1 de este estudio. Por otra parte, los resultados nacionales en pruebas internacionales como TIMMS (2011); Trends in International Mathematics and Science Study, y PISA (2015); Programme for International Student, muestran que los resultados más bajos radican en el eje de álgebra, siendo la inecuación un objeto matemático que evidencia dificultades de comprensión.

Todo lo anterior, llevó a determinar que el punto de partida de este estudio debía ser la reconstrucción de la inecuación como un objeto matemático complejo que contempla el aprendizaje de diversos componentes y las relaciones entre ellos para conseguir una óptima comprensión de éste (Rondero y Font, 2015). Solo a partir de dicha reconstrucción sería posible desarrollar un análisis de tipo cualitativo, que exploró en primera instancia el tratamiento de la inecuación en el contexto escolar chileno y, a la vez, surgió el interés por analizar otro contexto escolar que evidenciara mejores resultados, como lo son las pruebas estandarizadas PISA y TIMMS, en la comprensión del objeto matemático en estudio, por lo que se decidió analizar el contexto escolar de Rusia, esto debido a que Rusia posee mejores resultados en las pruebas internacionales que Chile, en TIMMS lo supera por 123 puntos y en PISA por 71 puntos.

Este análisis se estructura considerando los siguientes capítulos:

En el capítulo I se presenta la situación problemática y se justifica la importancia de su estudio a partir de los antecedentes de lo manifestado en diferentes artículos de investigación en relación a las desigualdades e inecuaciones, las dificultades en el aprendizaje de estas y de los diferentes resultados que ha obtenido Chile y Rusia en las pruebas internacionales, donde se muestra gráficamente la diferencia entre los dos países, en el cual Rusia posee mejores resultados en ambas pruebas TIMMS y PISA, así como la importancia que tiene el estudio de la inecuación en las asignaturas de primer año de universidad en carreras del área matemática y los resultados y dificultades que los alumnos han presentado.

El marco teórico, que se desarrolla en el capítulo II, presenta un análisis histórico de las diferentes definiciones que se le ha dado a las inecuaciones. A la vez, se presenta la idea de idoneidad epistémica que propone el enfoque ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática (EOS) donde surge, entre otras cosas, la idea de complejidad matemática de un objeto determinado.

A continuación, en el capítulo IV se plantea el marco metodológico que guio el proceso de estudio, el que siguió una metodología cualitativa, a través de la técnica de análisis de contenido.

En el análisis de resultados, presentados en el capítulo V, se mostrará, en primer lugar, lo observado en el curriculum chileno, a través de esquemas donde se dan a conocer los objetivos de aprendizaje declarados en cada nivel, imágenes de las sugerencias de actividades y su comparación con el esquema de complejidad matemática de la inecuación. En segundo lugar,se mostrará lo observado en los textos escolares chilenos y, finalmente, los resultados obtenidos en el análisis de los textos escolares rusos.

Finalmente, en el capítulo VI se presentan las conclusiones del estudio sobre como tratan el objeto matemático inecuaciones a través de su esquema de complejidad en Chile y Rusia las que permiten proyectar futuros estudios y las dificultades que se presentaron en la elaboración de este estudio.

Es importante destacar que este estudio comenzó el año 2015, cuando aún no se implementaban los ajustes curriculares de séptimo y octavo año básico lo que hacía aún más preocupante la situación. Esto debido a que los alumnos solo veían desigualdades e inecuaciones formalmente en cuarto año medio, lo que dificultaba el aprendizaje de aquellos contenidos donde se necesitaba utilizar las inecuaciones, como es el caso de las funciones, sin embargo a partir de 2016 se incorpora el estudio de la inecuación por lo que el estudio se ve en la necesidad de indagar en la propuesta en marcha.

CAPÍTULO 1

ÁREA PROBLEMÁTICA Y ANTECEDENTES

El rol de las desigualdades y de las inecuaciones es fundamental en la ciencia y tecnología. Estos objetos matemáticos están íntimamente ligados al concepto de aproximación. El gran matemático y filósofo inglés Russell (citado en Steffens, 2006, p.20) indicó lo siguiente: "Toda ciencia exacta es dominada por la idea de aproximación". Cada vez que uno computa, uno aproxima y cada vez que uno aproxima, uno compara y es ahí donde entran en juego las desigualdades e inecuaciones.

En la vida cotidiana también es de suma importancia saber comparar números para tomar decisiones, por ejemplo, para ver qué tasa de interés nos conviene al pedir un préstamo, o en el solo hecho de comprar un auto, ya que nos ayuda a comparar el rendimiento en carretera o en ciudad; cantidad de puertas; espacio en el maletero, etc. Por ello se puede concluir que la comparación de números, las desigualdades y las inecuaciones deben formar parte del conocimiento matemático que todo ciudadano debe saber. Paulos (1990), en su libro "El hombre anumérico", presenta problemas para entender la matemática en el contexto de la vida cotidiana. A partir de ejemplos y casos reales, explica cómo el común de los ciudadanos tiende a malinterpretar lo que ve y oye. Además, insiste en la importancia del conocimiento matemático (mínimo) que cada persona debe tener y hace varias propuestas para mejorar tal entendimiento. Él introdujo el término anumerismo (innumerancy, en inglés) que significa la incapacidad de comprender conceptos matemáticos aplicados en la vida cotidiana, dentro de estos ejemplos presenta algunos relacionados con las desigualdades e inecuaciones cotidianas.

1.1.ANTECEDENTES CURRICULARES.

En relación a lo anterior, cuando analizamos el curriculum escolar chileno, vemos que en la educación básica y media se pone bastante énfasis en la enseñanza de las igualdades, identidades y ecuaciones. Sin embargo, no pasa lo mismo con las desigualdades e inecuaciones (como puede constatarse más adelante en el análisis realizado), lo que resulta preocupante de acuerdo a lo que plantean Cerda, Pérez, Ortega, Lleujo y Sanhueza (2011), quienes consideran que enseñar un objeto matemático de manera progresiva permite mejorar el nivel de competencia matemática.

De manera general se puede observar que dentro del curriculum nacional se considera el estudio de la inecuación, sin embargo, es el adecuado, a pesar de ello los resultados que presentan los alumnos de primer año de universidad no muestran una buena apropiación de dicho aprendizaje, un ejemplo estadístico es en la Universidad Católica de la Santísima Concepción, donde a 374 alumnos de Ingeniería que cursan Cálculo I, se les aplicó un diagnóstico en el año 2014, donde se presentaron tres preguntas relacionadas con intervalos o inecuaciones. El análisis de los resultados es desalentador, ya que ninguna de las preguntas supera el 60% de aprobación por partes de los alumnos, a pesar que dos de ellas solo trataban de la noción de intervalo, y la que tiene que ver directamente con el tema de inecuaciones no alcanza a superar el 10% de aprobación.

Las preguntas aplicadas en dicho diagnóstico son las siguientes:

P11. La inecuación $\frac{1}{x} < 2$ tiene como conjunto solución a

(a) $S = \left]-\infty, 0\right[\cup \left]\frac{1}{2}, +\infty\right[$

(b) $S = \left]\frac{1}{2}, +\infty\right[$

(c) $S =]-\infty, 1]$

(d) $S = \mathbb{R} - \{0\}$.

Figura 1. Pregunta 11
Fuente: Prueba a universitarios de primer año de ingeniería UCSC

P12. El número más pequeño del conjunto $[0, 1[$ es

(a) 0.0001 (b) 1 (c) $-\infty$ (d) 0.

P13. El conjunto $]0, 2[$ contiene a todos los números reales x tal que

(a) $x = 0,\ x = 1,\ x = 2$

(b) $x = 1$

(c) $x \neq \frac{1}{2}$

(d) $0 < x < 2$.

Figura 2. Pregunta 12 y 13
Fuente: Prueba a universitarios de primer año de ingeniería UCSC

A continuación, en la tabla 1, se presentan los resultados obtenidos en las preguntas presentadas en la figura 1 y 2.

Tabla 1
Resultados obtenidos en el diagnóstico

Preguntas	Nº buenas	% aprobación
P 11	35	9,4
P 12	201	53,7
P 13	198	52,9

Fuente: elaboración propia.

Con estos bajos resultados queda en evidencia el poco manejo que tienen los alumnos al momento de ingresar a la universidad de intervalos, desigualdades e inecuaciones.
Garrote, Hidalgo y Blanco (2004) describen una realidad similar a la presentada, donde se observan errores y dificultades por parte del estudiantado de Bachillerato en relación al estudio de las desigualdades e inecuaciones, muchos de los cuales se repiten año tras año en el contexto español. Ello nos ha motivado a estudiar comprendiendo que el currículum ha tenido modificaciones, entonces te pareció necesario analizar el tratamiento que se le dio a la inecuación en este contexto de cambio.

En el curso de Cálculo I de las universidades e institutos técnicos generalmente se comienza con la definición axiomática del conjunto de los números reales $\mathbb{R}$ como un cuerpo ordenado completo, ver por ejemplo Kitchen (1986), Stewart (2002). Una vez que se han enunciado los axiomas de orden, es común pedir a los estudiantes que demuestren algunos hechos básicos de las desigualdades (por ejemplo, que $a^2 + b^2 \geq 2ab$ para todo $a, b \in \mathbb{R}$). Por la falta de entrenamiento en el trabajo de desigualdades, es común que los estudiantes justifiquen estas propiedades mediante la evaluación de unos cuantos valores de las variables.

Posteriormente, en el curso de Cálculo I se estudian métodos de resolución de inecuaciones lineales, cuadráticas, con polinomios, racionales y con valor absoluto. Al estudiar funciones y en particular al calcular los dominios de funciones se emplean dichos métodos. Esto puede verse en los siguientes problemas, figura 3, del libro Demidovich (1967) que es usado en varias universidades:

Determinar el campo de existencia de las siguientes funciones:

11. a) $y=\sqrt{x+1}$; b) $y=\sqrt[3]{x+1}$.

12. $y=\frac{1}{4-x^2}$.

13. a) $y=\sqrt{x^2-2}$; b) $y=x\sqrt{x^2-2}$.

14**. $y=\sqrt{2+x-x^2}$.

15. $y=\sqrt{-x}+\frac{1}{\sqrt{2+x}}$.

16. $y=\sqrt{x-x^3}$.

17. $y=\lg\frac{2+x}{2-x}$.

18. $y=\lg\frac{x^2-3x+2}{x+1}$.

19. $y=\operatorname{arc\,cos}\frac{2x}{1+x}$.

20. $y=\operatorname{arc\,sen}\left(\lg\frac{x}{10}\right)$.

21. $y=\sqrt{\operatorname{sen} 2x}$.

Figura 3. Ejercicios de funciones
Fuente: Demidovich (1967)

Para hallar los dominios de las funciones se tiene que resolver: la inecuación lineal: $x+1\geq 0$; las inecuaciones cuadráticas: $x^2-2\geq 0$, $2+x-x^2\geq 0$; la inecuación cúbica: $x-x^3\geq 0$; el sistema de ecuaciones lineales: $-x\geq 0$ y $2+x>0$; las inecuaciones racionales: $\frac{2+x}{2-x}>0$, $\frac{x^2-3x+2}{x+1}>0$, $-1\leq\frac{2x}{1+x}\leq 1$; la inecuación logarítmica: $-1\leq \ln\frac{x}{10}\leq 1$; y la inecuación trigonométrica: $\sin 2x\geq 0$.

Esto también puede verse en los siguientes problemas, imagen, del texto Stewart (2002). Figura 4.

23–27 Encuentre el dominio de la función.

23. $f(x) = \dfrac{x+2}{x^2-1}$

24. $f(x) = \dfrac{x^4}{x^2+x-6}$

25. $g(x) = \sqrt[4]{x^2-6x}$

26. $h(x) = \sqrt[4]{7-3x}$

27. $f(t) = \sqrt[3]{t-1}$

28. Encuentre el dominio, la imagen y trace la gráfica de la función $h(x) = \sqrt{4-x^2}$.

29–40 Encuentre el dominio y trace la gráfica de la función.

29. $f(x) = 3 - 2x$

30. $f(x) = x^2 + 2x - 1$

31. $g(x) = \sqrt{x-5}$

32. $g(x) = \sqrt{6-2x}$

Figura 4. Ejercicios de funciones 2
Fuente: Stewart (2002).

Al igual que en los siguientes problemas, que muestran la figura 5, del libro Kitchen (1986).

3. **Hallar los dominios de las funciones siguientes.**

a) $f(x)=\dfrac{x}{x^2-1}$

b) $f(x)=\sqrt{x(x-1)(x-2)}$

c) $f(x)=\sqrt{\dfrac{x}{x^2-1}}$

d) $f(x)=\sqrt{\operatorname{sen} x}$

e) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{|x|-x}}$

f) $f(x)=\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{2}\cos x\right)$

g) $f(x)=\sqrt{x-1}+\dfrac{1}{\sqrt{2-x}}$

Figura 5. Ejercicios de funciones 3
Fuente: Kitchen (1986)

Es importante notar que los cursos universitarios de Cálculo I, II y III requieren que los estudiantes sepan comparar números, manipular desigualdades y resolver inecuaciones con distintos tipos de funciones. Por ejemplo, al definir límites mediante el lenguaje ε-δ, al mostrar la existencia de límites (en particular usando el teorema del sandwich); al estudiar si una función es acotada, monótona, y convexa; al hallar máximos y mínimos, etc.

1.2. RESULTADOS PRUEBAS INTERNACIONALES

Si se quiere saber cuál es el nivel matemático de Chile frente a otros países tenemos las pruebas internacionales de referencia como son TIMMS y PISA, donde nos presentan en sus informes, estadísticas comparativas de todos los países que realizan la evaluación.

Dentro de estas pruebas podemos analizar los resultados de TIMMS (2011), aplicada a octavo años básicos, donde chile presenta los siguientes resultados:

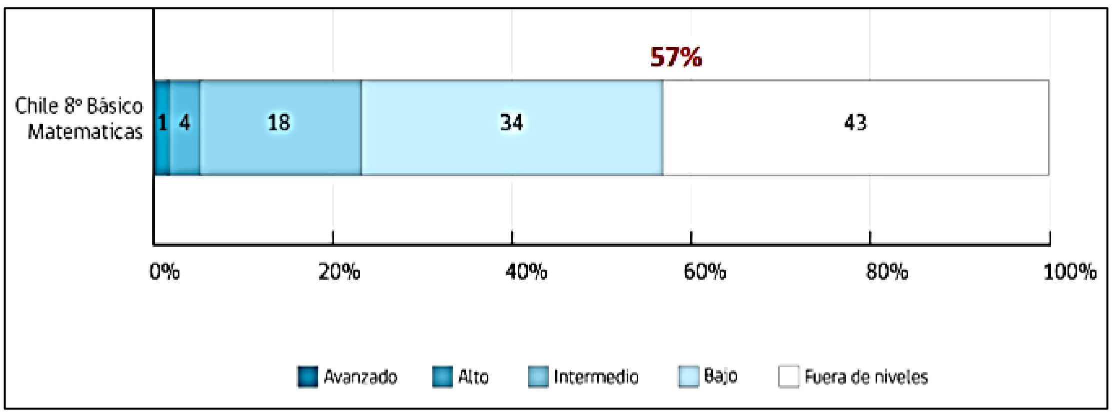


Figura 6. Resultado en prueba de octavo año básico en matemática
Fuente: TIMMS (2011)

Estos resultados nos muestran en la figura 6, que un 57% de los alumnos de octavo año básico en chile no logran llegar al nivel intermedio de la evaluación, lo que implica que su nivel es muy inferior a lo esperado. En cuanto a lo que se plantea en esta investigación hay preguntas relacionadas con desigualdades e inecuaciones puntualmente y sus niveles de logro (ver figura 7).

Escribe un número que sea mayor que 5 y menor que 6.

Respuesta: _____________

Dominio de contenido	Dominio cognitivo	Respuesta correcta	Nivel de desempeño
Números	Conocimiento	Ver pauta de corrección	Alto

¿Cuál de estos números es el que está más cerca de 10?

Ⓐ 0,10

Ⓑ 9,99

Ⓒ 10,10

Ⓓ 10,90

Dominio de contenido	Dominio cognitivo	Respuesta correcta	Nivel de desempeño
Números	Conocimiento	B	Alto

Resuelve esta desigualdad.

$9x - 6 < 4x + 4$

Respuesta: _____________

Dominio de contenido	Dominio cognitivo	Respuesta correcta	Nivel de desempeño
Álgebra	Conocimiento	Ver pauta de corrección	Sobre avanzado

Figura 7. Preguntas de la prueba de octavo año básico en matemática
Fuente: TIMMS (2011)

Las preguntas que se plantean en la prueba TIMMS (2011) del contenido no obtuvieron buenos resultados, esto se puede comprobar en la siguiente figura 8, donde muestra que el eje de álgebra es el que obtuvo un menor puntaje, al igual que el eje de números que tiene relación con las dos primeras preguntas presentadas en la figura 7.

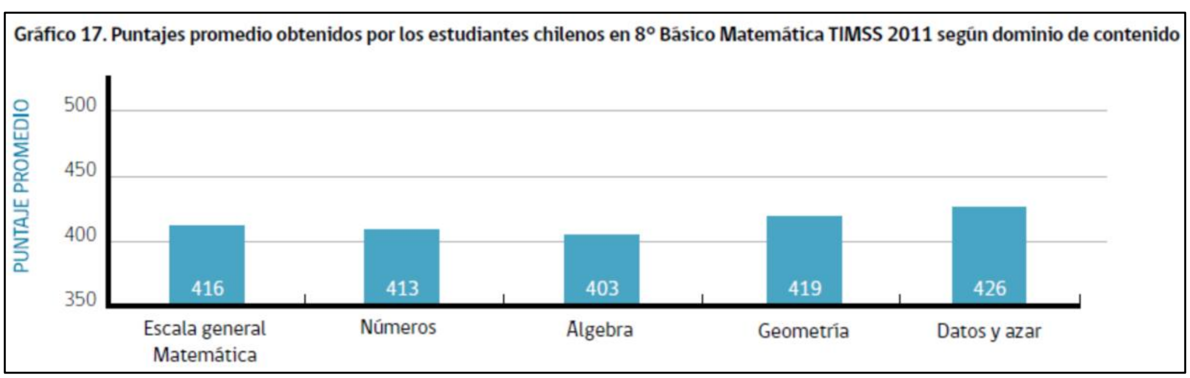


Figura 8. Gráficos por eje de la prueba de octavo año básico en matemática
Fuente: TIMMS (2011)

Respecto a otros países Chile se encuentra bajo el puntaje establecido por la escala de TIMMS y tenemos países con resultados sobre este puntaje como lo son Corea del Sur, Singapur, Japón, Rusia, Finlandia, entre otros (como se puede apreciar en la figura 9 y el figura 10).

País	Puntaje promedio*	País	Puntaje promedio*	País	Puntaje promedio*
Corea del Sur	613 ↑	**Centro de la escala TIMSS**	**500**	Tailandia	427 ↓
Singapur	611 ↑	Italia	498	Macedonia	426 ↓
China Taipei	609 ↑	Nueva Zelandia	488 ↓	Túnez	425 ↓
Hong Kong SAR	586 ↑	Kazajistán	487 ↓	**Chile**	**416 ↓**
Japón	570 ↑	Suecia	484 ↓	Irán	415 ↓
Rusia	539 ↑	Ucrania	479 ↓	Qatar	410 ↓
Israel	516 ↑	Noruega	475 ↓	Barëin	409 ↓
Finlandia	514 ↑	Armenia	467 ↓	Jordania	406 ↓
Estados Unidos	509 ↑	Rumania	458 ↓	Palestina	404 ↓
Inglaterra	507	Emiratos Árabes Unidos	456 ↓	Arabia Saudita	394 ↓
Hungría	505	Turquía	452 ↓	Indonesia	386 ↓
Australia	505	El Líbano	449 ↓	Siria	380 ↓
Eslovenia	505 ↑	Malasia	440 ↓	Marruecos	371 ↓
Lituania	502	Georgia	431 ↓	Omán	366 ↓
				Ghana	331 ↓

Figura 9. Tabla de puntajes de la prueba de octavo año básico en matemática
Fuente: TIMMS (2011)

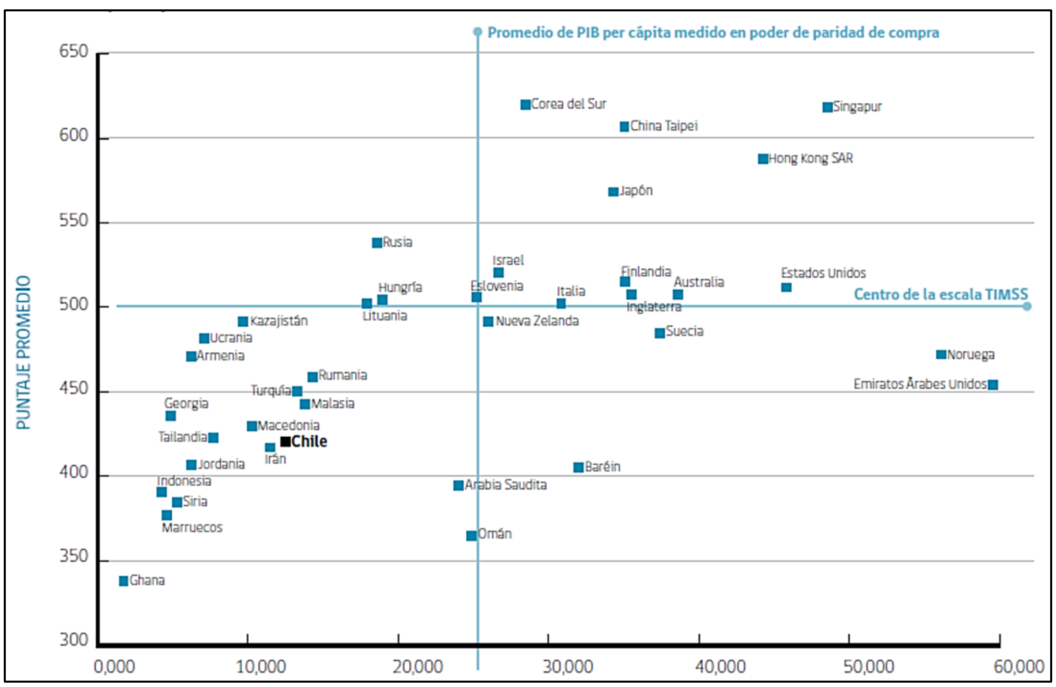


Figura 10. Gráfico de puntajes de la prueba de octavo año básico en matemática
Fuente: TIMMS (2011)

Ahora bien, si analizamos los resultados en matemática de la prueba PISA (2015), los resultados de Chile tampoco son alentadores, pues se observa un que está bajo el promedio de la OCDE, como se muestra en la figura 11 donde Chile, a pesar de subir sus puntajes, tiene un 23,3 % de alumnos que aún no logran los puntajes estándar en las tres asignaturas que evalúa PISA, en cambio en Rusia este solo es un 7,7%. Si se observan los puntajes Chile obtuvo 423 puntos y Rusia 494, 71 puntos de diferencia.

Países/economías con un rendimiento medio/proporción de alumnos excelentes por encima de la media de la OCDE Países/economías con una proporción de alumnos con bajo rendimiento por debajo de la media de la OCDE
Países/economías con un rendimiento medio/proporción de alumnos excelentes/proporción de alumnos con bajo rendimiento no significativamente distinta a la media de la OCDE
Países/economías con un rendimiento medio/proporción de alumnos excelentes por debajo de la media de la OCDE. Países/economías con una proporción de alumnos con bajo rendimiento por encima de la media de la OCDE

	Matemáticas		Ciencias, lectura y matemáticas	
	Rendimiento medio en PISA 2015	Tendencia media en tres años	Proporción de alumnos con nivel excelente en al menos una asignatura (nivel 5 o 6)	Proporción de alumnos con bajo rendimiento en las tres asignaturas (por debajo del nivel 2)
	Media	Dif. nota	%	%
Media OCDE	490	-1	15.3	13.0
España	486	1	10.9	10.3
Letonia	482	0	8.3	10.5
Rusia	494	**6**	13.0	7.7
Luxemburgo	486	-2	14.1	17.0
Italia	490	**7**	13.5	12.2
Hungría	477	**-4**	10.3	18.5
Lituania	478	-2	9.5	15.3
Croacia	464	0	9.3	14.5
CABA (Argentina)	456	**38**	7.5	14.5
Islandia	488	**-7**	13.2	13.2
Israel	470	**10**	13.9	20.2
Malta	479	**9**	15.3	21.9
República Eslovaca	475	**-6**	9.7	20.1
Grecia	454	1	6.8	20.7
Chile	423	4	3.3	23.3

Figura 11. Puntajes en Prueba de matemática
Fuente: PISA (2015)

Luego de todos estos antecedentes se observa una dificultad en los contenidos de matemática, que amerita un estudio al respecto, y sobre todo una comparación con alguno de estos países que logran buenos resultados en pruebas estandarizadas como TIMMS y PISA.

Dicho todo esto, el estudio que se presenta a focalizado su interés en el análisis de las directrices curriculares respecto de la enseñanza de la inecuación y/o desigualdad. Para ello se analizará, en primer lugar, en el contexto escolar chileno y, posteriormente, se analizará el caso de Rusia comprendiendo que este es uno de los países que logra buenos resultados en la temática de estudio.

Dado a la problemática que se observa, en este estudio nos proponemos analizar el curriculum nacional chileno para conocer la progresión de la enseñanza de la inecuación durante la formación escolar y compararlo con lo propuesto en los textos escolares otorgados por el Ministerio de Educación en Chile y además, para tener una referencia que permita compararlo con alguno de los países que si obtienen buenos resultados y así ver una de las posibles causas a este problema.

De acuerdo a todo lo expuesto anteriormente surge la siguiente pregunta, ¿Cuáles son las diferencias entre los contenidos de inecuación impartidos en Chile y el de otros países con mejores resultados, específicamente Rusia? ¿en Chile existirá una coherencia entre lo que proponen los planes y programas y lo que se entrega en los textos escolares? ¿en Chile se abarcará todos los contenidos necesarios para abordar completamente la inecuación?

1.3.OBJETIVOS DE INVESTIGACIÓN.

En base a estos antecedentes se formulan los siguientes objetivos de investigación:

Objetivo general

Analizar el tratamiento otorgado a la inecuación en el contexto escolar chileno y ruso.

Objetivos específicos:

- Reconstruir la complejidad matemática de la inecuación mediante la consideración de todos los componentes y las conexiones que existen entre ellos.
- Analizar el currículum chileno y los textos escolares distribuidos por el Ministerio de Educación a partir de la complejidad matemática de la inecuación.
- Analizar los textos escolares rusos a partir de la complejidad matemática de la inecuación.

CAPÍTULO 2

MARCO TEÓRICO

El marco teórico que se presentará a continuación presenta en una primera instancia un análisis histórico de las diferentes definiciones que se le ha dado a las inecuaciones en libros, artículos y tesis. Luego se trabajará la idea de idoneidad epistémica que propone el Enfoque Ontosemiótico de la Cognición e instrucción matemática, EOS (Godino, 2003), donde surge, entre otras cosas, la idea de complejidad matemática de un objeto determinado, el cual será presentado en un esquema de elaboración propia.

2.1. SIGNIFICADO DE LA INECUACIÓN

En esta investigación es importante visualizar, en primer lugar, como se define y se presentan las desigualdades y las inecuaciones en diversos recursos bibliográficos. Para ello se analizó artículos, tesis y libros de matemática que los docentes pueden utilizar para planificar sus clases. Dentro de esta recopilación de información se presentó la dificultad frente a los artículos debido a que hay muy pocos que han investigado sobre el tema y la mayoría trata de los errores o la implementación didáctica, en las cuales no se presentan definiciones formales de desigualdades o inecuaciones, es por ello que solo se presentará lo encontrado. Borello y Lezama (2010) plantea la misma dificultad en su trabajo.

Análisis Histórico

A continuación, se presentará un análisis histórico de las definiciones planteadas de desigualdad y/o inecuaciones, para poder ver su evolución a través de los años.

Dentro de los libros que pueden utilizar por los docentes se encuentra el libro algebra de Baldor (1988) que presenta una definición de desigualdad y de inecuación:

"Desigualdad es una expresión que indica que una cantidad es mayor o menor que otra" (p.276).

"Los signos de desigualdad son >, que se lee mayor que, y < que se lee menor que (p.276).

Este libro también presenta las propiedades de las desigualdades que en las tesis anteriores se mencionan como axiomas de orden.

"Una inecuación es una desigualdad en la que hay una o más cantidades desconocidas (incógnitas) y que solo se verifica para determinados valores de las incógnitas. Las inecuaciones se llaman también desigualdades de condición" (p.279).

"Principios en que se funda la resolución de las inecuaciones: la resolución de las inecuaciones se funda en las propiedades de las desigualdades, expuestas anteriormente, y en las consecuencias que de las mismas se derivan" (p.279).

El libro de calculo que contiene definiciones de desigualdades es El Calculo 7ed. De Leithold (1998), donde define desigualdad de la siguiente manera:

Los elementos del conjunto ℝ puede ordenarse mediante una relación denotada por los símbolos < (léase "menor que") y < (léase "mayor que"), los cuales se definen a continuación.

Dados $a, b \in \mathbb{R}$,

i) $a < b$ si y solo si $(b - a)$ es positivo;

ii) $a > b$ si y solo si $(a - b)$ es positivo.

Ahora se definirá los símbolos ≤ (léase "es menor que o igual a") y ≥ (léase "es mayor que o igual a").

Dados $a, b \in \mathbb{R}$,

i) $a \leq b$ si y solo si $a < b$ o $a = b$;

ii) $a \geq b$ si y solo si $a > b$ o $a = b$.

Las proposiciones $a < b$, $a > b$, $a \leq b$ y $a \geq b$ se denominan desigualdades. En partículas, $a < b$ y $a > b$ se llaman desigualdades estrictas, mientras que $a \leq b$ y $a \geq b$ recibe el nombre de desigualdades no estrictas" (p.1140-1141).

Otro libro que presenta una definición es Zegarra (2001), libro de descarga utilizado por estudiantes universitarios, en el define lo siguiente:

"∀ x, y ϵ ℝ se define las relaciones; " >" (mayor que), "<" (menor que), "≥" (mayor o igual que) y "≤" (menor o igual que) por :

i) $x > y \Leftrightarrow (x - y) \in \mathbb{R}^+$

ii) $x < y \Leftrightarrow y > x$

iii) $x \geq y \Leftrightarrow (x - y) \in \mathbb{R}^+ \vee (x = y)$

iv) $x \leq y \Leftrightarrow y \geq x$ *(p.194).*

Los estudiantes también utilizan libros entregados por universidades o institutos, por ejemplo, Virginio Gomez (2005), en el cual se les entregan a los alumnos definiciones de desigualdades:

"El conjunto de los números reales es un conjunto ordenado, pues existe la relación de orden mayor que (>) que cumple con los siguientes axiomas denominados Axiomas de orden" (p.4).

Luego presenta propiedades de las desigualdades, y la definición de inecuación:

> Son desigualdades con una incógnita que se verifican para ciertos números reales. La solución de una inecuación corresponde a un intervalo.
> Para resolver una inecuación se procede en forma similar a los procedimientos usados en la resolución de ecuaciones, pero considerando las propiedades de las desigualdades (p.9).

Uno de los actuales libros que utilizan los docentes en su formación y preparación de clases se encuentra el libro algebra ReFIP de Martínez,F; Martínez,S; Ramírez & Salomé (diciembre, 2013), diseñado para profesores de nivel básico, este presenta de la siguiente manera el concepto de desigualdad y de inecuación:

> En muchas situaciones de la vida diaria se entrega o se pide información en base a comparaciones. Por ejemplo, se dice que Juan es mayor que María o se pregunta si Chillán está más cerca o más lejos de Santiago que La Serena. Podemos describir estas afirmaciones y preguntas en lenguaje matemático usando desigualdades. Por ejemplo, si j denota la edad de Juan y m la edad de María, la situación descrita anteriormente puede ser representada como "j es mayor que m" y usando el símbolo ">" lo escribimos como desigualdad j > m (p.130).

"Una inecuación es una desigualdad entre dos expresiones algebraicas que involucran una cantidad desconocida o incógnita. Resolver una inecuación quiere decir determinar todos los posibles valores de la incógnita que satisfacen la inecuación" (p.136).

“La resolución de inecuaciones está basada en el uso de las propiedades de las desigualdades, las cuales permiten transformar la inecuación en otra equivalencia” (p.139).

Triana y Morenos (2013), realizan una definición de desigualdades y la resolución de desigualdades e inecuaciones:

> Una desigualdad es el enunciado de que dos cantidades o expresiones no son iguales. Puede ser el caso que una cantidad sea menor que (<), menor o igual a (≤) , mayor que (>) o mayor o igual (≥) que otra cantidad. (p.24)
>
> Para la solución de las desigualdades se puede utilizar un método algorítmico con la aplicación de las propiedades de las desigualdades y otra posibilidad es el método gráfico, teniendo en cuenta la analogía que de una desigualdad resulta cuando el signo de igual en una ecuación se reemplaza con un signo de menor que, mayor que, menor o igual que y mayor o igual que. (p.24)
>
> Una inecuación es una desigualdad en la que hay una o más cantidades desconocidas (incógnitas) y que solo se verifica para determinados valores de las incógnitas.
>
> Para resolver una inecuación es hallar los valores de las incógnitas que satisfacen la inecuación, los principios en que basa la resolución de las inecuaciones son en las propiedades de las desigualdades.
>
> Dos desigualdades que tienen exactamente el mismo conjunto solución son llamadas desigualdades equivalentes.
>
> Como en las ecuaciones, un método para resolver una desigualdad es reemplazarla por una serie de desigualdades equivalentes, hasta que se obtenga una desigualdad con una solución obvia, tal como x<3. Obtenemos desigualdades equivalentes aplicando algunas de las operaciones que se usaron para encontrar ecuaciones equivalentes (p.27).

También presenta los pasos a seguir para hacer la representación gráfica de las soluciones correspondientes.

Heredia y Palacios (2014) hace una definición detallada de desigualdad e inecuaciones con los axiomas correspondientes. Primero hace una presentación de los axiomas de orden necesarios para resolver las inecuaciones:

> **Axioma 1:** Si x y y son positivos, también lo son $x + y$ y xy

Axioma 2: Para cada número real $x \neq 0$, o x es positivo, o $-x$ es positivo, pero no ambos.

Axioma 3: El número cero no es positivo.

Ahora se pueden definir los símbolos <, >, ≤ y ≥ llamados respectivamente, menor que, mayor que, menor o igual que y mayor o igual que, de la manera siguiente:

$x < y$ Significa que $y - x$ es positivo.

$y > x$ Significa que $x < y$.

$x \leq y$ Significa que $x < y$ o $x = y$

$y \geq x$ Significa que $x \leq y$

Por lo tanto, se tiene que $x > 0$ si y solo si x es positivo. Si $x < 0$ se dice que x es negativo; si $x \geq 0$ se dice que x es no negativo. El par de desigualdades simultáneas $x <$, $y < z$ se escriben frecuentemente en la forma más breve $x < y < z$; interpretaciones análogas se dan a las desigualdades compuestas.

$x \leq y < z$

$x < y \leq z$

$x \leq y \leq z$ (p.30)

Luego presenta la definición de inecuación, basándose en lo presentado anteriormente:

Los axiomas de orden presentados anteriormente se refieren al concepto de desigualdad, el cual hace posible la organización del conjunto de los números reales por medio de relaciones de orden. Estas relaciones de orden permiten comparar expresiones algebraicas, lo que se conoce como Inecuaciones.

La solución de una inecuación, puede verse como la unión de los números reales que se encuentran en el dominio de la variable y que al reemplazar estos valores en la variable de la inecuación hace que la desigualdad obtenida se cumpla. Las inecuaciones que son objeto de interés para este trabajo son las Inecuaciones lineales (inecuaciones de primer grado).

Los enunciados que incluyen relaciones de orden tales como $3x - 7 > 5$ se llaman **inecuaciones.** Una **solución** de una inecuación es cualquier número que, cuando se lo sustituye por la variable, hace que el enunciado sea verdadero. Resolver una

> inecuación significa encontrar el conjunto de todos los números reales para los cuales el enunciado es verdadero. Se dice que dos inecuaciones son **equivalentes** si tienen exactamente las mismas soluciones. Para resolver una inecuación se encuentra una inecuación equivalente con solución. Las siguientes operaciones dan como resultado inecuaciones equivalentes (p.31).

A demás define algunas inecuaciones en particular y los conjuntos solución posibles con su notación y gráfica correspondiente.

En cuanto a los libros utilizados por docentes de media se encuentra el libro Clave PSU Matemática de Ediciones SM (2016), donde presentan el contenido como:

"Una desigualdad corresponde a una relación de comparación entre cantidades o expresiones algebraicas mediante los símbolos menor que (<) , mayor que (>), menor o igual que (≤) y mayor o igual que (≥)"(p.156).

Luego presenta los diferentes conjunto solución con su forma comprensiva, intervalo y gráfica.

La inecuación de primer grado la define como:

"Es una desigualdad que se puede escribir de la forma $\mathrm{ax} + \mathrm{b} < 0$, donde $\mathrm{a}, \mathrm{b} \in \mathbb{R}$, con a distinto de cero (el símbolo menor que < puede sustituirse por ≤, ≥ o >, según corresponda" (p.157).

También expone la forma en que se resuelve y las propiedades de las desigualdades en los reales.

Y finalmente el libro de PSU de matemática de la editorial Santillana del pacifico S.A (2016), realiza primero una definición de desigualdad:

> Una desigualdad es una relación entre dos cantidades que representan una comparación en la que se utiliza los símbolos, <, >, ≤, ≥. Para $\mathrm{a}, \mathrm{b} \in \mathbb{R}$, se cumple una de las siguientes desigualdades:
>
> $\mathrm{a} < \mathrm{b}$, se lee a es menor que b.
>
> $\mathrm{a} > \mathrm{b}$, se lee a es mayor que b.
>
> a ≤ b, se lee a es menor o igual que b.
>
> a ≥ b, se lee a es mayor o igual que b. (p.120).

En el caso de las inecuaciones las presenta según el tipo de inecuación, y la primera es la inecuación de primer grado:

"Una inecuación de primer grado con una incógnita es una desigualdad que tiene solo una incógnita y los coeficientes corresponden a números reales.

$$ax + b > c$$

$$ax + b < c$$

$$ax + b \leq c$$

$$ax + b \geq c$$

Donde x es la incógnita, $a, b \in \mathbb{R}$ y $a \neq 0$" (p.124).

En general los libros de matemática dejan consecutivos los temas de ecuaciones e inecuaciones lo que más adelante los autores mencionan como uno de los errores frecuentes de los alumnos, pero en todos definen la inecuación como una desigualdad a pesar de que no todos definen desigualdad antes (Virginio Gómez (2005) y ReFIP (2013)) o resaltan los axiomas que posteriormente se utilizaran la resolución de inecuaciones.

2.2. LA ENSEÑANZA DE LA INECUACIÓN Y SUS IMPLICACIONES

En el siguiente apartado se presentará una selección de propuesta de autores que presentan diferentes estudios de las desigualdades e inecuaciones, apuntando a diferentes áreas, errores comunes tanto en alumnos como en docentes en la definición o en la resolución, y otros que proponen como implementar alguno de sus subcontenido, y una mirada didáctica del tema. Esto ayudará más adelante a ver si el curriculum chileno aporta en parte a estos errores.

2.2.1. ERRORES

El porque es tan importante que los alumnos manejen las desigualdades y las inecuaciones como una relación, se debe a que la desigualdad se considera un objeto importante que permite establecer axiomas, que establecen definiciones y propiedades que son la base de la inecuación. Borello (2011) menciona a la inecuación como una técnica “huérfana”, debido a la ausencia de las desigualdades. Otros autores mencionados en el estudio de Gatica y Maz (2012), afirman que uno de las mayores dificultades está en encontrar la solución de una inecuación. (Duval, 1998; Acuña, 1998; Tapia, 1998, Diez, 1995; Garrote, Hidalgo y Blanco, 2004).

2.2.1.1 ERROR DE TIPO GRÁFICO

Borello (2007) presenta los tipos de errores que emergen de la representación gráfica de estudiantes, y afirma que estos errores son producidos porque se enseña a graficar casi exclusivamente con el método de tabulación, es decir, de identificar puntos en el plano, sin una interpretación de aquello. Esta conclusión también la afirma Vrancken Engler & Müller (2010) luego de aplicar su estudio, donde ven que los diferentes grupos de estudiantes recurren siempre a la resolución algebraica frente a la gráfica, y esto lo afirman con estudios realizados anteriormente por Einsenberg y Dreyfus en 1991 y Hitt en 2003. Un error que es presentados en diferentes estudios es que los alumnos realizan las inecuaciones solo como un proceso algebraico sin el sustento teórico de la desigualdad y confundiendo con los procedimientos de las ecuaciones. En particular en Vrancken Engler & Müller (2010) se afirma que la mayor cantidad de errores se presentaron en la parte conjuntista de la solución, en la parte teórica de conjuntos.

2.2.1.2 ERROR EN LA SIMBOLOGÍA

Maroto-Vargas (2013) donde lo alumnos no tienen claro los símbolos $<$ y $>$, o afirmaciones como $x > a$, no logrando leer realmente la solución; hacen procedimientos algorítmicos sin comprender y esto se debe a que no comprenden la base de la desigualdad, y confunden el procedimiento con lo realizado en las ecuaciones, es por eso que cometen errores de signo, y lo que más destaca es la poca comprensión de los enunciados y traspaso a lo algebraico. Borello (2007) también plantea dentro de su tesis a través de los estudios realizados por Bazzini(1999), Gallo y Battú(1997), Malara, Brandoli y Fiori (1999) que la falta de sustento teórico al aplicar desigualdades provoca la confusión entre ecuaciones y las inecuaciones viéndolas como elementos similares y por lo tanto una mala interpretación de las soluciones, en el año 2010, Borello afirma que esto se debe a que las inecuaciones se trabajan de forma desvinculadas de las inecuaciones, es por esto que carece de significado y se confunda con las ecuaciones.

2.2.1.3 ERROR EN LA INTERPRETACIÓN DE SOLUCIONES

Arévalo y Rojas (2017) en su trabajo investigativo sobre las inecuaciones lineales, los alumnos solo resuelven procedimientos algebraicos, no interpretan soluciones y tienen falencias a la hora de modelar situaciones a través de las inecuaciones lineales, y al consultarles por lo que entienden por desigualdad no hay consenso, por lo que no se tiene una clara noción de los conceptos fundamentales para las inecuaciones y axiomas de orden, además se detectaron falencias a la hora de analizar las inecuaciones de forma gráfica.

2.2.2. MIRADA DIDÁCTICA

Dentro de las investigaciones encontradas hay dos que presentan un enfoque didáctico de las inecuaciones, estos son Barbosa (2003), quien basándose en la teoría APOE, expone los procesos mentales que desarrollan universitarios con el fin de entender el concepto de inecuaciones, para ello lo divide en dos grandes áreas, interpretación de inecuaciones y la resolución. En su esquema presenta las siguientes etapas:

Interpretación.

Pre-acción: intenta resolver una inecuación como si fuera una ecuación y posee algún algoritmo de resolución.

Acción: se limita solo a resolver determinadas inecuaciones y sus soluciones, pero no consigue justificar la validez del algoritmo utilizado.

Proceso: es capaz de explicar correctamente los procedimientos necesarios para resolver una inecuación, pero no necesariamente ejecutándolos, y además logra interiorizar la acción de forma reflexiva.

Objeto: efectúa pasos de resolución de forma consciente, analizando equivalencias, utilizando diferentes métodos de resolución, encontrando el más rápido y efectivo.

Resolución gráfica.

Acción: atribuye puntos aislados para hacer el análisis de variación, entendiendo el concepto de función.

Proceso: visualiza e identifica subconjuntos del dominio en la gráfica y por otro lado percibe que, en la inecuación con subconjunto del dominio, pero aún no relaciona ambas.

Objeto: visualiza e identifica subconjuntos del dominio en la gráfica y además percibe que, en la inecuación con subconjunto del dominio, coordinando ambos procesos.

En su estudio concluye que para tener un fuerte esquema de resolución debe tener uno fuerte de interpretación, tanto gráfico como algebraico.

El siguiente estudio fue realizado por Gatica (2012), en el presenta los elementos significativos de la inecuación, que describiré a continuación.

Ostensivo: comprende los términos, expresiones, símbolos y tablas, en este caso $<$,

$<$, $\geq$, $\leq$ y valores de tablas x e y.

Extensivos: situaciones-problemas y aplicaciones, donde realizan problemas de maximizar o minimizar funciones objetivo.

Actuativos: procedimientos, algoritmos y operaciones, donde incluye la representación gráfica.

Validativos: demostraciones, comprobaciones y justificaciones.

Intensivo: conceptos y proposiciones, propiedades que se cumplen en la inecuación.

En su estudio concluye que en los manuales, textos o guías presentadas por docentes hay una ausencia de problemas de conversiones para utilizar el registro de representaciones semióticas.

Como antecedentes se encontraron dos esquemas de desigualdades e inecuaciones que aportan en este sustento teórico (ver figura 12 y figura 13).

El primero se encuentra en Santos y Lozada (2010), donde hace una propuesta de construcción de los conceptos de desigualdad e inecuaciones mediante el modelo de situaciones didácticas a partir de la solución de problemas.

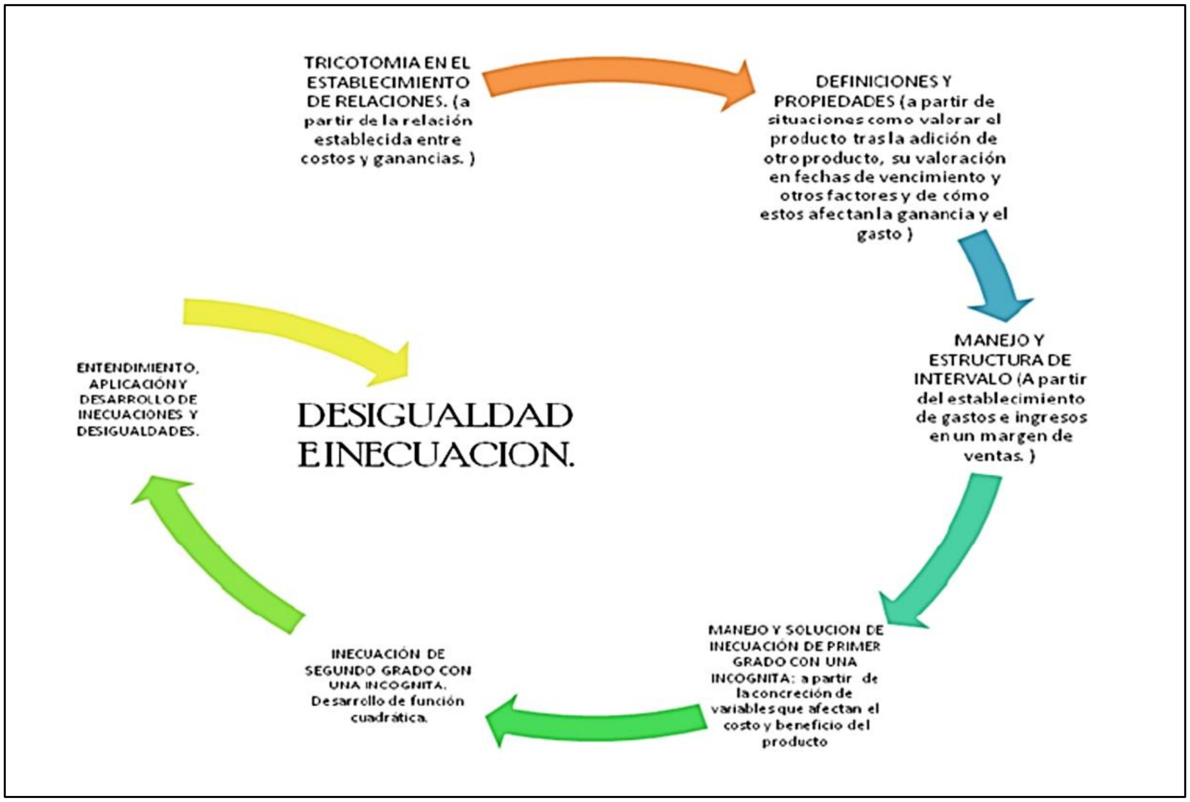


Figura 12. Esquema cíclico de desigualdad e inecuaciones
Fuente: Santos y Lozada (2010)

El segundo esquema encontrado está en Bernardis, Nitti y Scaglia (2014) donde muestra un enfoque centrado en el objeto mental desigualdad de los docentes, y los resultados obtenidos fueron clasificados en Ecuaionistas y Relacionistas, los cuales se subdividen en:

Simbólicos: hace la diferencia en el signo entre una ecuación y una inecuación.

Mecanicista: Se centran en algún procedimiento algebraico de resolución, relacionándola con la resolución de ecuaciones.

Resultadista: caracteriza la solución para hacer la diferencia entre ecuaciones e inecuación.

Esto lo ejemplifican a través del siguiente esquema:

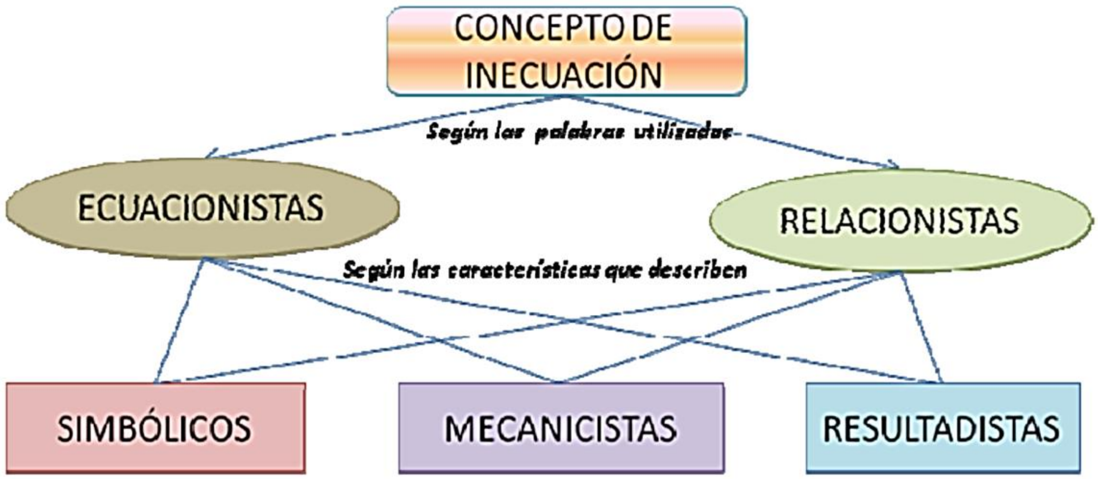


Figura 13. Esquema concepto de inecuaciones
Fuente: Bernardis, Nitti y Scaglia (2014)

2.3. IDONEIDAD EPISTÉMICA COMO HERRAMIENTA PARA EL ANÁLISIS DEL CURRICULUM DE MATEMÁTICA

La noción de idoneidad didáctica, es introducida en el EOS (Godino, Bencomo, Font y Wilhelmi,2006) como una herramienta para la intervención efectiva del aula, dentro de los seis componentes se encuentran: idoneidad epistémica, cognitiva, interaccional, mediacional, efectiva e ecológica (Godino, Batanero y Font, 2007). Dentro de estas, el estudio que se presenta se ha focalizado en la idoneidad epistémica de la inecuación, dado al interés de analizar el tratamiento otorgado a la inecuación en el currículo chileno, ruso y en los libros de textos de educación primaria y secundaria a partir de la complejidad matemática de dicho objeto, para ello se estudiará el modelo presentado por Pino-Fan en su tesis doctoral (2013) y se aplicará en las desigualdades e inecuaciones.

2.3.1 CRITERIO I: REPRESENTATIVIDAD DE LOS CAMPOS DE PROBLEMAS PROPUESTOS

En el contexto escolar, básica y media, en el cual fue enfocado esta investigación se resuelven ejercicios y problemas matemáticos que involucran de alguna forma las inecuaciones. Dentro de ese proceso de resolución se utilizan diferentes objetos matemáticos, para así favorecer el aprendizaje de los alumnos. La idoneidad epistémica refiere a los objetos y significados propuestos en el desarrollo de la situación problemática en las desigualdades e inecuaciones, es por ello que a continuación se presentarán los tipos de problemas presentados en los diferentes estudios de inecuaciones analizados anteriormente, en el punto 2.2.

a) Problemas que involucran resolución de inecuaciones lineales de forma gráfica.
b) Problemas que involucran resolución de inecuaciones lineales de forma algebraica.
c) Calcular las regiones factibles en problemas de optimización.
d) Calculo de dominio y recorrido de funciones.
e) Condiciones en las medidas de lados para que sea triángulo.

Los primeros dos son especificados anteriormente en los artículos de Arévalo y Rojas (2017), Vrancken y Müller (2010), donde hacen diferentes estudios sobre inecuaciones lineales, los errores, dificultades frente a diferentes contextos y actividades.

En el caso de la optimización se presenta un estudio de Gatica y Maz (2012) sobre la inecuación con dos variables, y también presentan actividades planteadas a alumnos y sus diferentes conclusiones al respecto, la más importante es que los alumnos no logran encontrar las soluciones de una inecuación lineal con dos variables, además no utilizan como estrategia el gráfico para confirmar posibles soluciones.

En Borello y Lezama (2011) mencionan que la inecuación es importante a la hora de resolver dominio y recorrido de funciones, resaltando que igual es fundamental manejar las desigualdades.

2.3.2 CRITERIO II: TIPO DE REPRESENTACIONES ACTIVADAS EN EL PLANTEAMIENTO Y SOLUCIÓN DE LAS TAREAS

La idoneidad mediacional se refiere al grado de disponibilidad y adecuación en la forma de presentar y desarrollar los contenidos matemáticos, de esta forma lo manifiesta Pino-Fan (2013), en este caso la desigualdad e inecuación, durante el proceso de enseñanza-aprendizaje de los alumnos dentro del aula de clases, esto al igual que el criterio anterior se presentó anteriormente en los diferentes libros, artículos y tesis analizadas.

a) Comparar números y cantidades en el caso de las desigualdades, comprendiendo el significado de los símbolos $<$, $>$, $\geq$, $\leq$.
b) Representar de forma algebraica una inecuación
c) Representar las soluciones de forma gráfica, algebraica y en intervalos.
d) Contextualizar las diferentes soluciones según la pertinencia.

Respecto a lo planteado se puede ver que los procesos a realizar involucran subprocesos donde los alumnos debe representar la información en una descripción en contexto, tabular para luego graficar (en el caso de las inecuaciones con dos variables en el plano cartesiano), y la parte simbólica que es la resolución algebraica del ejercicio. Estos procesos los presentó Barbosa (2003), en su estudio basado en la teoría APOE, descrito anteriormente.

2.3.3 CRITERIO III: CONOCIMIENTO PREVIOS A LA INTRODUCCIÓN DE LA INECUACIÓN

Para analizar este criterio presentaremos dos aspectos importantes en los conocimientos previos de la desigualdad e inecuación que es la Historia, su evolución en los años y los conceptos previos que se necesitan para poder desarrollar las inecuaciones sin dificultades.

En el ámbito de la historia se recopiló información del libro Historia de las matemáticas en los últimos 10.000 años de Ian Stewart (2008).

Uno de los primeros en utilizar símbolos en lugar de números desconocidos fue Diofanto de Alejandría alrededor del 250, él se centraba en la solución de ecuaciones algebraicas y su notación difiere de lo que actualmente se utiliza, por ejemplo, x^2 él la representaba como Δy, el signo = era $l\sigma$, esto complicaba los cálculos, pero era lo más compacto posible para la fecha. Luego los matemáticos árabes del periodo medieval resolvían con nuevos métodos las ecuaciones, pero todo lo escribían con palabra y no con símbolo por lo que se vio en la necesidad de hacer una notación simbólica, dentro de los primeros en empezar a utilizar símbolos fue Francois Vieta, aunque aún no se asemeja a la actual, cambio la incógnita por letras del alfabeto. En el siglo XV las letras p y m eran para la suma y resta, posteriormente a eso se cambiaron por + y -, luego Oughtred propuso la x para la multiplicación la cual a Leibniz no le pareció adecuada porque se confundía con la letra x.

En 1557 , Robert Recordé inventó el símbolo = para la igualdad, sin embargo era un poco más extensa =======, en cambio Vieta los escribía como ~ y René Descartes utilizaba ∝. Los símbolo de > y < para "mayor que" y "menor que" se deben a Thomas Harriot y los diferentes paréntesis por Vieta en 1593, en 1591 explicaba que el álgebra es un método para operar sobre formas generales y con esto se fue formando el concepto de algebra y sus diferentes contenidos, sobre inecuación específicamente no aparece información sobre su nacimiento especifico, pero las diferentes reglas que hoy se utilizan en el álgebra fueron modificadas en el tiempo según las necesidades que se iban presentando y así configurar nuevas estructuras como son actualmente , anillo, cuerpos, grupos, campos, álgebra diversas.

Respecto a los conceptos previos que se necesitan para las desigualdades e inecuaciones, el curriculum nacional nos presenta en sus planes y programas de matemática una continuidad de contenidos y también los aprendizajes previos para abordar las desigualdades e inecuaciones, estas son:

a) Orden de los números naturales, enteros y racionales
b) Ubicar números en recta numérica
c) Conceptos algebraicos de ecuaciones (despejar la incógnita)
d) Traspasar de lenguaje cotidiano a lenguaje matemático, representar algebraicamente.
e) Saber resolver sistemas de ecuaciones
f) Conocer el concepto de valor absoluto
g) Saber las restricciones de las fracciones, su definición.

2.3.4 CRITERIO IV: REPRESENTATIVIDAD DE LOS SIGNIFICADOS INSTITUCIONALES PRETENDIDOS (O IMPLEMENTADOS) RESPECTO DEL SIGNIFICADO GLOBAL DE REFERENCIA

Uno de los actores principales en la confección de las actividades y presentación del contenido es el docente, quien, de acuerdo al contexto de los estudiantes, curriculum y políticas de su institución planifica las clases y presenta de diferentes formas el contenido de desigualdad e inecuación. En este estudio nos basaremos en los planes y programas entregados por el Ministerio de Educación Chileno y en los textos escolares entregados.
Pino-Fan (2013) lo menciona claramente en su tesis en este criterio que una institución que es epistémica idónea, el conjunto de objetos y significados deben representar al conjunto global y no debe faltar ni omitir ninguno de ellos.

2.4. ESQUEMA DE COMPLEJIDAD DEL OBJETO MATEMÁTICO INECUACIÓN

En el ámbito de la didáctica de la matemática diversos estudios se han interesado en analizar el tratamiento que se les da a determinados objetos matemáticos, tanto en el curriculum como en los textos escolares (Por ejemplo: Rico, 1998; Pino y Blanco, 2008; Pino-Fan, Castro, Godino y Font, 2013). Ahora bien, para analizar el tratamiento que se le da a determinado objeto matemático es necesario considerar la idea de complejidad matemática. La idea de complejidad matemática desarrollada por Rondero y Font (2015) en el estudio de la media aritmética y aplicada en Seckel (2016) para el estudio para la proporcionalidad, entendiéndolo como la suma de todos los componentes de un determinado objeto y las conexiones que existen entre ellos. Asimismo, Font, Breda, Seckel y Pino-Fan (2017) señalan que:

> La mirada compleja aplicada al objeto matemático permite profundizar en el proceso de conexión entre significados parciales de un mismo objeto. Por una parte, la complejidad, estructurada en términos de un conjunto de configuraciones epistémicas, precisa cuáles son los componentes a conectar.

En esta investigación la complejidad del objeto matemático será visto desde la dualidad unitaria-sistémica, por ejemplo, en el estudio de la función raíz cuadrada, desde séptimo básico hasta segundo medio se ven las raíces cuadradas, su cálculo y propiedades, en tercero medio todos estos elementos se consideran algo conocido y, en consecuencia, como entidades unitarias (elementales). Este mismo objeto, en los cursos de séptimo básico y segundo medio, tiene que ser considerado de manera sistémica para su aprendizaje. Una analogía parecida es la que presentan Rondero y Font (2015), donde concluyen que "un elemento esencial para que sea posible esta mirada dual (unitaria-sistémica) hacia los objetos matemáticos es que los componentes que resultan de la mirada compleja se articulan (conectan) entre sí, posibilitando la mirada unitaria del objeto matemático" (p.30).

Para comprender la complejidad de las inecuaciones, a continuación, se sugiere un esquema con todos los componentes involucrados en dicho objeto matemático.

El esquema fue creado en base a textos matemáticos que tenían el contenido inecuación presente, Leithol (1998), Larson (1999), Apostol (1961) y Martinez, Martínez, Ramírez, Varas (2014).

Complejidad matemática de las inecuaciones

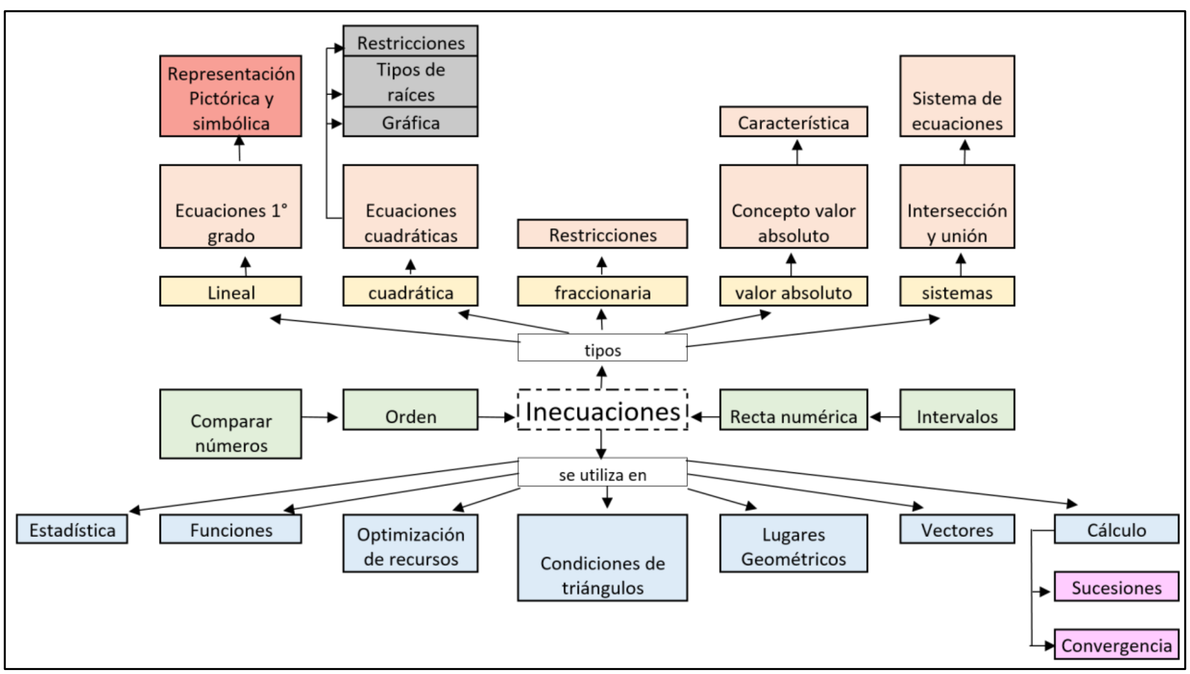


Figura 14. Esquema de complejidad de la inecuación
Fuente: elaboración propia

En la figura 14 se puede observar la complejidad matemática de la inecuación. En el centro (de color verde) vemos los conceptos previos para su estudio (comparar números, orden, recta numérica e intervalos), en el nivel superior (de color amarillo) se puede observar los tipos de inecuaciones (lineal, cuadrática, fraccionaria, valor absoluto y sistemas) y sus conceptos previos (de color naranjo). Finalmente, en el nivel inferior (de color celeste) se muestra dónde se utiliza la inecuación (estadística, funciones optimización de recursos, condiciones de triángulos lugares geométricos, vectores y cálculo). Esta propuesta permitiría analizar la continuidad (o progresión) de dicho objeto matemático en el curriculum chileno, lo que El Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas (NCTM, 2016) considera clave a la hora de valorar la excelencia de un curriculum.

CAPÍTULO 3

MARCO METODOLÓGICO

En este capítulo se expondrán los aspectos metodológicos de este estudio de las desigualdades e inecuaciones, donde se indagará en el enfoque metodológico, las fases que tendrá esta investigación y las técnicas de análisis del curriculum chilenos, los textos escolares chilenos y los textos escolares rusos.

3.1. ENFOQUE METODOLÓGICO

El siguiente estudio tendrá un enfoque metodológico de tipo cualitativo no interactivo, donde se analizará el curriculum chileno entregado por el Ministerio de educación, los textos escolares chilenos que entrega el Ministerio de Educación chileno a colegios bajo su régimen (municipales y subvencionados) y los textos escolares rusos. Como bien lo define McMillan-Sally (2005) la investigación de tipo cualitativa presenta los datos como una narración.

Para ello se realizará un estudio básico donde solo se pretende comprender como se trabajan los contenidos de desigualdades e inecuaciones enfocado en la complejidad de este objeto en estudio, esto porque el estudio básico se preocupa exclusivamente por saber, explicar y predecir fenómenos sociales y naturales, empieza con una teoría, un principio básico o una generalización. Así lo define McMillan-Sally (2005). Principalmente va a ser una investigación analítica conceptual de tipo educativo.

3.2. FASES DE LA INVESTIGACIÓN

Para lograr los objetivos específicos de esta investigación, a continuación, se mostrarán las fases que siguió esta investigación.

Fase 1: Se recopiló información teórica sobre complejidad de un objeto matemático creado y fundamentos teóricos al respecto, también se analizó textos matemáticos donde se presentan temas relacionados con la inecuación y su aplicación.

Fase 2: Para esta fase se recopilarán todos los planes y programas de estudio de matemática de la plataforma oficial del Ministerio de educación, estos corresponderán desde cuarto año básico hasta cuarto año medio con los últimos ajustes aplicados e implementados (años 2016). También se descargaron de la plataforma oficial los textos escolares de matemática entregados por el Ministerios de educación chileno a todos los estudiantes pertenecientes a establecimientos municipales y subvencionados, de forma gratuita, estos son los siguientes:

- Cuarto básico, quinto y sexto año básico de los autores Espinoza & Cano (2016), de la editorial Galileo libros Ltda.
- Séptimo año básico el libro de Merino, Muñoz, Pérez & Rupini (2016) de la editorial SM Chile.
- Octavo año básico el libro de Catalán, Pérez, Prieto & Rupini (2016) de la editorial SM Chile.
- Primer año medio el libro de Del Valle, Muñoz & Santis (2016) de la editorial SM Chile.
- Segundo Año medio el libro de Muñoz, Rupini & Jiménez (2016) de la editorial SM Chile.
- Tercer año medio el libro de Saiz & Blumenthal (2016) de la editorial Cal y Canto.
- Cuarto año medio el libro de Muñoz, Gutierrez y Muñoz (2016) de la editorial Santillana del Pacífico S.A.

Luego de recopilar el material se comenzará a revisar todos los objetivos de aprendizaje, contenidos y actividades presentes donde se trabajen las desigualdades e inecuaciones para luego compararlo con el esquema de complejidad que se elaboró en la fase 1.

Fase 3: Se recopilaron textos escolares rusos, donde se buscó todos los contenidos donde ellos utilizan las inecuaciones para luego realizar la comparación con el esquema de complejidad elaborado en la etapa 1.

Fase 4: Finalmente con los materiales analizados y comparados en los esquemas de complejidad se realizará una comparación de estos, a modo de extraer conclusiones comparativas entre Chile y Rusia.

3.3. TÉCNICA DE ANÁLISIS

Para alcanzar el objetivo propuesto, *analizar el tratamiento otorgado a la inecuación en el contexto escolar chileno y ruso*, donde se dará a conocer los aprendizajes esperados y actividades para el tratamiento de la inecuación durante la formación escolar y su relación con la complejidad matemática de dicho objeto en estudio, se empleó la técnica cualitativa de análisis de contenido, lo que permitió analizar tanto los planes y programas que presentados por el Ministerio de Educación de Chile para la enseñanza de la matemática, como los textos escolares que distribuye gratuitamente cada año. Asimismo, dicha técnica permitió analizar los textos escolares rusos, lo que estaba relacionado con uno de los objetivos específicos planteados 1) Reconstruir la complejidad matemática de la inecuación mediante la consideración de todos los componentes y las conexiones que existen entre ellos. 2) Analizar el currículum chileno y los textos escolares distribuidos por el Ministerio de Educación a partir de la complejidad matemática de la inecuación. y 3) Analizar los textos escolares rusos a partir de la complejidad matemática de la inecuación.

En la primera fase se analizó los programas de estudio de cuarto año básico a cuarto año medio, donde los objetivos de aprendizaje (OA) junto a los indicadores de evaluación, se convirtieron en unidades de análisis que fueron clasificadas basándonos en los componentes presentes en la figura 14, con la finalidad de determinar cuáles de dichos componentes están presentes en el currículum escolar chileno.

En una segunda etapa se procedió a analizar una colección de textos de estudio (de primaria y secundaria) que fueron distribuidos gratuitamente por el Ministerio de Educación de Chile en el año 2016 en los establecimientos escolares que reciben subvención del estado. Se trató de un análisis complementario al currículum, dado que los textos escolares es uno de los recursos más utilizado por los profesores a la hora de planificar sus clases y son las actividades con la que los estudiantes trabajan durante las clases de matemática a parte de las entregadas por los docentes. Por esta razón, se decidió analizar los textos correspondientes a los mismos niveles contemplados en el análisis curricular (de cuarto año básico a cuarto año medio), analizando un total de nueve textos. En esta etapa la técnica de análisis utilizada es la propuesta por Cobo (citado en Vásquez y Alsina, 2015) quien propone un análisis cualitativo que considera los siguientes pasos:

- Seleccionar los capítulos donde se aborda el tema de interés.
- Lectura minuciosa de los capítulos que tratan el tema. En nuestro caso se clasificaron las unidades de análisis (actividades, ejercicios y/o problemas matemáticos) de acuerdo con su relación a los componentes de la figura 14.
- Elaboración de tablas comparativas que recogen los elementos de significados presentes en los textos analizados.

Y por último se analizaron los textos escolares rusos, específicamente los contenidos que se plantean en cada texto, desde la sexta clase hasta la onceaba clase, que corresponden desde sexto año básico hasta 3 año medio chileno, en este caso no se presentarán imágenes de actividades pero se analizará respecto a la figura 14, para luego realizar las comparaciones existentes con nuestro curriculum chileno.

CAPÍTULO 4

ANÁLISIS DE RESULTADOS

A modo resumen de lo que se presentará a continuación se puede ver en las diferentes actividades mostrada desde cuarto año básico hasta cuarto año medio, tanto en el curriculum chileno como en los textos escolares chilenos, tenemos que en cuarto año básico la actividad pretende que los estudiantes comprendan el concepto de inecuación como una desigualdad donde el resultado no es solo uno, para luego formalizarlo en quinto año básico. Pero en sexto año básico en el curriculum no aparece nada al respecto de desigualdades e inecuaciones y en los textos escolares aparece como actividad de repaso solo el ordenar número. En séptimo y octavo año básico van agregando dificultad a estas inecuaciones lineales, esto demuestra una buena progresión en el tratamiento del contenido. Sin embargo, en primero, segundo y tercer año medio la inecuación está presente en actividades muy puntuales y es considerada como un conocimiento previo. Finalmente, en cuarto año medio se retoma la unidad de inecuaciones (explícitamente), recordando todo lo trabajado hasta octavo año básico y agregando sistemas.

Luego cuando se realiza el mismo análisis, pero con los textos escolares rusos nos encontramos con que sus contenidos contemplan desde la sexta clase hasta la undécima clase todos los contenidos de desigualdades e inecuaciones comenzando por la formalidad de desigualdades y la inecuaciones lineales, luego aumentando clase a clase el nivel de dificultad y el contenido con el cual se va relacionando.

4.1 ANÁLISIS DE PLANES Y PROGRAMAS DE ESTUDIOS CHILENOS

Tal como se ha señalado en el capítulo 3, el análisis del tratamiento de la inecuación en el curriculum chileno se desarrolló en dos fases. La primera fase consistió en hacer una búsqueda en los programas de estudio de los distintos cursos para dar cuenta de cuáles son los niveles en los que se espera desarrollar el aprendizaje de la inecuación y qué se espera que los estudiantes aprendan en cada nivel y, en la segunda fase, relacionamos el tratamiento que se le da a la inecuación en el curriculum chileno con la complejidad de dicho objeto matemático desarrollado en el marco teórico (capítulo 2).

Cabe destacar que los planes y programas analizados son los entregados oficialmente por el Ministerio de Educación de Chile. Los documentos oficiales de cuarto, quinto y sexto año básico fueron actualizados en el año 2012, los de séptimo y octavo año básico en el año 2016, los de primero y segundo año medio en el año 2011 y los de tercero y cuarto año medio actualizado en el año 2009, pero implementado en el año 2014.

El primer análisis consiste en determinar, dentro de los objetivos de aprendizajes que propone el currículum, los diferentes cursos en los que se espera desarrollar un aprendizaje en relación a la desigualdad y/o inecuaciones, además del conocimiento previo que se requiere para dicho propósito.

A continuación, en la figura 15, se presenta las evidencias encontradas en cada nivel analizado.

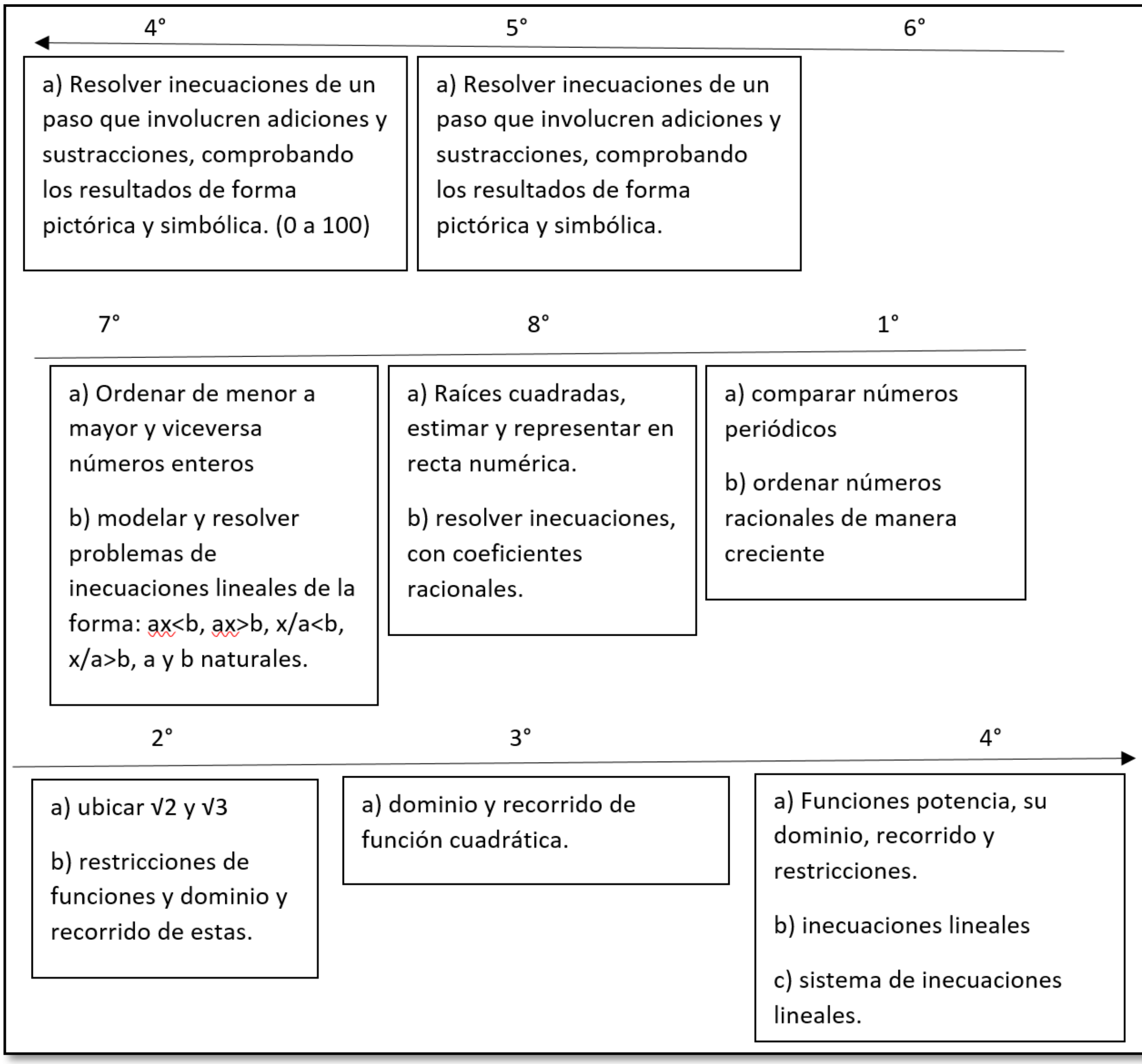


Figura 15. Objetivos de aprendizaje relacionados con la inecuación.
Fuente: elaboración propia.

Para una mayor comprensión de lo expuesto en la figura 15, se presentará una selección de actividades propuestas en los planes y programas de cada nivel analizado.

Como se puede apreciar en la figura 16, en cuarto año básico se espera que los alumnos resuelvan inecuaciones simples de un paso y que comprueben su resultado a través de una forma pictórica o simbólica, para ello se sugiere la siguiente actividad:

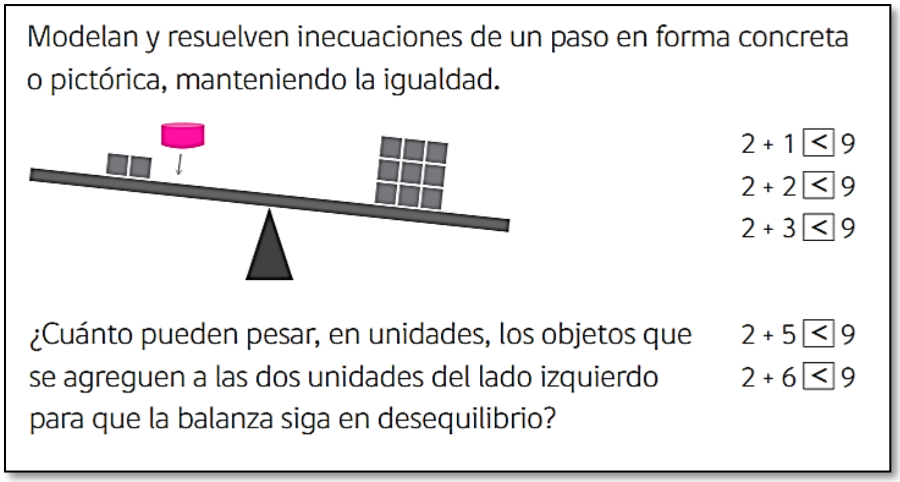


Figura 16. Actividad propuesta en el currículum de cuarto básico. Fuente: Mineduc (2012), p.112.

La actividad (figura 16) muestra la representación simbólica de la inecuación mediante una balanza, la cual se sugiere utilizar al inicio de la actividad como una herramienta, y a la vez se sugiere al docente comenzar con ejercicios de balanzas, pero con ecuaciones.

En el caso de quinto año básico se pide algo similar a lo del año anterior pero con un nivel de dificultad mayor que involucra números superiores a 100 y, a diferencia de los planes y programas de cuarto año básico, en este año no se sugieren actividades que involucran inecuaciones solo se plantean dentro del mismo objetivo actividades para ecuaciones, por lo que se infiere que el alumno debe trabajar las mismas actividades planteadas para cuarto año básico pero con un conjunto numérico mayor.

Para sexto año básico se puede observar en la figura 15 que no aparecen objetivos de aprendizaje relacionados con el objeto matemático en estudio, es decir, en el análisis de contenido no se detectó la presencia del objeto matemático de manera explícita (a través de un objetivo de aprendizaje) ni de manera implícita (como concepto previo que requiere ser aplicado).

En séptimo año básico se presentan dos objetivos de aprendizaje que involucran desigualdades e inecuaciones, el primero es el de ordenar y comparar números enteros. Es ahí donde se presenta el concepto de orden y, por consiguiente, el concepto de desigualdad numérica. En el documento analizado se le sugiere al docente la siguiente actividad:

Los estudiantes comparan situaciones en que puedan establecer un orden de números enteros; por ejemplo: en juegos, problemas de deuda o temperaturas.

Figura 17. Actividad propuesta en el currículum de séptimo básico.
Fuente: Mineduc (2016), p. 68.

En esta actividad (figura 17) el principal objetivo es comparar números enteros, y también saber ubicarlos en la recta numérica como método de comparación (cuál es mayor o menor).

Para el segundo objetivo de aprendizaje propuesto en este nivel, en este caso de inecuación, se presenta la siguiente actividad al docente que, al igual que en cuarto y quinto año básico, involucra la representación simbólica con balanzas, pero ahora con grado de dificultad mayor en cuanto a la expresión que se debe resolver.

Basados en los dibujos de las balanzas, elaboran las inecuaciones presentadas y las escriben en los recuadros respectivos.

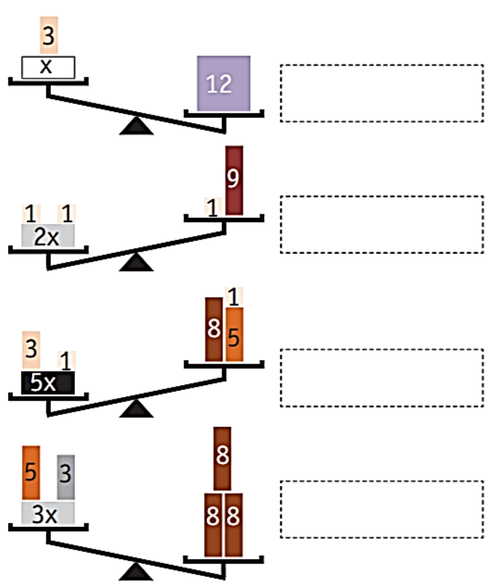


Figura 18. Segunda actividad propuesta en el currículum de séptimo básico.
Fuente: Mineduc (2016). p.120.

Como se puede apreciar en la figura 18, los alumnos deben representar con leguaje algebraico lo que se aprecia en cada una de las balanzas. Además, se puede apreciar que los procesos matemáticos ya no son de un solo paso, sino que se agregan las multiplicaciones y divisiones, teniendo a la incógnita acompañada de un número diferente de uno.

En octavo año básico también se aprecia un primer objetivo de desigualdades cuando deben estimar raíces cuadradas no exactas, donde ellos deben buscar el intervalo posible para el valor de la raíz. Dentro de las actividades propuestas en los planes y programas aparece la siguiente:

Relacionan las raíces cuadradas no exactas con los intervalos correspondientes. Unen las casillas con flechas.

raíz cuadrada	intervalo que contiene la raíz cuadrada
$\sqrt{35}$	[7,7 ; 7,8]
$\sqrt{60}$	[5,9 ; 6,0]
$\sqrt{22}$	[5,1 ; 5,2]
$\sqrt{50}$	[6,4 ; 6,5]
$\sqrt{27}$	[4,6 ; 4,7]
$\sqrt{42}$	[7,0 ; 7,1]

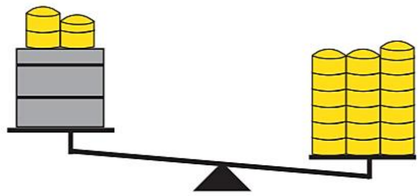
Figura 19. Actividad propuesta en el currículum de octavo básico.
Fuente: Mineduc (2016), p. 90.

En la figura 19 se puede apreciar que la actividad tiene el objetivo de darle un valor aproximado a cada raíz cuadrada mediante la comparación de decimales y el resultado de ésta, agregando el concepto de intervalo solución.

Para el segundo objetivo que es directamente del contenido de inecuaciones, se plantean actividades desde las representaciones simbólica y/o gráficas como lo es la balanza y ejercicios con enunciados donde el alumno debe plantear la inecuación, resolverla y dar el conjunto solución de esta, aumentando la formalidad con la que el alumno debe trabajar las inecuaciones y el grado de dificultad de estas (figura 20 y 21).

Primera actividad:

El dibujo muestra una balanza en desequilibrio. El adoquín grande en gris corresponde a la variable x.



› Resuelven pictóricamente la inecuación. Dibujan los cambios y completan el lado derecho de la balanza.
› Resuelven simbólicamente la inecuación mediante transformaciones equivalentes.
› Expresan verbal y simbólicamente el conjunto solución.

Figura 20. Segunda actividad propuesta en el currículum de octavo básico.
Fuente: Mineduc (2016), p. 117.

Segunda actividad:

Una persona tiene una deuda de $ 637 500 con un pariente, que no le cobra interés. Para cancelar la deuda, decide depositar mensualmente $ 75 000. ¿Cuántos meses demora en pagar la deuda?

› Elaboran una inecuación para determinar el número mínimo de meses para llegar a saldar la deuda.
› Resuelven la inecuación y determinan el número mínimo de meses necesarios.
› Conjeturan acerca del número mínimo de meses si se logra depositar el doble de la mensualidad. Explican y comunican la respuesta sin elaborar una nueva inecuación.

Figura 21. Tercera actividad propuesta en el currículum de octavo básico.
Fuente: Mineduc (2016), p. 121.

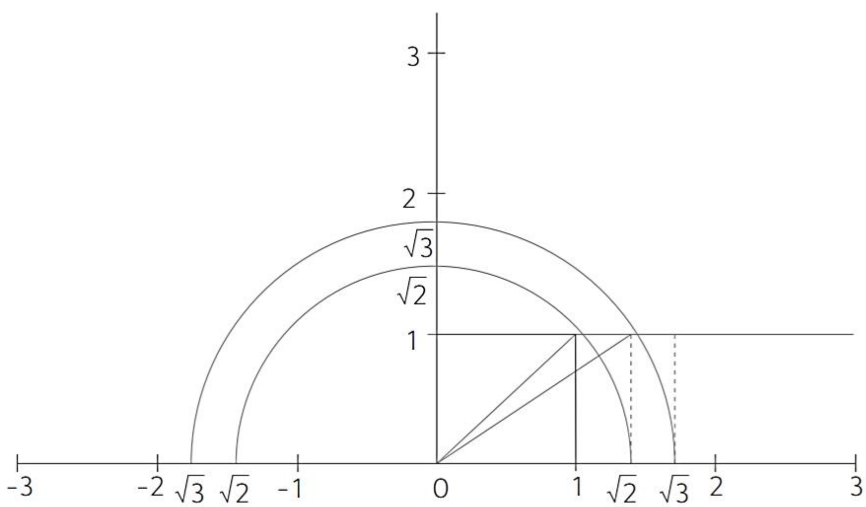
En los documentos analizados que corresponden a la enseñanza media se puede evidenciar que en primero medio solo se considera el tratamiento de la desigualdad como un concepto previo para comparar cantidades numéricas dentro del conjunto trabajado, los racionales. En cambio, las inecuaciones no se mencionan de manera explícita en ninguna unidad dentro del nivel.

Para segundo año medio aparecen las desigualdades para comparar números irracionales, con actividades propuestas como las que se muestran a continuación:

- Construyen números irracionales a partir del concepto de no periodicidad y explican su razonamiento. Por ejemplo, el número 0,1234567891011121314...
- Aproximan un número irracional por defecto y por exceso de acuerdo a una precisión dada (por ejemplo, con 4 decimales). Por ejemplo, $\sqrt{2}$ con 4 decimales.
- Usan métodos visuales (áreas de cuadrados) para aproximar raíces cuadradas.

Figura 22. Actividad propuesta en el currículum de segundo medio.
Fuente: Mineduc (2011), p. 34.

Es importante revisar después una forma geométrica para ubicar estos números irracionales. Se debe recordar que ella forma parte de la construcción de un cuadrado de lado 1 en la recta numérica, tal como se muestra a continuación:



Los estudiantes deben entender que $\sqrt{2} < \sqrt{3}$, lo que queda representado en la recta numérica.

También pueden usar un programa geométrico para construir la recta numérica.

Figura 23. Segunda actividad propuesta en el currículum de segundo medio.
Fuente: Mineduc (2011), p. 40.

También aparecen actividades de inecuaciones, como concepto previo, donde los alumnos las utilizan para obtener el dominio y recorrido de funciones, por ejemplo:

> Sea la función raíz cuadrada $f(x) = \sqrt{x-h} + k$, con $h, k \in IR$. Responden:
>
> - ¿cuál es su dominio?
> - ¿cuál es el recorrido?
>
> Describen los cambios producidos en los gráficos al variar los valores de los parámetros h y k.

Figura 24. Tercera actividad propuesta en el currículum de segundo medio.
Fuente: Mineduc (2011), p. 69.

De este modo en el caso de segundo año medio, se utilizan tanto las desigualdades como las inecuaciones como conceptos previos que ayudan a lograr los objetivos planteados en la unidad de números y la unidad de funciones, pero no está presente dentro del currículum como un contenido explicito (Figura 22, 23 y 24).

En tercero año medio se tiene presente las inecuaciones del mismo modo que en segundo año medio, es decir, como conceptos previos que ayudan a lograr los objetivos relacionados con funciones, dominio y recorrido, los máximos y mínimos, acotar. Dentro de las actividades propuestas se pueden destacar las siguientes:

En el Norte Chico se descubrió una vertiente de agua subterránea que debe ser extraída con bombas. Se sabe que, por cada nueva bomba que se conecte, la cantidad de m^3 diarios que es posible extraer decrece en 5 m^3, como puede apreciarse en la tabla siguiente:

Número de bombas	m^3 de agua extraída
1	60 (= 1 · 60)
2	110 (= 2 · 55)
3	150 (= 3 · 50)
4	180 (= 4 · 45)
...	...
...	...

Con esta información, realice las actividades y responda las preguntas:

› Complete la tabla hasta incorporar 8 bombas.

› Grafique los datos de la tabla.

› ¿Cuál es la máxima cantidad de agua que se puede extraer diariamente de la vertiente?, ¿con cuántas bombas se logra?

› ¿Con qué cantidad de bombas comienza a disminuir la cantidad de agua extraída?

› ¿Cuánta agua se extraerá diariamente si se colocan trece bombas?

Figura 25. Actividad propuesta en el currículum de tercero medio. Fuente: Mineduc (2009), p. 76.

En la figura 25, al presentarse ejercicios contextualizados de la función cuadrática exige al estudiantado acotar la función a los posibles valores que tienen lugar dentro del contexto.

Para el general de las funciones cuadráticas se tienen características de su grafica a través de una inecuación, que se presenta dentro de las actividades propuestas para el docente.

Al finalizar la actividad, se espera que las y los estudiantes justifiquen las conjeturas planteadas anteriormente y concluyan que:

› $b^2 - 4ac > 0$ implica obtener soluciones reales y diferentes. La gráfica de la función intersecta al eje X en dos puntos.

› $b^2 - 4ac = 0$ implica obtener ecuaciones reales e iguales. La gráfica de la función intersecta al eje X en un punto.

› $b^2 - 4ac < 0$ implica obtener soluciones complejas. La gráfica de la función no intersecta al eje X.

Figura 26. Actividad propuesta en el currículum de tercero medio.
Fuente: Mineduc (2009), p. 87.

En la figura 26 podemos apreciar que en tercer año medio se hace utilización de las inecuaciones en las características de las soluciones de una función cuadrática, esto con respecto a los cortes con el eje x y que significa en cada caso.

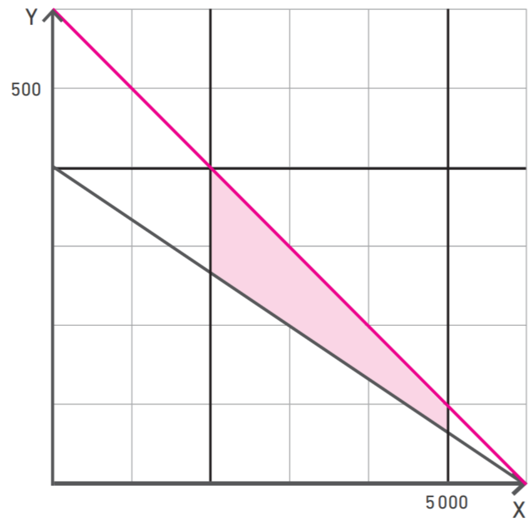
En cuarto año medio aparece dentro de la unidad de Álgebra un objetivo de aprendizaje que contiene las inecuaciones, puntualmente se pide resolver problemas utilizando inecuaciones lineales o sistemas de inecuaciones lineales, donde se presentan las siguientes actividades para lograr este objetivo:

El cuadro siguiente presenta criterios para clasificar empresas propuestos por Sercotec, el SII y la Corfo. Interpretan esta información de modo que permita, por ejemplo, redactar una nota que caracterice a la pequeña y mediana empresa, suponiendo que será incluida en una campaña publicitaria relativa a facilidades tributarias para este tipo de empresas.

	Instituciones y criterios propuestos		
	SERCOTEC	SII	CORFO
Criterios / Categorías	Número de personas ocupadas (x)	Volumen de venta UF (y)	Nivel de inversión UF
Microempresa	$1 \leq x \leq 4$	$y \leq 2\,400$	No superior a 2 000
Pequeña	$5 \leq x \leq 49$	$2\,401 \leq y \leq 25\,000$	No superior a 15 000
Mediana	$50 \leq x \leq 199$	$25\,001 \leq y \leq 100\,000$	No superior a 45 000
Grande	$200 \leq x$	$100\,001 \leq y$	Superior a 45 000

Figura 27. Actividad propuesta en el currículum de cuarto medio.
Fuente: Mineduc (2009), p. 49.

En el sistema de coordenadas a continuación, la variable x representa la cantidad de artículos producidos, y la variable y, los gastos de energía en la fabricación para cada artículo. En la producción se puede trabajar con dos máquinas: la primera está representada por la recta en color rojo, y la segunda, por la recta azul.



a. ¿Qué tipo de función representan las rectas de color rojo y de color azul?

b. Justifican si las funciones son crecientes o decrecientes, e interpretan la respuesta según el contexto del problema.

c. Determinan la ecuación de la recta de color rojo y de color azul.

Figura 28. Segunda actividad propuesta en el currículum de cuarto medio.
Fuente: Mineduc (2009), p. 54.

Como se puede apreciar, ambas actividades (figura 27 y 28) se presentan a través de problemas en contextos y el análisis de situaciones para poder responder las diferentes preguntas.

Finalmente, se puede señalar que al analizar los diferentes cursos se observa que el tratamiento de la inecuación dentro del currículum chileno no contempla todos los elementos que debería, representadas siempre de forma pictórica y/o simbólica ya sea a través de las balanzas o las gráficas correspondientes. Asimismo, es posible evidenciar que el objeto matemático es tratado de manera descontinuada a través de los cursos, interrumpiendo su enseñanza en sexto año básico y en primero, segundo y tercer año medio.

Ahora bien, al tener como referente el mapa de complejidad matemática de la desigualdad e inecuación desarrollado en el marco teórico del presente estudio, podemos conseguir una mirada general de la propuesta curricular chilena (ver figura 14).

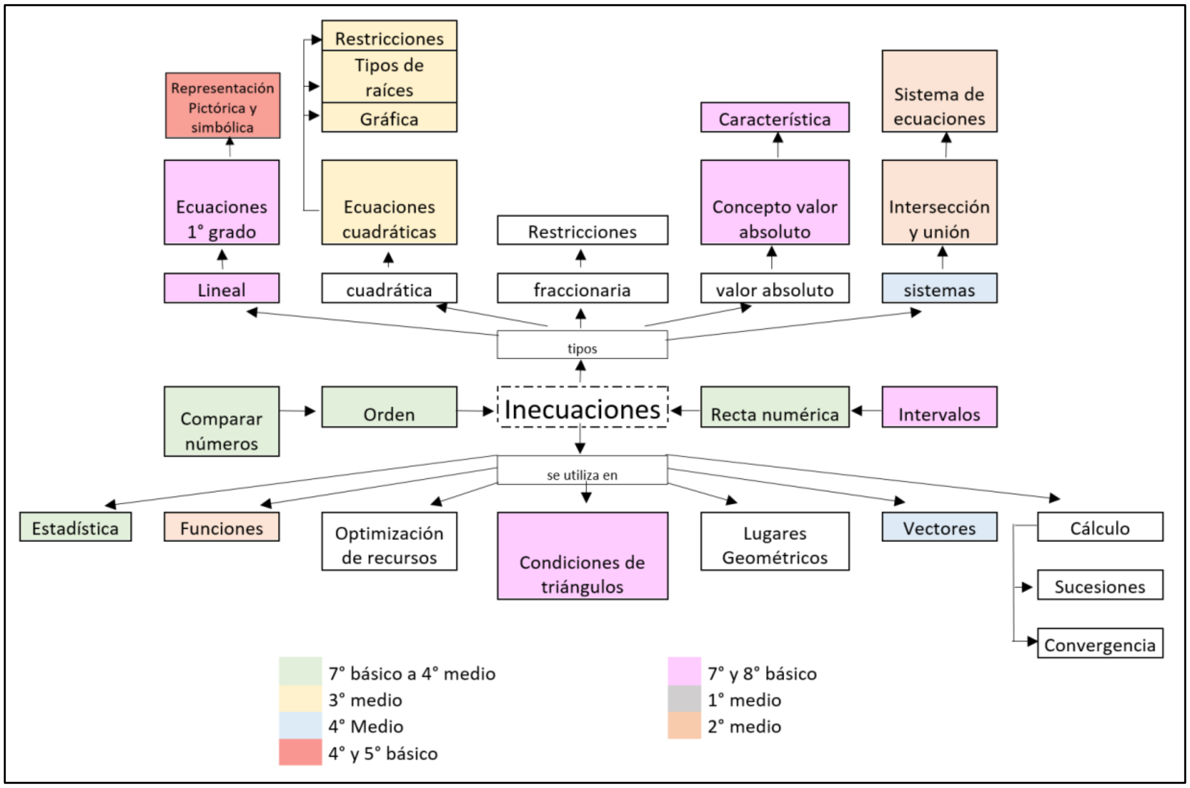


Figura 29. Esquema de complejidad comparado con el curriculum chileno
Fuente: elaboración propia.

En la figura 29 se asignó un color a cada nivel o curso para destacar los contenidos que están presentes en cada uno de ellos. De esta manera, se puede observar que el currículum chileno no abarca todos los contenidos necesarios para el aprendizaje de la inecuación, pues no se considera tres tipos de inecuaciones:

- Inecuaciones Cuadráticas: no están dentro del currículum, pero todo lo que es concepto previo (ecuaciones cuadráticas, restricciones y gráfica) sí está presente, por lo que se considera posible incorporar el estudio de ésta en el currículum de tercer año medio.
- Inecuaciones Fraccionarias: es un contenido que presenta un nivel de dificultad similar al de inecuaciones cuadráticas. El contenido previo para el aprendizaje de la inecuación fraccionaria sería la definición formal de una fracción y las restricciones

de éstas, lo que se considera en el currículum de segundo año medio, por lo tanto, este tipo de inecuación podría considerarse en el currículum de dicho nivel.

- Inecuaciones valor absoluto: no está contemplada dentro del curriculum, pero sus aprendizajes previos se ven en séptimo y octavo año básico, por lo tanto, sería posible considerar el estudio de esta inecuación en primer año medio.

4.2 ANÁLISIS DE TEXTOS ESCOLARES MINISTERIALES

Para llevar a cabo el análisis del tratamiento de la inecuación en los textos escolares chilenos se llevó a cabo un proceso de dos fases. La primera fase consistió en hacer una búsqueda de los textos de estudio de los distintos niveles para dar cuenta de cuáles son los niveles en los que se espera desarrollar el aprendizaje de la inecuación y qué se espera que los estudiantes aprendan en cada nivel de acuerdo a las actividades que se presentan en el texto y, en la segunda fase, relacionamos el tratamiento que se le da a la inecuación en los textos escolares chileno con la complejidad de dicho objeto matemático.

Cabe destacar que los textos escolares analizados son los otorgados por el Ministerio de Educación de Chile. Los de cuarto y quinto año básico son de la editorial Galileo Libros Ltda. del año 2016, en séptimo y octavo año básico son de la editorial SM Chile S.A. del año 2016, los de primero y segundo año medio corresponden a la misma editorial del periodo 2014-2016, el de tercer año medio corresponde a la editorial Cal y Canto del periodo 2012-2016 y el de cuarto año medio corresponde a la editorial Santillana del Pacífico S. A. del periodo 2013-2016.

En la primera fase se buscó, dentro de los contenidos y las actividades de los diferentes cursos, dónde aparecía algo específico de desigualdad y/o inecuaciones, como también aprendizajes esperados o actividades que necesitaban de esto como conocimiento previo. Este análisis se presentará mediante un esquema de progreso con lo encontrado por curso.

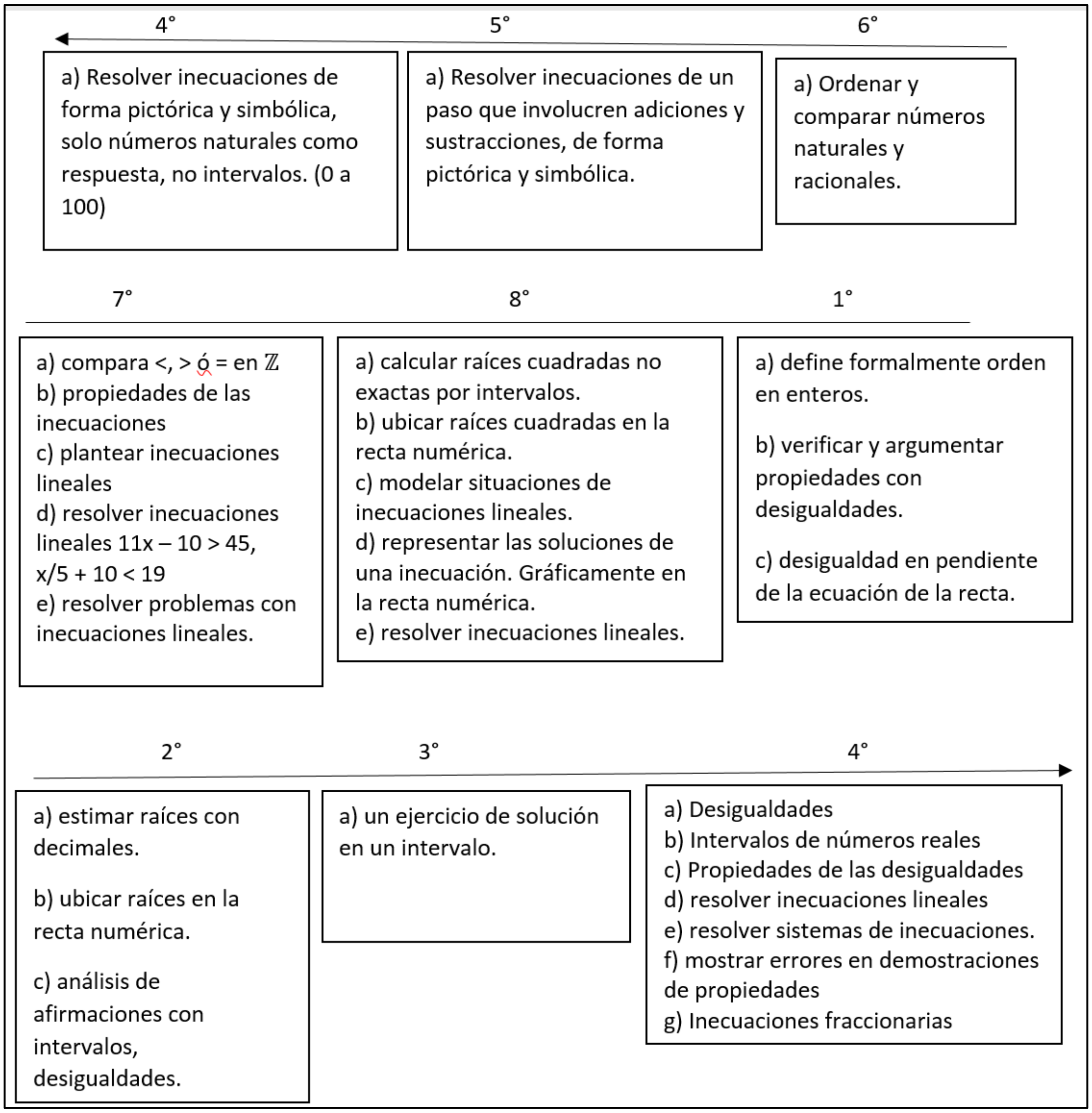


Figura 30. Contenidos de aprendizaje relacionados con la inecuación
Fuente: elaboración propia.

Como se puede observar a diferencia de la figura 30 del curriculum, en los textos escolares aparecen una mayor cantidad de contenidos que involucran a la desigualdades e inecuaciones, más notoriamente en sexto año básico, donde anteriormente en el curriculum no aparece nada dentro de los aprendizajes esperados o actividades propuestas para el docente en los planes y programas sobre desigualdades, en cambio en el texto escolar en las actividades de recordar aparecen algunas de orden de números que corresponden a axiomas de orden en las desigualdades. Y en cuarto año medio lo presentado en los textos con respecto a inecuaciones es mucho mayor a lo presentado en los curriculum. Esto nos muestra que los textos escolares lasactividades logran abarcar más que lo que propone el curriculum.

A continuación, se ejemplificará por curso lo destacado en la figura 30, a través de imágenes de actividades extraídas de los textos escolares de cada nivel.

4.2.1. ACTIVIDADES PROPUESTAS EN CUARTO AÑO BÁSICO

En cuarto año básico, en el capítulo 6 del texto escolar se presenta la siguiente actividad:

Llena el espacio con un número para que la inecuación sea verdadera.

1. $9 + \bullet > 19$	**2.** $17 < \bullet + 9$	**3.** $14 > 9 + \bullet$
4. $\bullet - 6 < 8$	**5.** $7 + \bullet > 14$	**6.** $12 > \bullet - 8$

Figura 31. Primera actividad propuesta en el texto escolar de cuarto básico.
Fuente: Textos escolar Galileo libros ltda (2016). p.151.

En la figura 31 se espera que el estudiantado encuentre un número para que se cumpla la desigualdad planteada, y los posibles resultados permitirán que comprendan que no existe una única solución.

Encuentra tres números naturales que hagan verdadera cada inecuación. Utiliza la recta numérica.

17. $5 + p < 13$	**18.** $15 - y > 8$	**19.** $6 + m > 17$
20. $43 - n < 12$	**21.** $124 + t < 160$	**22.** $66 + 104 + g > 200$

Figura 32. Segunda actividad propuesta en el texto escolar de cuarto básico.
Fuente: Textos escolar Galileo libros ltda (2016). p.151.

Como se puede ver, en la figura 32 se les pide algo similar a la actividad anterior, pero agregando la incógnita escrita como letra, esto ayudará más adelante que los alumnos en quinto año básico la trabajen de forma algebraica en cuanto a su resolución.

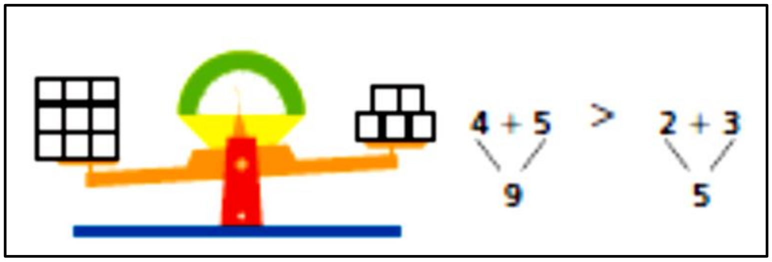


Figura 33. Tercera actividad propuesta en el texto escolar de cuarto básico.
Fuente: Textos escolar Galileo libros ltda (2016). p.150.

A pesar de que las actividades deberían ser más pictóricas, en el libro solo los ejemplos iniciales para explicar las inecuaciones poseen una representación con balanzas, como muestra la figura 33, las otras actividades propuestas en el texto de estudio implican el mismo nivel de complejidad de las actividades presentadas en este estudio, por lo que hemos hecho una selección al azar.

4.2.2. ACTIVIDADES PROPUESTAS EN QUINTO AÑO BÁSICO

En quinto año básico se identifica el objeto matemático en estudio en el capítulo 4, específicamente en la lección 4-6, donde se presentan las siguientes actividades de inecuación:

Usa una balanza para encontrar dos soluciones posibles a las inecuaciones.

1. $w > 0$	**2.** $x > 5$
3. $z > 9$	**4.** $g < 4$
5. $7 > t$	**6.** $4 < q$
7. $x > 7$	**8.** $z < 3$
9. $w > 24$	**10.** $r < 12$
11. $z < 15$	**12.** $g < 18$

Figura 34. Primera actividad propuesta en el texto escolar de quinto básico.
Fuente: Textos escolar Galileo libros ltda (2016). p. 89.

Como se puede ver en la figura 34, se solicita que el estudiantado represente las soluciones a través de balanzas. Dicha representación no se exigía en cuarto año básico, por lo que en este nivel académico se espera que estos logren una representación gráfica que permita una mejor visualización de las posibles soluciones.

Resuelve cada inecuación.

13. $y - 5 > 0$	**14.** $x + 4 < 10$
15. $s + 2 < 10$	**16.** $r + 9 < 23$
17. $p - 4 > 2$	**18.** $4 + r < 7$
19. $3 + x > 7$	**20.** $x - 5 > 9$
21. $z + 9 < 18$	**22.** $u > 3$
23. $v + 8 < 21$	**24.** $w - 12 > 9$

Figura 35. Segunda actividad propuesta en el texto escolar de quinto básico.
Fuente: Textos escolar Galileo libros ltda (2016). p.89.

En esta actividad (figura 35) se les pide a los alumnos resolver inecuaciones de un solo paso, y al comparar con las actividades de cuarto año básico es la primera vez que resuelven inecuaciones, por eso son solo sumando o restando un solo número para encontrar la solución.

Representa gráficamente las soluciones de cada inecuación mediante un dibujo.

25. $t > 2$	**26.** $y < 10$	**27.** $q < 7$

Figura 36. Tercera actividad propuesta en el texto escolar de quinto básico.
Fuente: Textos escolar Galileo libros ltda (2016). p. 90.

La figura 36, permite dar cuenta del énfasis que se le da en este nivel a que el estudiantado desarrolle la representación gráfica de una inecuación, lo que marca una diferencia con el año anterior.

Razonamiento Crítico explica dónde esta el error. Un estudiante representó gráficamente $x > 2$ como se muestra a continuación en el ejemplo. Luego responde ¿qué hizo mal el estudiante?

Figura 37. Cuarta actividad propuesta en el texto escolar de quinto básico.
Fuente: Textos escolar Galileo libros ltda (2016). p. 91.

Finalmente se plantea esta actividad (figura 37) de razonamiento crítico donde se pretende que el alumno encuentre el error presente y argumente con lo aprendido, esta es una de las actividades que se presentan, pero de razonamiento crítico es la única.

4.2.3. ACTIVIDADES PROPUESTAS EN SEXTO AÑO BÁSICO

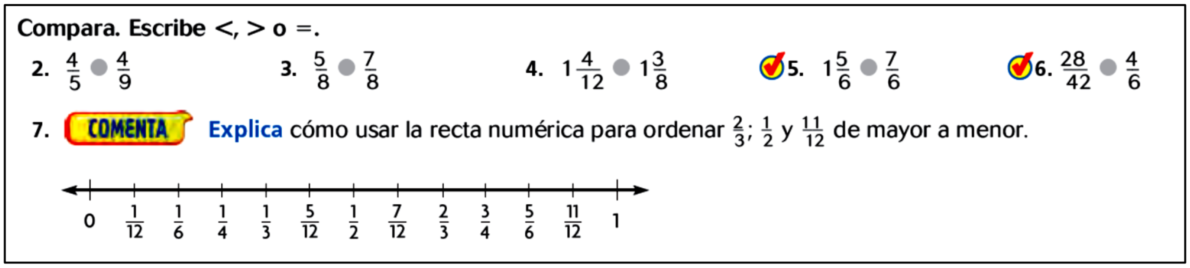
En sexto año básico las actividades presentes en su texto escolar de orden son las cuales aparecen en la primera unidad de trabajo números, la selección de actividades donde aparece algo de orden son:

▶ Comparar y ordenar números naturales hasta 100 000

Compara. Escribe $<$, $>$ o $=$.

1. 11 000 ● 11 050	**2.** 21 034 ● 22 345	**3.** 45 687 ● 45 238
4. 14 329 ● 14 329	**5.** 60 806 ● 68 600	**6.** 12 000 ● 1 200

Figura 38. Primera actividad propuesta en el texto escolar de sexto básico.
Fuente: Textos escolar Galileo libros ltda (2016). p.3


Compara. Escribe <, > o =.

2. $\frac{4}{5} \bullet \frac{4}{9}$ 3. $\frac{5}{8} \bullet \frac{7}{8}$ 4. $1\frac{4}{12} \bullet 1\frac{3}{8}$ 5. $1\frac{5}{6} \bullet \frac{7}{6}$ 6. $\frac{28}{42} \bullet \frac{4}{6}$

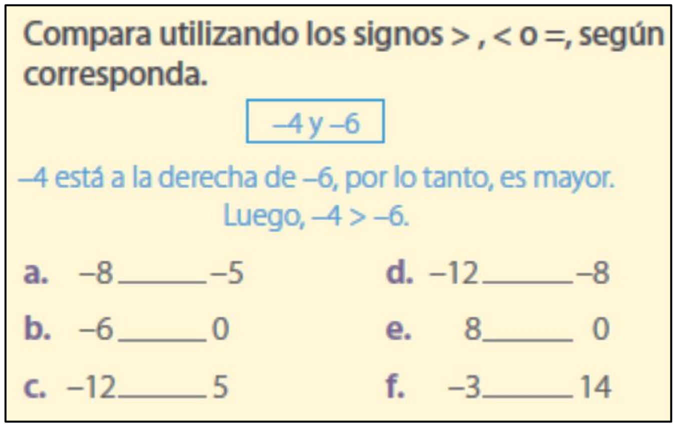
7. COMENTA **Explica** cómo usar la recta numérica para ordenar $\frac{2}{3}$; $\frac{1}{2}$ y $\frac{11}{12}$ de mayor a menor.

Figura 39. Segunda actividad propuesta en el texto escolar de sexto básico.
Fuente: Textos escolar Galileo libros ltda (2016). p. 33

Como se puede observar en las figuras 38 y 39, las actividades propuestas solo tienen una aplicación de desigualdad, concepto de orden, donde se deben comparar números naturales y racionales positivos, además de ordenarlos y/o ubicarlos en rectas numéricas. El nivel de dificultad a los años anteriores va aumentando, debido a que aumentan la cantidad de número que trabajan, pero no existe un grado de dificultad respecto a las desigualdades o inecuaciones como debería ocurrir siguiendo lo anteriormente presentado en cada curso. En este curso se debería formalizar algunos axiomas de orden para poder seguir el trabajo de las inecuaciones en séptimo y octavo año básico.

4.2.4. ACTIVIDADES PROPUESTAS EN SÉPTIMO AÑO BÁSICO

En el texto escolar de séptimo año básico se evidencia el tratamiento de la inecuación dentro de la unidad de Álgebra y relaciones proporcionales, además, se evidencia el tratamiento de las desigualdades a través de la comparación numérica de números enteros. A continuación, se presentan una selección de actividades presentes en el texto como ejemplo de lo descrito.



Compara utilizando los signos >, < o =, según corresponda.

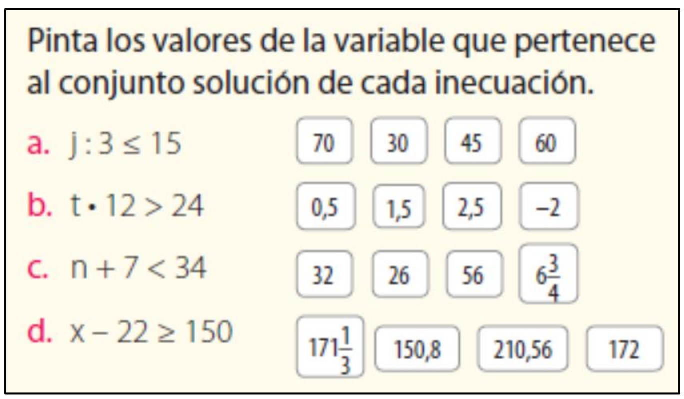
-4 y -6

-4 está a la derecha de -6, por lo tanto, es mayor. Luego, $-4 > -6$.

a. -8 ____ -5
b. -6 ____ 0
c. -12 ____ 5
d. -12 ____ -8
e. 8 ____ 0
f. -3 ____ 14

Figura 40. Primera actividad propuesta en el texto escolar de séptimo básico.
Fuente: Textos escolar SM Chile S,A (2016). p.18.

En esta actividad (figura 40) lo alumnos deben comparar números enteros considerando los axiomas de orden, apoyados de la recta numérica.



Pinta los valores de la variable que pertenece al conjunto solución de cada inecuación.

a. $j : 3 \leq 15$ — 70, 30, 45, 60
b. $t \cdot 12 > 24$ — 0,5, 1,5, 2,5, -2
c. $n + 7 < 34$ — 32, 26, 56, $6\frac{3}{4}$
d. $x - 22 \geq 150$ — $171\frac{1}{3}$, 150,8, 210,56, 172

Figura 41. Segunda actividad propuesta en el texto escolar de séptimo básico.
Fuente: Textos escolar SM Chile S,A (2016). p.122.

En la figura 41 se presenta una actividad en la que se pretende que el estudiantado logre determinar si los números presentados están, o no están, en el intervalo solución de la inecuación planteada.

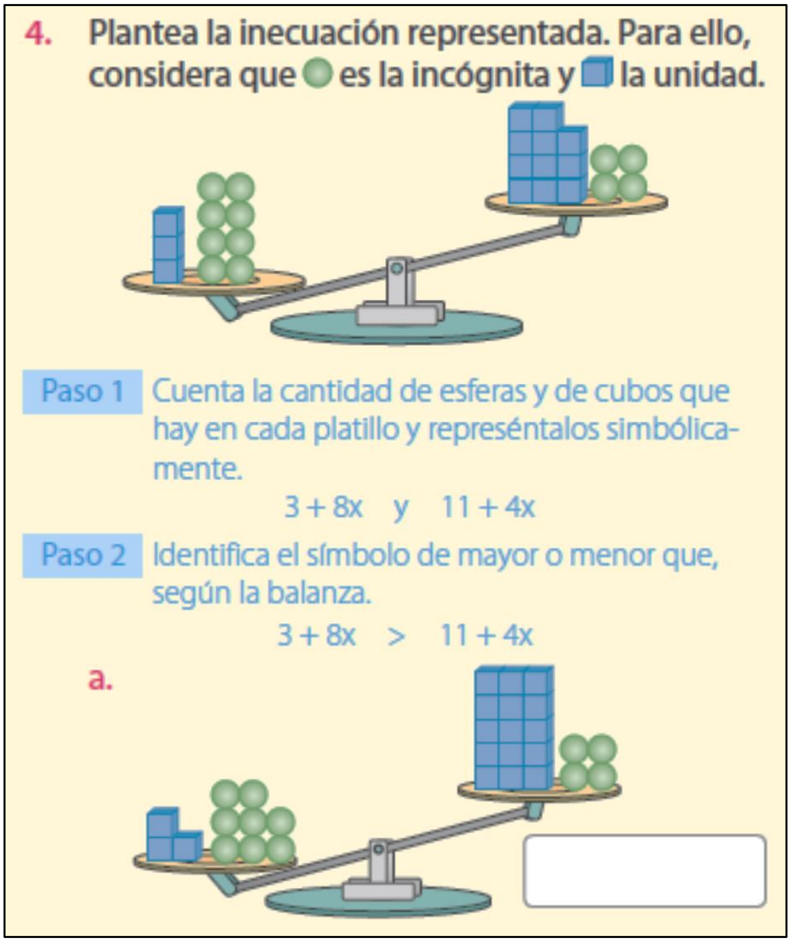


Figura 42. Tercera actividad propuesta en el texto escolar de séptimo básico.
Fuente: Textos escolar SM Chile S,A (2016). p.122.

Al igual que en cuarto y quinto año básico presenta actividades de representación a través de balanzas, para que de esta forma se vea el contenido de modo más pictórico. Como se puede apreciar en la figura 42.

Resuelve de manera algebraica.

$$\boxed{\frac{2p}{3} - 6 > 2}$$

$$\frac{2p}{3} - 6 > 2 \quad / + 6$$

$$\frac{2p}{3} > 8 \quad / \cdot 3$$

$$2p > 24 \quad / : 2$$

$$p > 12$$

a. $100 < 70 + 2w$

b. $6y + 6 > 6$

c. $5h - 10 < 10$

d. $x + \frac{2}{3} > \frac{5}{3}$

e. $5x + 1 > 26$

f. $4x + 4 > x + 16$

Figura 43. Cuarta actividad propuesta en el texto escolar de séptimo básico.
Fuente: Textos escolar SM Chile S,A (2016). p.122.

En cuanto a la actividad que se presenta en la figura 43, se observa que esta vez se plantea la resolución de inecuaciones de dos o más pasos, donde la incógnita ya no está con coeficiente uno.

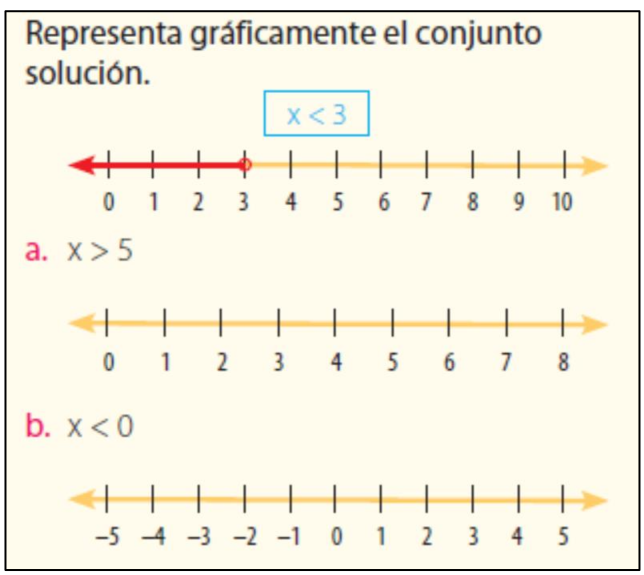


Figura 44. Quinta actividad propuesta en el texto escolar de séptimo básico.
Fuente: Textos escolar SM Chile S,A (2016). p.122.

En la actividad presentada en la figura 44, podemos identificar que en este nivel se espera que el estudiantado represente gráficamente las soluciones obtenidas en las inecuaciones.

> Modela con una ecuación o una inecuación y luego resuelve. Verifica, en cada caso, si la solución obtenida es pertinente al contexto del problema.

Figura 45. Sexta actividad propuesta en el texto escolar de séptimo básico.
Fuente: Textos escolar SM Chile S,A (2016). p.128.

Finalmente, en la figura 45 se observa que se espera la resolución de situaciones en contexto a través del modelamiento de una inecuación y que el intervalo solución se ajuste al contexto de la actividad. Este es el primer curso que traba con problemas en contextos de inecuaciones a diferencia de cuarto y quinto año básico que solo se vio la parte pictórica y algebraica de un paso.

4.2.5. ACTIVIDADES PROPUESTAS EN OCTAVO AÑO BÁSICO

En octavo año básico las actividades planteadas se relacionan tanto con las desigualdades, en la unidad de números con las raíces cuadradas, como las inecuaciones, en una sección de la unidad de Álgebra y Funciones. Para cada una de ellas se presentarán diferentes imágenes seleccionadas y extraídas del texto escolar con actividades que representen a cada contenido.

Señala dos números naturales consecutivos tales que uno sea menor y el otro mayor que cada raíz.

$\sqrt{144} < \sqrt{150} < \sqrt{169} \rightarrow 12 < \sqrt{150} < 13$

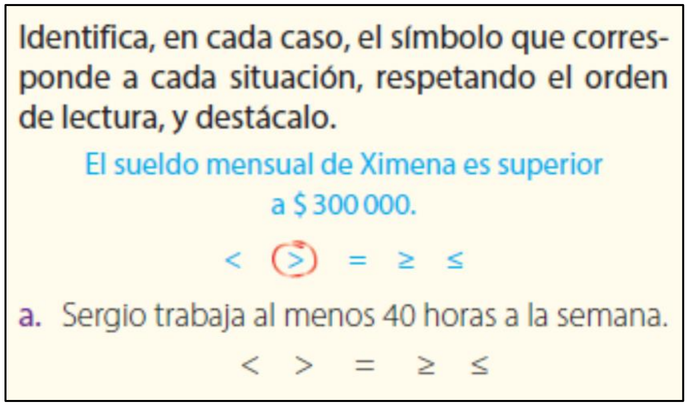
a. $\sqrt{2}$	d. $\sqrt{24}$	g. $\sqrt{89}$
b. $\sqrt{8}$	e. $\sqrt{27}$	h. $\sqrt{156}$
c. $\sqrt{15}$	f. $\sqrt{34}$	i. $\sqrt{264}$

Une con una línea la raíz cuadrada y el intervalo de la recta numérica que la contiene.

Raíz cuadrada	Intervalo
$\sqrt{2}$	Entre 4,5 y 4,6.
$\sqrt{5}$	Entre 5,5 y 6,1.
$\sqrt{10}$	Entre 6,5 y 7,1.
$\sqrt{21}$	Entre 7,9 y 8,1.
$\sqrt{35}$	Entre 1,4 y 1,5.
$\sqrt{48}$	Entre 8,9 y 9,1.

Figura 46. Primera actividad propuesta en el texto escolar de Octavo básico.
Fuente: Textos escolar SM Chile S,A (2016). p.64.

En las dos actividades presentadas en la figura 46 se pretende que el alumno logre dar un valor aproximado de las raíces cuadradas que no son exactas, por lo que debe comparar el valor de esta con valores conocidos, utilizando los axiomas de orden de las desigualdades.



Identifica, en cada caso, el símbolo que corresponde a cada situación, respetando el orden de lectura, y destácalo.

El sueldo mensual de Ximena es superior a $ 300 000.

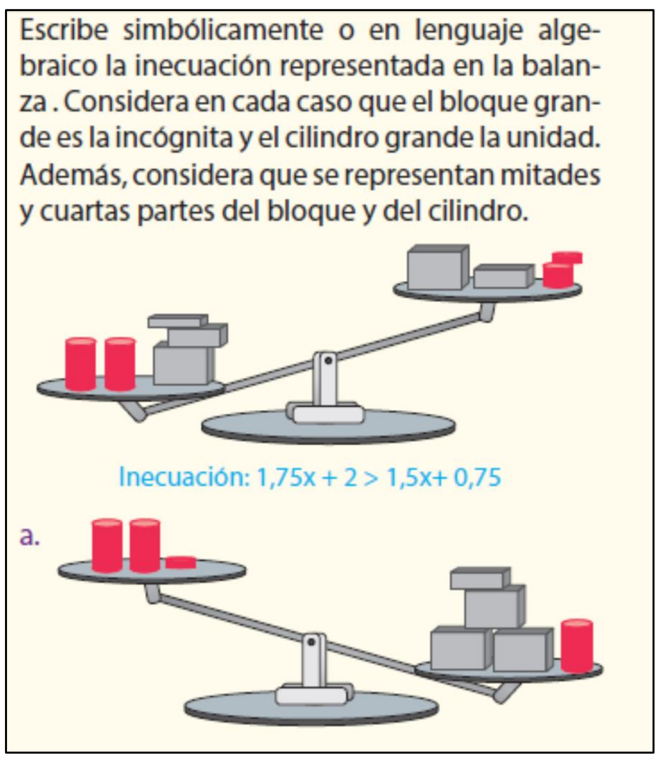
< > = ≥ ≤

a. Sergio trabaja al menos 40 horas a la semana.

< > = ≥ ≤

Figura 47. Segunda actividad propuesta en el texto escolar de Octavo básico.
Fuente: Textos escolar SM Chile S,A (2016). p.134.

Ahora bien, en la figura 47 se evidencia la primera actividad que contiene los cuatro símbolos de desigualdad, ya que en los años anteriores solo aparecen el "mayor que" (>) y el "menor que" (<), agregándose el concepto de "mayor igual que" (≥) y "menor igual que" (≤).



Escribe simbólicamente o en lenguaje algebraico la inecuación representada en la balanza. Considera en cada caso que el bloque grande es la incógnita y el cilindro grande la unidad. Además, considera que se representan mitades y cuartas partes del bloque y del cilindro.

Inecuación: $1{,}75x + 2 > 1{,}5x + 0{,}75$

a.

Figura 48. Tercera actividad propuesta en el texto escolar de Octavo básico.
Fuente: Textos escolar SM Chile S,A (2016). p.134.

Por otra parte en la figura 48, al igual que en séptimo año básico, se espera que el estudiantado representen las inecuaciones a través de balanzas, pero esta vez la actividad implica un grado de dificultad mayor, ya que se deben utilizar coeficientes racionales.

Modela cada situación con una inecuación que permita contestar la pregunta. Define las incógnitas con diferentes símbolos.

Una fábrica de tazones obtiene una ganancia de \$ 400 por cada tazón que vende. ¿Cuántos tazones debe vender para que la ganancia sea de, al menos, \$ 50 000?

x : cantidad de tazones

$400x \geq 50\,000$

a. Ester gana \$ 7500 por hora de trabajo. ¿Cuántas horas debe trabajar para ganar más de \$ 200 000?

b. Para poder usar la piscina municipal se debe pagar una cuota mensual de \$ 8000 y luego \$ 600 por cada vez que se utiliza. ¿Cuántas veces puede ir Cristina a la piscina si no quiere gastar más de \$ 12 000 mensuales?

Figura 49. Cuarta actividad propuesta en el texto escolar de Octavo básico.
Fuente: Textos escolar SM Chile S,A (2016). p.135.

En relación a la figura 49 se puede destacar que en la unidad también se contemplaron actividades que implican la modelización de situaciones contextualizadas a través de inecuaciones. Sin embargo, el grado de dificultad es mayor a la presentada en séptimo año básico ya que contienen más datos a representar y las inecuaciones poseen mayor cantidad de términos.

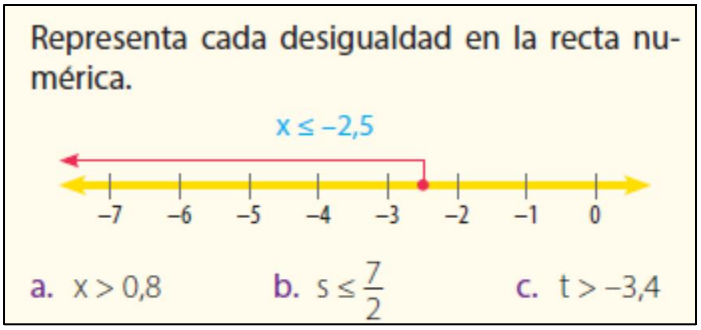


Figura 50. Quinta actividad propuesta en el texto escolar de Octavo básico.
Fuente: Textos escolar SM Chile S,A (2016). p.137.

A partir de la actividad presentada en la figura 50, se puede señalar que en este curso o nivel también se espera que el estudiantado logre graficar las soluciones en una recta numérica, pero con números racionales como soluciones y con las cuatro opciones posibles ($<$, $>$, $\leq$, $\geq$), de modo que se comprenda la diferencia entre un símbolo y otro en las soluciones.

A demás, en este nivel, se consideran actividades que permitan (al estudiantado) representar soluciones pasando de un enunciado a una representación gráfica, como muestra la figura 51.

Representa en la recta numérica el intervalo de valores definido en cada situación.

a. El costo del litro de gasolina será de al menos $750.

b. Tras resolver una inecuación, Eva la comunicó a su curso: "la incógnita es menor o igual que –7,9".

c. Si las predicciones demográficas son correctas, para el año 2050 la población humana superará los 9 000 000 000 de habitantes.

Figura 51. Sexta actividad propuesta en el texto escolar de Octavo básico.
Fuente: Textos escolar SM Chile S,A (2016). p.137.

En cuanto a la resolución de inecuaciones, se puede apreciar que las actividades presentadas en este nivel implican un grado de dificultad mayor (ver figura 52), pues la incógnita aparece más de una vez dentro de la inecuación, y los coeficientes son números racionales.

Resuelve algebraicamente las inecuaciones. Escribe cada paso.

$$-4x + 8 \geq 5 \quad /-8$$
$$-4x \geq -3 \quad /:(-4)$$
$$x \leq \frac{3}{4}$$

a. $\frac{1}{2}x + \frac{1}{4} \leq \frac{3}{4}x$

b. $\frac{2}{5}x - 6 \leq \frac{1}{2}x - 5$

Figura 52. Séptima actividad propuesta en el texto escolar de Octavo básico.
Fuente: Textos escolar SM Chile S,A (2016). p.144.

Finalmente, cabe destacar que en octavo año básico los problemas presentados en contexto incluyen más de una inecuación dentro del enunciado, comparando más de una variable, lo que se puede observar en la figura 53, donde las variables a considerar son largo y ancho.

Resuelve los problemas.

a. El largo **a** y el ancho **b** de una mesa rectangular (expresados en centímetros) se han medido con un error menor que 1 cm. Los valores para las longitudes a y b son:

$$130 \leq a \leq 131 \text{ y } 65 \leq b \leq 66$$

- ¿Entre qué números está comprendido el perímetro?
- ¿Entre qué números está comprendida el área?

Figura 53. Octava actividad propuesta en el texto escolar de Octavo básico.
Fuente: Textos escolar SM Chile S,A (2016). p.145.

4.2.6. ACTIVIDADES PROPUESTAS EN PRIMER AÑO MEDIO

Para primer año medio las actividades no son específicamente de inecuaciones o desigualdades sino más bien de otras unidades con otros contenidos pero que es necesario conocer los conceptos para poder realizar lo solicitado en cada una de las actividades planteadas, dentro de ellas se seleccionó las siguientes:

Repasa

Orden en enteros

Sean a y b números enteros.

- Si $a > 0$, entonces:
  $-a < 0$
  $a > -a$
- $a > b$ si y solo si $(a - b) > 0$
  $a < b$ si y solo si $(a - b) < 0$
- Ejemplos:
  $-5 > -8$
  $-11 < -7$

Figura 54. Primera actividad propuesta en el texto escolar de primero medio.
Fuente: Textos escolar SM Chile S,A (2014-2016). p.16.

En la figura 54 se presenta un cuadro que destaca en el libro de texto, donde se muestran conceptos previos que el alumno tiene que haber visto en algún nivel anterior, pero en el análisis anterior, se puede destacar que dichos conceptos previos se adquirieron en séptimo y octavo año básico, a pesar de ello estos ajustes aún no se habían implementado para estos actuales alumnos de primer año medio.

Asimismo, se puede observar que las actividades presentadas en las figuras 55 y 56, son directamente relacionadas con los axiomas de orden presentes en las desigualdades e inecuaciones, comparando números enteros de una manera más formal.

13. Desafío. Verifica que si $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ con a, b, c y d $\in \mathbb{Z}$, b y d $\neq 0$, entonces:

$$\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$$

Figura 55. Segunda actividad propuesta en el texto escolar de primero medio.
Fuente: Textos escolar SM Chile S,A (2014-2016). p.19.

14. Argumenta. ¿Es cierto que si **a** y **b** son números enteros positivos, tales que $a > b$, entonces $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$? Justifica tu respuesta.

Figura 56. Tercera actividad propuesta en el texto escolar de primero medio.
Fuente: Textos escolar SM Chile S,A (2014-2016). p.19.

4.2.7. ACTIVIDADES PROPUESTAS EN SEGUNDO AÑO MEDIO

Para segundo año medio las actividades no son específicamente de inecuaciones o desigualdades (al igual que en primer año medio), sino más bien de otras unidades con otros contenidos, pero resulta necesario conocer dichos conceptos para poder desarrollar lo solicitado. Dentro de esas actividades se presentará algunas a continuación:

Para la unidad de números reales se presentan tipos de ejercicios como los presentados en las figuras 57 y 58, donde se aplica la desigualdad de número en cuanto al orden de raíces y logaritmos.

11 ¿Cuál(es) de las siguientes afirmaciones es(son) verdadera(s)?

I. Existen infinitos números reales **x** tales que $\sqrt{2} < x < \sqrt{3}$.

II. Existen infinitos números racionales **x** tales que $\sqrt{2} < x < \sqrt{3}$.

III. Existe una cantidad finita de números irracionales **x** tales que $\sqrt{2} < x < \sqrt{3}$.

A. Solo I
B. Solo II
C. I y II
D. I y III
E. I, II y III

Figura 57. Primera actividad propuesta en el texto escolar de segundo medio.
Fuente: Textos escolar SM Chile S,A (2014-2016). p.83.

24 ¿Cuál(es) de las siguientes afirmaciones es(son) verdadera(s)?

I. La base de un logaritmo no puede ser negativa.

II. Si **a**, **b** $\in \mathbb{R}^+$ y **a<b**, entonces **log a** > **log b**.

III. Si $\mathbf{x^2} > \mathbf{y^2}$, entonces $\log x^2 > \log y^2$.

A. Solo I
B. Solo III
C. I y II
D. I y III
E. I, II y III

Figura 58. Segunda actividad propuesta en el texto escolar de segundo medio.
Fuente: Textos escolar SM Chile S,A (2014-2016). p.84.

Asimismo, se requiere del conocimiento de las desigualdades o inecuaciones para resolución de actividades en la unidad de funciones, donde se definen funciones creciente o decreciente, al igual que para definir el dominio o recorrido de una función (ver figura 59).

Una función **f(x)** es creciente si se cumple que si **a > b** entonces **f(a) > f(b)**.

Una función **f(x)** es **decreciente** si se cumple que si **a > b** entonces **f(b) > f(a)**.

Figura 59. Trcera actividad propuesta en el texto escolar de segundo medio. Fuente: Textos escolar SM Chile S,A (2014-2016). p.207.

4.2.8. ACTIVIDADES PROPUESTAS EN TERCER AÑO MEDIO

Para tercer año medio, la única actividad donde aparece de forma más explícita la desigualdad e inecuaciones es la que se muestra en la figura 60.

14 Las soluciones de la ecuación $(x+5)(x-5)-(5-x)(5+x)=0$, son números que pertenecen al conjunto:

a. $\{x \in \mathbb{R} / x \leq -5\}$

b. $\{x \in \mathbb{R} / -5 < x \leq -3\}$

c. $\{x \in \mathbb{R} / -6 < x \leq 5\}$

d. $\{x \in \mathbb{R} / x \geq -5\}$

e. $\{x \in \mathbb{R} / x \leq -6\}$

Figura 60. Primera actividad propuesta en el texto escolar de tercero medio. Fuente: Textos escolar Cal y Canto (2012-2016). p.145.

Las demás actividades que aparecen no presentan el contenido.

4.2.9. ACTIVIDADES PROPUESTAS EN CUARTO AÑO MEDIO

Para cuarto año medio en el texto escolar aparece la unidad de inecuaciones lineales, donde se propone como objetivo de aprendizaje el representar conjuntos numéricos usando lenguaje matemático. Para el logro de dicho objetivo de aprendizaje se presentan las siguientes actividades de la figura 61.

1. Escribe por extensión los siguientes conjuntos.

a. $C = \{x \in \mathbb{N} \,/\, x < 12\}$
b. $D = \{x \in \mathbb{N} \,/\, x \geqslant 6\}$
c. $E = \{x \in \mathbb{Z} \,/\, -2 < x < 9\}$
d. $F = \{x \in \mathbb{Z} \,/\, x \text{ es primo} \wedge x < 20\}$
e. $G = \{x \in \mathbb{N} \,/\, -7{,}5 < x < 6\}$

2. Escribe por comprensión los siguientes conjuntos.

a. $R = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$
b. $S = \{-7, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0\}$
c. $T = \{-5, -3, -1, 1, 3, 5, 7, 9\}$
d. $U = \{18, 24, 30, 36, 42, 48, ...\}$
e. $V = \{6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20\}$
f. $W = \{13, 17, 19, 23, 29, 31, 37\}$

Figura 61. Primera actividad propuesta en el texto escolar de cuarto medio.
Fuente: Textos escolar Santillana del Pacífico S.A (2013-2016). p.87.

Otro objetivo propuesto en este nivel es el de expresar información por medio de desigualdades y para el logro de éste se presentan las actividades de la figura 62.

7. **Expresa la información de las siguientes situaciones utilizando desigualdades.**
   a. Solo podrán asistir las personas cuya edad no sea inferior a 21 años.
   b. Si el nivel de intensidad sonora (NIS) de un sonido es superior a 50 dB, puede provocar daños en el oído.
   c. Las frecuencias audibles por el ser humano son aquellas que fluctúan entre 20 Hz y 20 000 Hz.
   d. El precio del dólar se mantiene bajo los $ 500, pero nunca es inferior a $ 450.

Figura 62. Segunda actividad propuesta en el texto escolar de cuarto medio. Fuente: Textos escolar Santillana del Pacífico S.A (2013-2016). p.102.

Un tercer objetivo por lograr en este nivel es el de representar conjuntos numéricos reales usando intervalos. Para ellos se proponen la actividad presentada en la figura 63.

Determina si los siguientes conjuntos están definidos por extensión o por comprensión. Explica el por qué.

a. $A = \{x \in \mathbb{N} \,/\, x$ es múltiplo de $3\}$
b. $T = \{1, 2, 4, 8, 16, 32, ...\}$
c. $P = \{y \in \mathbb{N} \,/\, y$ es divisor de $27\}$
d. $O = \{3, 9, 15, 21, 27...\}$
e. $Q = \{q \in \mathbb{Z} \,/\, q$ es impar $\wedge$ q es divisor de $24\}$
f. $B = \{d \in \mathbb{N} \,/\, d$ es compuesto $\wedge$ d es par$\}$

Figura 63. Tercera actividad propuesta en el texto escolar de cuarto medio. Fuente: Textos escolar Santillana del Pacífico S.A (2013-2016). p.102.

Un cuarto objetivo de aprendizaje a lograr en este nivel es el de conocer y utilizar las propiedades de las desigualdades. Para lograr este objetivo el libro del ministerio propone las actividades presentadas en la figura 64 y 65.

5. **Considera la expresión $H = 2t^2 - 15t + 28$. Usando las propiedades de las desigualdades, demuestra que si $5 \leqslant t \leqslant 9$, entonces $3 \leqslant H \leqslant 55$.**

Figura 64. Cuarta actividad propuesta en el texto escolar de cuarto medio. Fuente: Textos escolar Santillana del Pacífico S.A (2013-2016). p.99.

4. Si $a > 0$ y $b > 0$, demuestra que $a + b > \frac{a^2 + b^2}{a + b}$.

Figura 65. Quinta actividad propuesta en el texto escolar de cuarto medio.
Fuente: Textos escolar Santillana del Pacífico S.A (2013-2016). p.101.

Un quinto objetivo por lograr sería el de resolver inecuaciones lineales y sistemas de inecuaciones. Para este último objetivo el libro del ministerio propone las actividades presentadas en las figuras 66, 67 y 68.

1. Resuelve las siguientes inecuaciones, considerando la condición dada para x.

a. $3x - 2(4x - 7) \geqslant 9, x \in \mathbb{N}$

b. $2x + 3 > x - 1, x \in \mathbb{Z}^-$

c. $\frac{5 + 3x}{23} < 1, x \in \mathbb{N}$

d. $-\frac{9x}{2} - 1 < 2 - 5x, x \in \mathbb{R}^-$

e. $x(x + 6) + (3 - x)x \leqslant 13 - x, x \in \mathbb{Z}^+$

f. $\frac{4x}{3} + 2 < \frac{10}{3}, x \in \mathbb{N}$

Figura 66. Sexta actividad propuesta en el texto escolar de cuarto medio.
Fuente: Textos escolar Santillana del Pacífico S.A (2013-2016). p.115.

2. Resuelve los siguientes sistemas de inecuaciones lineales y representa gráficamente su solución.

a. $\begin{array}{l|} 3x + 2 \geqslant x - 4 \\ 5 - x \leqslant -2 \end{array}$

b. $\begin{array}{l|} 5 + 3x < x + 17 \\ x + 18 \geqslant -8x \end{array}$

c. $\begin{array}{l|} x + 0{,}5 \leqslant 1{,}2x - 0{,}2 \\ -x + 4{,}5 > 0{,}3 \end{array}$

d. $\begin{array}{l|} x + 3 \geqslant 11 - x \\ 4x \leqslant 45 - x \\ x - 18 > -2x \end{array}$

e. $\begin{array}{l|} 3x + 2 < x - 4 \\ 7x - 3 > 35 + 5x \\ 1 - 2x > 25 + x \end{array}$

f. $\begin{array}{l|} 21 - 6x \geqslant 2x - 19 \\ 3 + 8x < 6x + 7 \\ 1 + x \leqslant 0 \\ 5x - 9 > 2x - 3 \end{array}$

Figura 67. Séptima actividad propuesta en el texto escolar de cuarto medio.
Fuente: Textos escolar Santillana del Pacífico S.A (2013-2016). p.118.

5. **Resuelve los siguientes problemas.**

a. La suma de cuatro números consecutivos excede a 42 y no supera 50. Determina el número mayor.

b. En un triángulo, las medidas de dos de sus lados son 3 cm y 7 cm. Si la medida del tercer lado debe ser inferior a la suma de las medidas de los otros dos lados, y superior a su diferencia, ¿cuáles son las posibles medidas que puede tener el tercer lado, sabiendo que el valor de este es un número entero?

c. Un músico puede gastar entre $ 190 000 y $ 210 000 en un equipo de música y algunos CD. Si el equipo cuesta $ 170 000 y los CD $ 8 000 cada uno, encuentra la cantidad mínima y máxima de CD que puede comprar.

Figura 68. Octava actividad propuesta en el texto escolar de cuarto medio.
Fuente: Textos escolar Santillana del Pacífico S.A (2013-2016). p.118.

Finalmente, cabe destacar que en el libro de este nivel se agregan unas actividades extra a las propuestas en sus objetivos (ver figura 69), que corresponde a inecuaciones no lineales.

1. **Resuelve las siguientes inecuaciones no lineales.**

a. $\frac{x+2}{x} > 0$ c. $\frac{x}{x-6} > 1$

b. $\frac{x+3}{x-5} > 0$ d. $\frac{3x}{2-x} > 2$

Figura 69. Novena actividad propuesta en el texto escolar de cuarto medio.
Fuente: Textos escolar Santillana del Pacífico S.A (2013-2016). p.119.

Aun así, al compararlo con los años de séptimo y octavo básico, el nivel de complejidad no es correspondiente a un alumno de cuarto año medio, ya que las actividades de inecuaciones lineales son iguales a las revisadas anteriormente en esos cursos, pero se debe considerar que los alumnos de cuarto año medio no tuvieron inecuaciones en ningún año escolar anterior, debido a que esto se ha implementado desde el 2016.

A modo resumen como se puede ver en las diferentes actividades mostrada desde cuarto año básico hasta cuarto año medio, tenemos que en cuarto año básico la actividad pretende que los estudiantes comprendan el concepto de inecuación como una desigualdad donde el resultado no es solo uno, para luego formalizarlo en quinto año básico. En séptimo y octavo año básico van agregando dificultad a estas inecuaciones lineales, esto demuestra una buena progresión en el tratamiento del contenido. Sin embargo, en primero, segundo y tercer año medio la inecuación está presente en actividades muy puntuales y es considerada como un conocimiento previo. Finalmente, en cuarto año medio se retoma la unidad de inecuaciones (explícitamente), recordando todo lo trabajado hasta octavo año básico y agregando sistemas de inecuaciones con una incógnita donde, sin ninguna formalización, se agregan ejercicios de inecuaciones fraccionarias.

A continuación, en la figura 70, se observa gráficamente la relación de los textos escolares chilenos con la propuesta de complejidad de la inecuación.

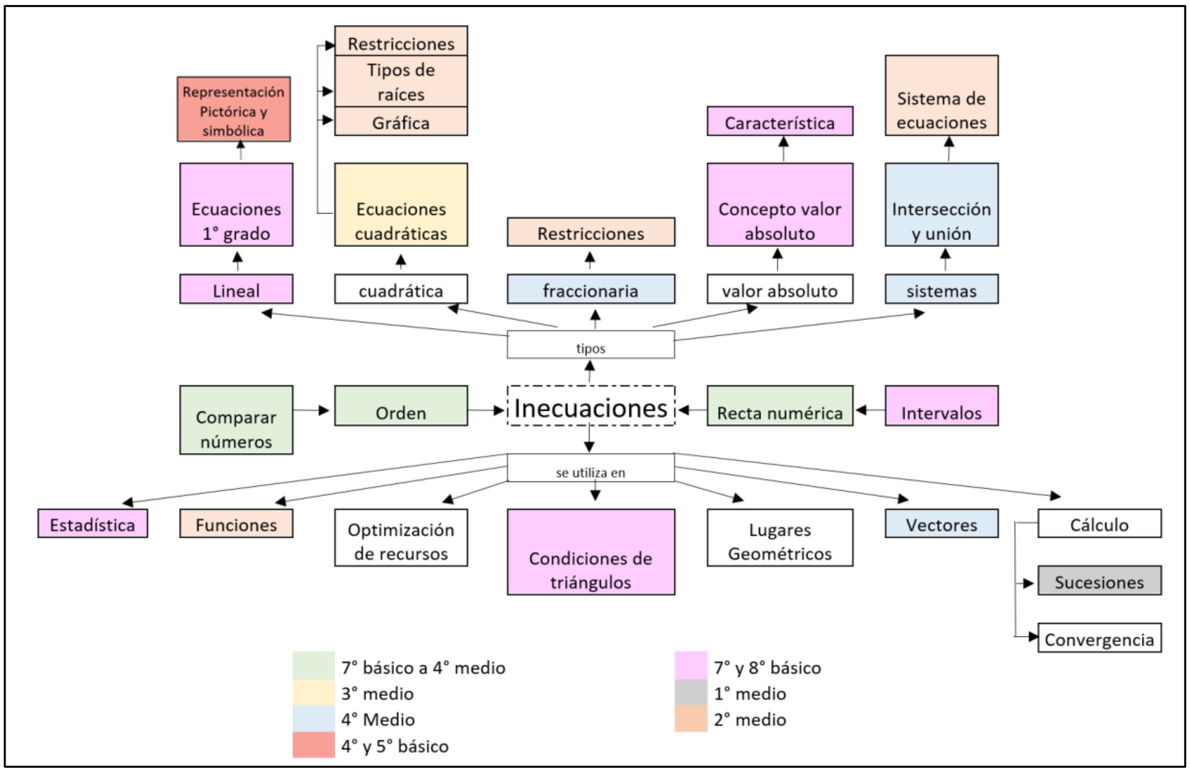


Figura 70. Esquema de complejidad comparado con los textos escolares chilenos
Fuente: elaboración propia.

En esta figura se asignó un color a cada nivel (o curso) para destacar los contenidos presentes en los textos escolares, de esta manera, se puede observar que, de acuerdo con la figura 1, no se consideran todos los contenidos necesarios para el aprendizaje de la inecuación. A la vez, podemos dar cuenta que los textos escolares contemplan más contenidos de los declarados en el currículum, como es el caso de las inecuaciones fraccionarias. Sin embargo, al igual que en el currículum, se observa la ausencia de las inecuaciones cuadráticas, la inecuación valor absoluto y el desarrollo acabado de las inecuaciones fraccionarias.

4.3. ANÁLISIS DE TEXTOS ESCOLARES RUSOS

Es importante destacar que la enseñanza escolar en Rusia es de 11 años. En este análisis se presentará solo los temas que se relacionan con la comparación de números, las desigualdades e inecuaciones. Para que la información sea más clara el análisis se presentará de la misma forma que fue abordado en los apartados anteriores. Los textos escolares Rusos analizados corresponden a la editorial Mnemozina, Moscú, 2001-2002 y 2009.

A continuación, en la figura 71, se presentan los objetivos de aprendizaje considerados en los niveles analizados

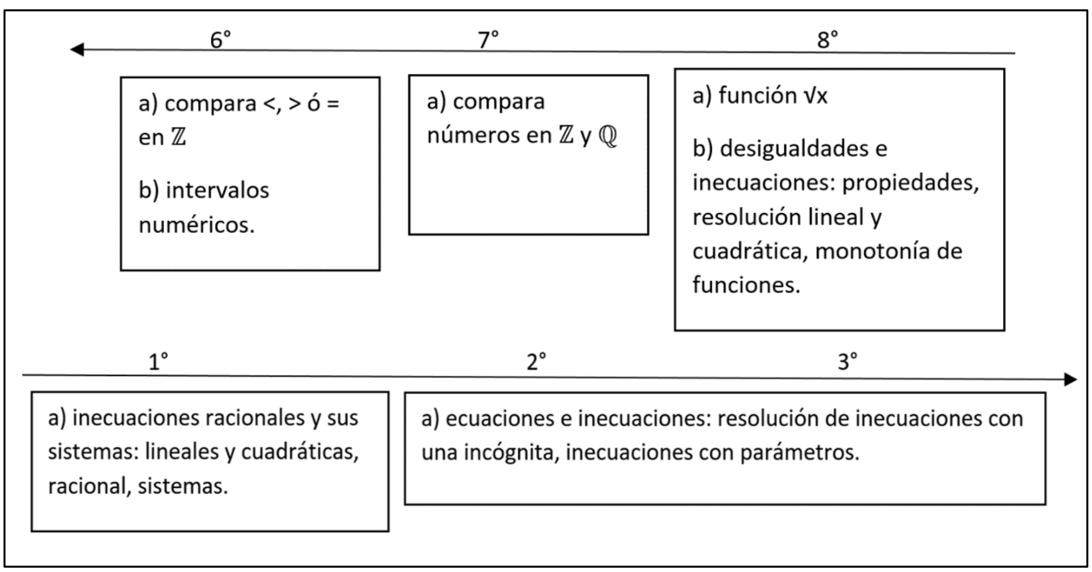


Figura 71. Esquema de contenidos de inecuación en textos escolares rusos
Fuente: elaboración propia.

Ahora de forma más específica se presentará por año lo que presentan los textos escolares rusos respecto a las desigualdades e inecuaciones.

TEXTO: MATEMÁTICA 6ta. CLASE

AUTOR: I.I. Zubareva, A.G. Mordkovich

EDITORIAL: Mnemozina, Moscú (8va. edición, 2009)

- Números positivos y negativos. Coordenadas.
- Números positivos y negativos. Recta coordenada.
- Valor absoluto y números opuestos.
- Comparación de números.
- Suma algebraica y sus propiedades.
- Reglas para el cálculo de los valores de la suma algebraica de dos números.
- Intervalos numéricos.
- Regla de la multiplicación para problemas de conteo.
- Transformación de expresiones literales.
- La matemática alrededor de nosotros.

TEXTO: ÁLGEBRA 7ma. CLASE

AUTOR: A.G. Mordkovich

EDITORIAL: Mnemozina, Moscú (4ta. edición, 2001)

- Lenguaje matemático. Modelos matemáticos.
- Función lineal.
- Función cuadrática $y = x^2$.
- Sistemas de ecuaciones con dos incógnitas

TEXTO: ÁLGEBRA 8va. CLASE

AUTOR: A.G. Mordkovich

EDITORIAL: Mnemozina, Moscú (4ta. Edición, 2001)

- Fracciones algebraicas.
- Nociones fundamentales.
- Función cuadrática. Función $y = \frac{k}{x}$.
- Función $y = kx^2$, sus propiedades y gráfico.
- Función $y = \frac{k}{x}$, sus propiedades y gráfico.

- Cómo construir el gráfico de la función $y = f(x + l)$ si se conoce el gráfico de la función $y = f(x)$.
- Cómo construir el gráfico de la función $y = f(x) + m$ si se conoce el gráfico de la función $y = f(x)$.
- Cómo construir el gráfico de la función $y = f(x + l) + m$ si se conoce el gráfico de la función $y = f(x)$.
- Función $y = ax^2 + bx + c$, sus propiedades y gráfico.
- Solución gráfica de ecuaciones cuadráticas.
- Función $y = \sqrt{x}$. Propiedades de la raíz cuadrada.
- Noción de raíz cuadrada de un número no negativo.
- Función $y = \sqrt{x}$, sus propiedades y gráfico.
- Propiedades de las raíces cuadradas.
- Transformación de expresiones que contienen la operación de extracción de la raíz cuadrada.
- Números reales.
- Conjunto de los números racionales.
- Números irracionales.
- Conjunto de los números reales.
- Valor absoluto de un número real.
- Valores aproximados de los números reales.
- Desigualdades e inecuaciones.
- Propiedades de las desigualdades numéricas.
- Resolución de inecuaciones lineales.
- Resolución de inecuaciones cuadráticas.
- Investigación de la monotonía de funciones.

TEXTO: ÁLGEBRA 9na. CLASE

AUTOR: A.G. Mordkovich

EDITORIAL: Mnemozina, Moscú (4ta. Edición, 2002)

- Inecuaciones racionales y sus sistemas.
- Inecuaciones lineales y cuadráticas.
- Inecuaciones racionales.
- Sistemas de inecuaciones.
- Funciones numéricas
- Definición de función numérica. Dominio y recorrido de una función.
- Formas de definición de una función.
- Propiedades de las funciones.
- Funciones pares e impares.
- Función $y = x^n$ $(n \in \mathbb{N})$, sus propiedades y gráfico.
- Función $y = x^{-n}$ $(n \in \mathbb{N})$, sus propiedades y gráfico.
- Cómo construir el gráfico de la función $y = mf(x)$ si se conoce el gráfico de la función $y = f(x)$.
- Elementos de las funciones trigonométricas
- Funciones trigonométricas de argumento numérico.
- Funciones $y = \sin x$ y $y = \cos x$, sus propiedades y gráficos.

TEXTO: ÁLGEBRA E INTRODUCCIÓN AL ANÁLISIS 10va y 11va CLASE

AUTOR: A.G. Mordkovich

EDITORIAL: Mnemozina, Moscú (2da. Edición, 2001)

- Funciones trigonométricas.
- Funciones trigonométricas de argumento numérico.
- Funciones trigonométricas de argumento angular.
- Función $y = \sin x$, sus propiedades y gráfico.
- Función $y = \cos x$, sus propiedades y gráfico.
- Periodicidad de las funciones $y = \sin x$ y $y = \cos x$.

- Cómo construir el gráfico de la función $y = mf(x)$ si se conoce el gráfico de la función $y = f(x)$.
- Cómo construir el gráfico de la función $y = f(kx)$ si se conoce el gráfico de la función $y = f(x)$.
- Funciones $y = \tan x$ y $y = \cot x$, sus propiedades y gráficos.
- Derivadas.
- Límite de una sucesión numérica.
- Límite de una función.
- Ecuación de la recta tangente al gráfico de una función.
- Utilización de la derivada para la investigación de la monotonía y los extremos de una función.
- Utilización de la derivada para el cálculo de los valores máximos y mínimos de magnitudes.
- Primitiva e integral.
- Potencias y raíces. Funciones potenciales.
- Noción de raíz n-ésima de un número real.
- Función $y = \sqrt[n]{x}$, sus propiedades y gráfico.
- Propiedades de la raíz n-ésima.
- Transformación de expresiones que contienen radicales.
- Generalización de la noción de potencia.
- Funciones potenciales, sus propiedades y gráficos.
- Funciones exponenciales y logarítmicas.
- Función exponencial, sus propiedades y gráficos.
- Inecuaciones exponenciales.
- Noción de logaritmo.
- Función $y = log_a x$, sus propiedades y gráfico.
- Inecuaciones logarítmicas.
- Derivación de funciones exponenciales y logarítmicas.
- Ecuaciones e inecuaciones. Sistemas de ecuaciones e inecuaciones.
- Resolución de inecuaciones con una incógnita.

- Ecuaciones e inecuaciones con parámetros.

A modo resumen como se puede ver en los diferentes contenidos mostrados desde la sexta clase equivalente a sexto año básico, hasta doceava clase equivalente a tercer año medio, tenemos que en los textos escolares rusos se va implementado de manera progresiva los contenidos y su relación con las ecuaciones e inecuaciones, de este modo se abarca todos los contenidos que involucran desigualdades e inecuaciones.

A continuación, en la figura 72, se observa gráficamente la relación de los textos escolares rusos con la propuesta de complejidad de la inecuación.

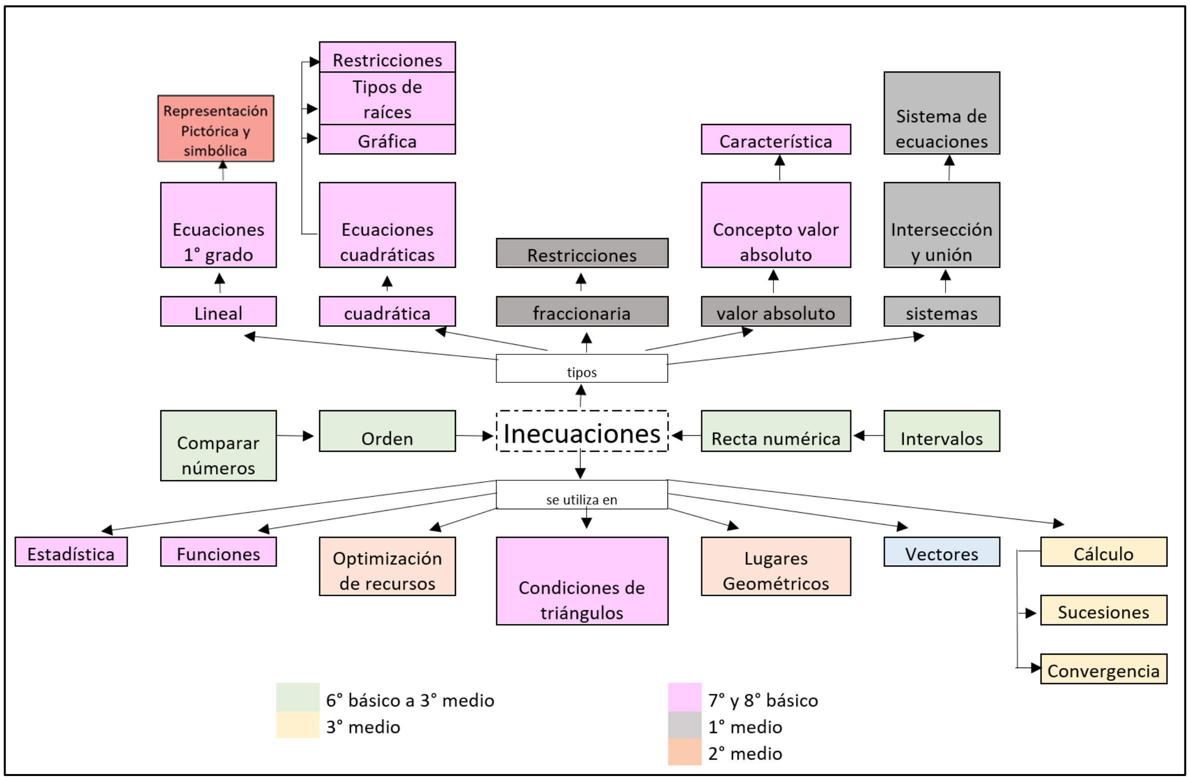


Figura 72. Esquema de complejidad comparado con los textos escolares rusos

Fuente: elaboración propia.

En esta figura 72 se asignó un color a cada nivel (o curso) para destacar los contenidos presentes en los textos escolares rusos, de esta manera, se puede observar que, de acuerdo con la figura 1, estos a través de sus diferentes clases abarcan todos los contenidos que tienen relación con desigualdades e inecuaciones a diferencia de lo que ocurre en nuestro país Chile.

Este lineamiento que proponen los textos rusos pueden ser una buena base para modificar los chilenos debido a que en los contenidos hay varios que están presentes en el curriculum chileno y ruso en los mismos niveles.

4.4. COMPARACIÓN DE LOS RESULTADOS

A continuación, se realizará una comparación de las figuras 29, 70 y 72, las cuales contienen los esquemas de complejidad tanto en el curriculum chileno, como en los textos escolares chilenos y rusos.

4.4.1. COMPARACIÓN ENTRE CURRICULUM CHILENO Y TEXTOS ESCOLARES CHILENOS

Las primeras comparaciones que se deben realizar es si el curriculum chileno y los textos escolares que se les entregan a los alumnos contienen la misma información en cuanto a las desigualdades e inecuaciones, para ello me apoyaré con los esquemas de complejidad de las inecuaciones de ambos.

Curriculum chileno:

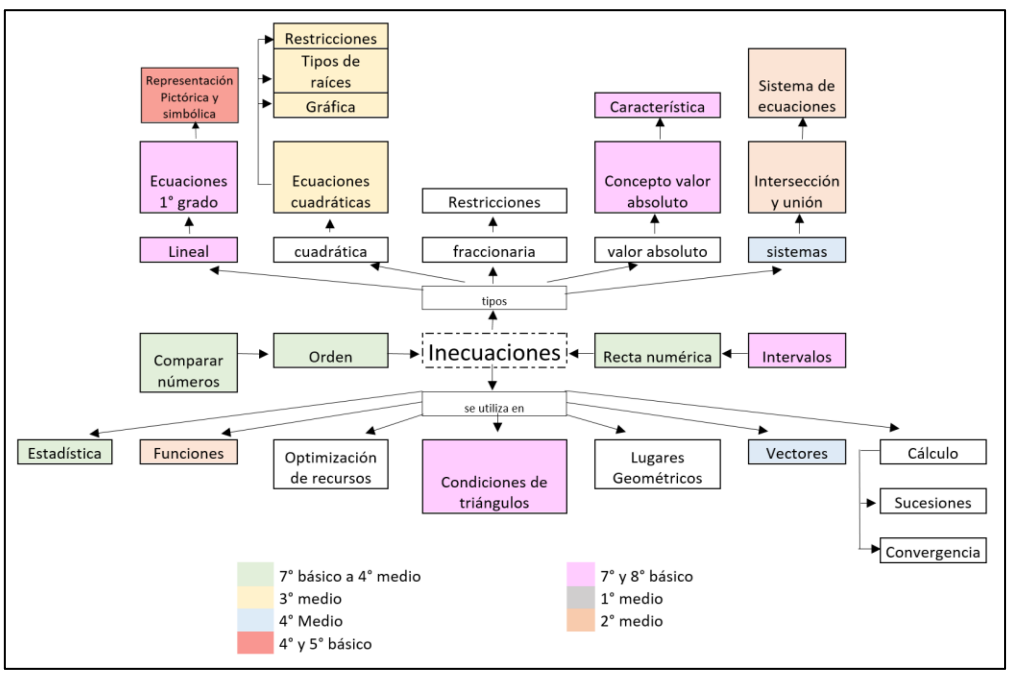


Figura 29. Esquema de complejidad comparado con el curriculum chileno
Fuente: elaboración propia.

Textos escolares chilenos:

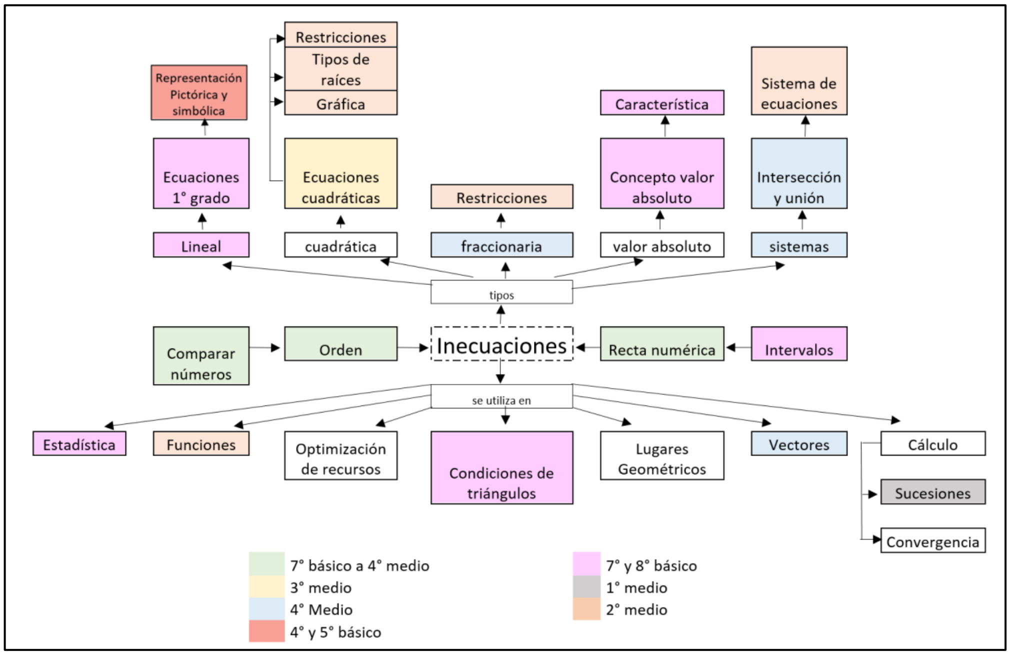


Figura 70. Esquema de complejidad comparado con los textos escolares chilenos

Fuente: elaboración propia.

Dentro de las similitudes están los conceptos básicos de la desigualdad e inecuación como lo son comparar números, orden, recta numérica e intervalos, los cuales se ven desde séptimo año básico hasta cuarto año medio, pasando por los diferentes conjuntos numéricos, naturales en sexto año básico, enteros en séptimos año básico, racionales en primer año medio, reales en segundo año medio y complejos en tercer año medio, además se trabaja el concepto de intervalo en séptimo y octavo año básico.

Otro de los contenidos que tienen en común son las inecuaciones lineales, las cuales en ambos aparece en cuarto y quinto año básico de forma pictórica y en séptimo y octavo año básico algebraico, las ecuaciones cuadráticas que se trabajan en tercer año medio donde también coinciden en que ninguno tiene contemplado las inecuaciones cuadráticas dentro de sus actividades o aprendizajes esperados. En el caso del valor absoluto en ambos se trabaja en séptimo y octavo año básico, pero las inecuaciones con valor absoluto no se trabajan ni en el curriculum ni en los textos escolares chilenos.

El sistema de ecuaciones se trabaja para ambos en segundo año medio y funciones que es un contenido donde se necesita las inecuaciones como concepto previo se trabaja en ambos en segundo año medio, también las condiciones de triángulos las cuales se trabajan en séptimo año básico, y por último vectores los cuales se trabajan en cuarto año medio.

En el curriculum chileno y en los textos escolares no se contemplan dentro de sus actividades y aprendizajes esperados la optimización de recursos, los lugares geométricos, contenidos de cálculo y convergencia.

Ahora las diferencias entre ambos son los contenidos de estadística los cuales en el curriculum se trabajarían desde séptimo año básico a cuarto año medio y en los textos escolares solo se trabajan en séptimo y octavo año básico, luego los textos traen contenidos de probabilidades. Otra de las diferencias se presenta en las restricciones de las gráficas y tipos de raíces las cuales aparecen en tercer año medio en el curriculum y en los textos escolares aparece en segundo año medio.

En los sistemas de inecuaciones se plantean para ambos en cuarto año medio, pero en el curriculum se ven las intersecciones y uniones en segundo año medio y en los textos aparecen en cuarto año medio. Pero una de las grandes diferencias se produce en las inecuaciones fraccionarias, ya que en el curriculum no aparecen mencionadas en ningún nivel desde cuarto año básico a cuarto año medio en cambio en los textos escolares aparecen en cuarto año medio como inecuación fraccionaria y las restricciones se trabajan en segundo año medio.

4.4.2. COMPARACIÓN ENTRE TEXTOS ESCOLARES CHILENOS Y TEXTOS ESCOLARES RUSOS

Ahora se realizará la comparación entre los textos escolares chilenos y los textos escolares rusos, para ello al igual que la comparación anterior se realizará en base a los esquemas de complejidad de inecuación establecido para cada uno anteriormente.

Textos escolares chilenos:

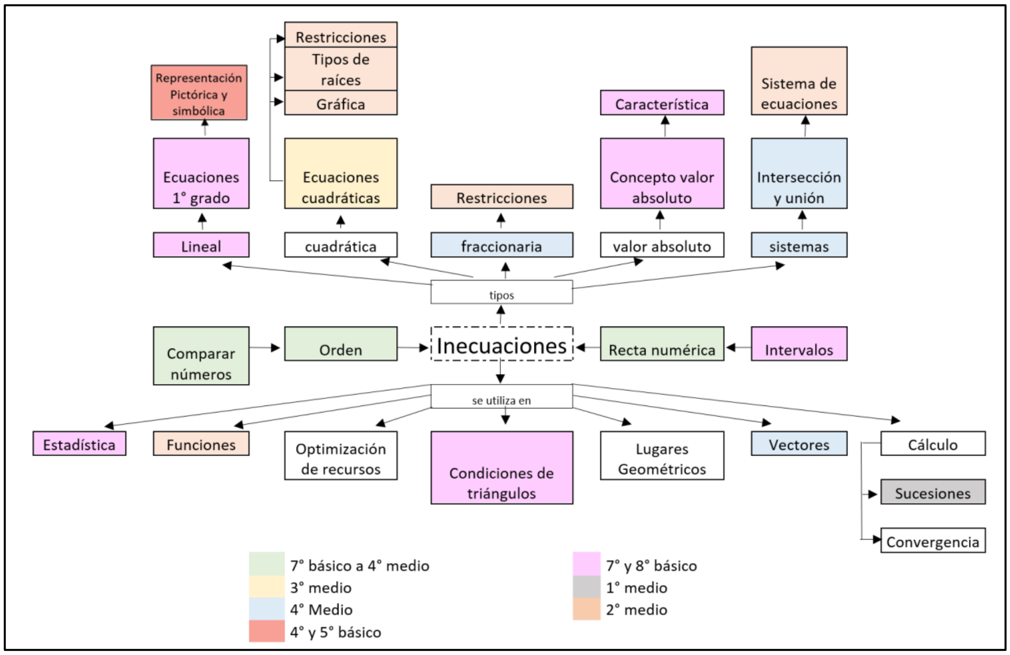


Figura 70. Esquema de complejidad comparado con los textos escolares chilenos
Fuente: elaboración propia.

Textos escolares rusos:

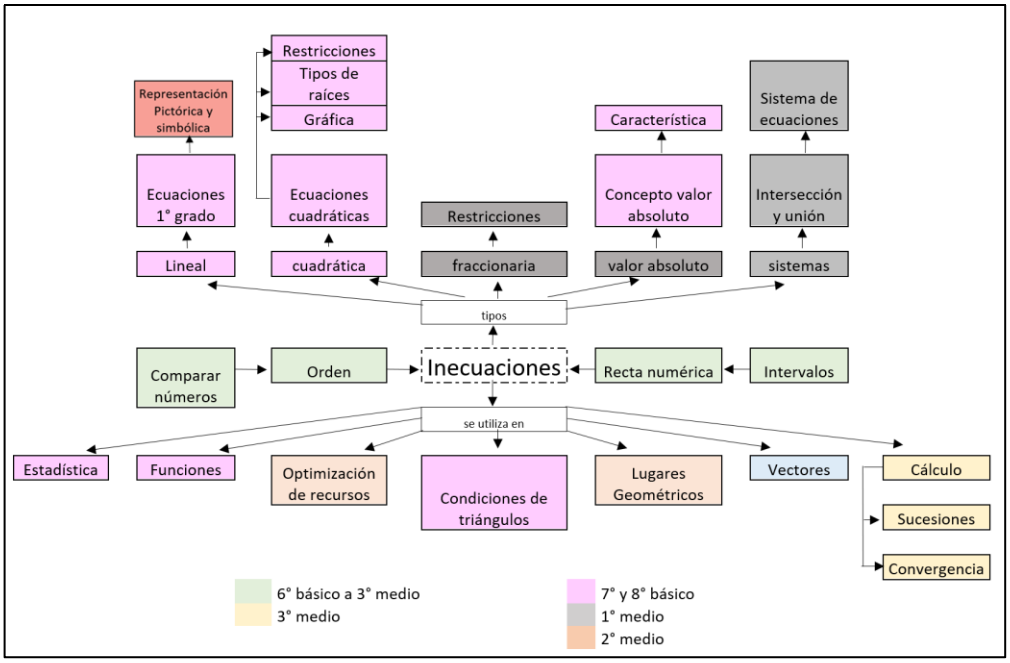


Figura 72. Esquema de complejidad comparado con los textos escolares rusos

Fuente: elaboración propia.

Las similitudes entre lo que plantean los textos escolares chilenos y lo textos escolares rusos son aquellos contenidos que se trabajan en niveles como séptimo y octavo año básico como lo son las inecuaciones lineales y ecuaciones lineales, la estadística, concepto valor absoluto y sus características, y las condiciones de triángulos. También coinciden con el tratamiento de conceptos básicos para la aplicación de las desigualdades e inecuaciones como son la de comparar números, ordenar, ubicar en la recta numérica, los cuales se trabajan desde sexto año básico en adelante.

Uno de los contenidos que coinciden es el de los vectores el cual se trabaja el último año escolar en ambos países.

Las diferencias entre ambos son considerables sobre todo por la cobertura del contenido y el curso en el cual se comienza a trabajar.

La diferencia con respecto a los conceptos básicos aparece en los intervalos los cuales en chile se trabajan desde séptimo año básico y en Rusia se trabajan desde sexto año básico, que para ellos corresponde a la sexta clase. Luego aparecen las inecuaciones cuadráticas las cuales en chile no se trabajan, solo aparecen las ecuaciones cuadráticas y sus gráficas en la función en segundo y tercer año medio, en cambio en Rusia se trabaja el contenido completo desde séptimo y octavo año básico que para ellos sería la séptima y octava clase.

En las inecuaciones fraccionarias en chile se trabaja escasamente en cuarto año medio, y en Rusia se trabaja el contenido completo en primer año medio lo que para ellos corresponde a la novena clase, y en ese mismo año ellos trabajan las inecuaciones con valor absoluto lo que en chile tampoco se trabaja. En el caso de los sistemas de inecuaciones en ambos países se trabajan, pero la diferencia está en el curso en el cual se implementa, en chile esto se ve en cuarto año medio, en cambio en Rusia se trabaja en primer año medio o para ellos novena clase.

En los contenidos donde las inecuaciones y desigualdades son conceptos previos se encuentran las funciones las cuales se trabajan en ambos países, pero en cursos diferentes, en chile en segundo año medio y en Rusia en séptimos año básico en adelante. Optimización de recursos, lugares geométricos, contenidos de cálculo, sucesiones y convergencia en el curriculum Ruso aparecen dentro de su último año escolar, en cambio en Chile en el curriculum y textos escolares no salen declarados.

CAPÍTULO 5

CONCLUSIONES

A continuación, se presentarán las diferentes conclusiones obtenidas del análisis de complejidad aplicado al curriculum chilenos, los textos escolares chilenos y también los textos escolares rusos, y también las diferentes limitaciones que se presentaron durante la confección de este estudio.

En base a la construcción de la figura 1 (complejidad matemática de la inecuación) y a partir de lo analizado en el currículum nacional y los textos escolares otorgados por el Ministerio de Educación de Chile, se puede concluir que el objeto matemático en estudio (inecuaciones) no considera todos los componentes necesarios para la enseñanza de la inecuación, pudiendo observar que tanto el currículum como los textos escolares dejan fuera las inecuaciones cuadráticas y las inecuaciones con valor absoluto reconociendo, además, que se trabaja superficialmente las inecuaciones fraccionarias, esto porque solo aparece en una actividad aislada dentro del texto escolar pero no hay una teoría que la fundamente para que el alumnos pueda resolverlas.

A la vez, vemos que en los niveles estudiados (cuarto año básico a cuarto año medio) no existe una continuidad o progresión en el tratamiento explícito de la inecuación. En el currículum se observa que hay niveles donde la inecuación no es considerada de manera explícita (sexto año básico, primero, segundo y tercer año medio), reconociendo los mismos hallazgos en el análisis de los textos escolares, donde pudimos observar que en los cursos donde se trata la inecuación de manera implícita, se presentan actividades que requieren del manejo del objeto matemático en estudio para lograr comprender el contenido nuevo a tratar, por ejemplo, para trabajar el concepto de dominio y recorrido de diferentes funciones.

Cabe destacar que los programas analizados que componen el currículum chileno se implementaron en el año 2016 y que en séptimo y octavo año básico hubo un cambio significativo al incorporar la enseñanza de la inecuación. Es por ello que la discontinuidad que se produce en los niveles de primero, segundo y tercero año medio es preocupante dado que, actualmente, los estudiantes que cursan primer año medio fueron formados con un programa que no contemplaba la enseñanza de dicho objeto matemático, por lo tanto, no están preparados para trabajar en unidades de estudio donde la inecuación es parte del conocimiento previo para iniciar el estudio de otras materias. Conociendo este escenario, resulta preocupante que en los ajustes curriculares propuestos para el año 2017 en los cursos de primero y segundo año medio no se incorporé la enseñanza explícita de inecuaciones, lo que implica que se no se continúe con la progresión, manteniendo lo declarado en este estudio.

Por otra parte, logramos observar un escenario distinto al analizar los textos escolares rusos, los que al ser comparados con el esquema de complejidad matemática de la inecuación (figura1), permiten evidenciar que abarcan todos los componentes de dicho esquema. Es decir, se observa que tienen aquellos conceptos previos para poder trabajar desigualdades e inecuaciones, luego trabaja todos los contenidos de desigualdades e inecuaciones y finalmente trabaja las desigualdades e inecuaciones en otros contenidos en los cuales se necesitan como concepto previo, como se mostró en la figura 72.

Ahora bien, al comparar los resultados de Rusia y Chile (específicamente en el análisis de los textos escolares) vemos que hay grandes diferencias en cuanto a la cantidad de componentes que se abarcan desde sexto año básico hasta cuarto año medio (en base a los componentes de la figura 1), específicamente, se observa que en los textos escolares chilenos se concentra gran parte de la enseñanza del objeto matemático en estudio en tercero y cuarto medio mientras que, en Rusia, el grueso de los contenidos se implementan entre la sexta y novena clase, que sería desde sexto año básico hasta primer año medio. Esto permite dar cuenta de una discrepancia entre los criterios curriculares de ambos países, no solo en la cantidad de contenidos a tratar, sino que también en la edad en que estos contenidos deben ser estudiados.

Otro punto importante a destacar es que en Rusia hay una continuidad del contenido que va aumentando año a año, y que va relacionado con las desigualdades e inecuaciones, por ejemplo: en la séptima clase (13 años) ven el contenido de funciones cuadráticas $f(x) = x^2$, luego en la octava clase ven todas las características, tanto gráficas como algebraicas, de las funciones cuadrática de forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, y en la novena clase (15 años) trabajan con inecuaciones cuadráticas. Esto podría ser una explicación de por qué Rusia tiene mejores resultados que Chile en las pruebas TIMMS (2011) y PISA (2015), ya que en Chile recién desde el 2016 se implementó la unidad de desigualdades e inecuaciones para séptimo y octavo año básico, en cambio en Rusia desde el 2001 ya se implementaba los contenidos en los estudiantes desde sexto año básico, esto es específicamente de la pregunta que es de inecuaciones para TIMMS octavo año básico (ver figura 7), donde claramente los alumnos chilenos aún no veían esos contenidos al momento de contestar la prueba, a diferencia de Rusia que si ven ese contenido antes de realizar la prueba, esto les da la ventaja de que los alumnos pueden lograr contestarla.

Finalmente, luego de este estudio surgen una interrogante que podrían permitir una ampliación de la investigación, esta es:

¿Los profesores chilenos (de educación básica y media) cuentan con el conocimiento didáctico-matemático necesario para enseñanza de la inecuación en los distintos niveles en que es considerado su estudio?

Dentro de las limitaciones que se presentaron para poder realizar este estudio en primera instancia fue que se comenzó a trabajar el año 2015 y al año siguiente 2016 se aplicaron ajustes curriculares a los cursos séptimo y octavo año básico lo que obligó a cambiar todos los esquemas realizados para curriculum y textos escolares, porque los ajustes eran significativos en el objeto matemático estudiado, se agregaron unidades donde incluían las inecuaciones. Al momento de hacer el marco teórico la escasa información histórica que permite reconstruir el objeto matemático en estudio fue la mayor limitación, esto debido a que, se ha trabajado desigualdades e inecuaciones en artículos y tesis, pero sobre la problemática de como enseñarla o los errores en los alumnos. Esta limitación también la declara Borello (2011) en su artículo y en su tesis "*Relación entre las concepciones del maestro y el aprendizaje de los alumnos en el caso de las desigualdades. Un estado del arte*".

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

Acuña, C. (1998). La ubicación espacial de conjuntos de puntos en el plano. En F. Hitt (Ed.), Investigaciones en Matemática Educativa II. Mexico: Dep. de Matemática Educativa, *Cinvestav-IPN.* pp.203-223.

Agencia de Calidad de la Educación. (2012). *Resultados TIMSS 2011 Chile.* Recuperado de http://www.agenciaeducacion.cl/wp-content/uploads/2013/02/resultados-timss-18-dic-2012.pdf

A.G. Mordkovich. (2001). *Álgebra 7ma. Clase.* Moscú, Rusia: Mnemozina. 4ta. edición.

A.G. Mordkovich. (2001). *Álgebra 8va. Clase.* Moscú, Rusia: Mnemozina. 4ta. edición.

A.G. Mordkovich. (2002). *Álgebra 9na. Clase.* Moscú, Rusia: Mnemozina. 4ta. edición.

A.G. Mordkovich. (2001). *Álgebra e introducción al análisis 10va y 11va Clase.* Moscú, Rusia: Mnemozina. 2da. Edición.

Apostol, T. (1961). *Calculus.* Barcelona-Bogota-Buenos Aires-Caracas-México: Editorial Reverte S.A, (No. 517 A6).

Arévalo, B., & Rojas, T. (2017) *Un estudio de las inecuaciones lineales desde el espacio de trabajo matemático.* Recuperado de http://villarrica.uc.cl/files/matematica/RI01RI19/RI%2016.pdf

Baldor, A. (1988). *Álgebra*. Patria, México: Ed. Editorial Patria, 5ta edición.

Barbosa, K. (Julio, 2003). La enseñanza de inecuaciones desde el punto de vista de la teoría APOE. *Relime*. México, DF, San Pedro Zacatenco. 6(3). pp.199-219.

Bazzini, L. (1999). Disequazioni: il ruolo del segno. En J. Philippe & M. Laurel (Eds.), *Actes de Seminaires-SFIDA XII*. Francia, 3. pp.7-12.

Bernardis, S; Nitti, L. & Scaglia, S. (2014). *Indagación sobre el concepto de inecuación. Investigación en Educación Matemática- Secundario y Universitario.* Recuperado de http://www.fhuc.unl.edu.ar/materiales_congresos/CD_matematica%202014/pdf/Eje%206_Inv%20EM/ponencia%2025_Bernardis_Nitti_Scaglia.pdf

Borrello M. (2007). *Relación entre las concepciones del maestro y el aprendizaje de los alumnos en el caso de las desigualdades. Un estado del arte.* (Tesis para obtener el grado de Maestra en Ciencias en Matemática Educativa). Instituto Politécnico Nacional. México.

Borello, M; Lezama, J. (2009). Hacia una resignación de las desigualdades e inecuaciones a partir de las practicas del profesor. En LESTON, P (Ed.). *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa. Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.* México, Coacalco. 22. pp. 1091-1099.

Borello M. (2011). *Un planteamiento de resignificación de las desigualdades a partir de las prácticas didácticas del profesor. Un enfoque socioepistemológico.* (Tesis para obtener el grado de Doctorado en matemática educativa) Instituto Poltécnico Nacional. México.

Catalán, D. Pérez, B. Prieto, C. y Rupin, P. (2016). *Textos del estudiante Matemática 8° básico.* Santiago, Chile: Editorial SM Chile S.A.

Cerda, G.; Pérez, C.; Ortega, R.; Lleujo, M.; Sanhueza, L. (Marzo. 2011). Fortalecimiento de competencias matemáticas tempranas en preescolares, un estudio chileno. *Psychology, Society & Education*, España, Almería. 3(1). pp. 23-39.

Del Valle, J. Muñoz, G. y Santis, M. (2016). *Textos del estudiante Matemática 1° medio.* Santiago, Chile: Editorial SM Chile S.A.

Demidovich B. (1967). *Problemas y Ejercicios de Análisis Matemático*. Moscú, Rusia: Editorial MIR.

Díez, M. (1995). *Sobre la simbolización en el álgebra. Aplicación al proceso de aprendizajes de las desigualdades en educación secundaria.* (Tesis Doctoral). Universidad Complutense. Madrid.

Duval, R. (1998). *Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento.* Zacatecas, México: Grupo Editorial Iberoamericano.

Ediciones SM. (2016). *Clave PSU Matemática*. Santiago, Chile: Editorial SM ediciones.

Ediciones UC – Santillana. (2015). *Cuaderno de ejercicios PSU matemática.* Santiago, Chile: Editorial Ediciones UC – Santillana.

Eisenberg, T. & Dreyfus, T. (1991). Visualization in Teaching and Learning Mathematics. *Mathematical Association of America*, Washington D.C.,pp. 25-37.

Espinoza, Y. y Cano, S. (2016). *Texto del estudiante Matemática 4° básico*. Santiago, Chile: Editorial Galileo Libros Ltda.

Espinoza, Y. y Cano, S. (2016). *Texto del estudiante Matemática 5° básico.* Santiago, Chile: Editorial Galileo Libros Ltda.

Espinoza, Y. y Cano, S. (2016). *Texto del estudiante Matemática 6° básico.* Santiago, Chile: Editorial Galileo Libros Ltda.

Font, V., Breda, A., Seckel, M.J., Pino-Fan, L. (2017). Algunas implicaciones didácticas derivadas de la complejidad de los objetos matemáticos cuando estos se aplican a distintos contextos. *Revista Brsileira de ensino de ciencia e tecnología*. (en prensa).

Gallo & Battú (1997). Quali modelli e controlli intervengono laborando su disequazioni?. En J. Philippe & M. Laurel (Eds.). *Actes de Seminaires-SFIDA X*. Francia. 3, pp. 25-37.

Gatica, N. & Maz, A. (2012). Estudio de inecuaciones de dos variables. XIV congreso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. España, Andaluza. "Diversidad y matemáticas". Pp. 1-11. Recuperado de http://thales.cica.es/xivceam/actas/pdf/com05.pdf

Garrote, M.; Hidalgo, M.; Blanco, L. (Junio. 2004). Dificultades en el aprendizaje de las desigualdades e inecuaciones. *Revista Suma*, España, Catalunya. 46, pp. 37-44.

Godino, J. D. (Noviembre, 2003). *Teoría de las Funciones Semióticas. Un enfoque ontológico semiótico de la cognición e instrucción matemática.* (Trabajo de investigación presentado para optar a la Cátedra de Universidad de Didáctica de la Matemática) Universidad de Granada, España.

Godino, J. D., Bencomo, D., Font, V. y Wilhelmi, M. R. (2006). Análisis y valoración de la idoneidad didáctica de procesos de estudio de las matemáticas. *Paradigma*. Venezuela, Maracay. 27(2), pp. 221–252.

Godino, J. D. Batanero, C. y Font, V. (2007). The ontosemiotic approach to research in mathematics education. ZDM. *The International Journal on Mathematics Education*. 39(1-2). Pp. 127-135.

Godino, J; Font, V; Wilhelmi, M & Castro, C. (2009). Aproximación a la dimensión normativa en didáctica de las matemáticas desde un enfoque ontosemiótico. *Enseñanza de las ciencias.* España. 27(1). Pp. 59-76.

Heredia, M. & Palacios, M. (Octubre, 2014). *Las inecuaciones lineales en la escuela: algunas reflexiones sobre su enseñanza a partir de la identificación de dificultades y errores en su aprendizaje.* (Requisito parcial para optar el título de licenciadas en Matemáticas y Física) Universidad del valle, Instituto de educación y pedagogía área de educación y pedagogía licenciatura en matemáticas y física. Santiago de Cali

Hitt, F. (2003). Una Reflexión Sobre la Construcción de Conceptos Matemáticos en Ambientes con Tecnología. *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana*. Venezuela. X(2). Pp. 213-223.

I.I. Zubareva, A.G. Mordkovich. (2009). *Matemática 6ta. Clase.* Moscú, Rusia: Mnemozina. 8va. Edición.

James H. McMillan-Sally Schumacher. (2005). *Investigación educativa*. Madrid, España: Pearson Educación, S.A. 5.a edición.

Kitchen J.W. (1986). *Cálculo*, Madrid, España: McGraw-Hill.

Larson, R.; Robert, P.; Edwars, B.; Abellanas. (1999). *Cálculo y geometría analítica.* Madrid, España: Editorial S.A. MCGRAW-HILL.

Leithold, L. (1998). *El cálculo*. Ciudad de México, México: Editorial de Oxford University Press. Edición Numero 517.

Malara, N.A; Brandoli, M.T. & Fiori, C. (1999). Comportamenti di studenti in ingresso all'universitá di fronte allo studio de disequazioni. En J. Philippe & M. Laurel (Eds.). *Actes de Seminaires-SFIDA X*. Francia. 3, pp. 13-28.

Maroto-Vargas, A. (Diciembre, 2013). Propuesta para la enseñanza y aprendizaje de las inecuaciones lineales. *Revista Educación*. Costa Rica. 37(2). Pp. 1-16.

Martínez, F.; Martínez, S.; Ramírez, H.; Varas, L. (2014). *Recursos para la Formación Inicial de Profesores de Enseñanza Básica, Algebra.* Santiago, Chile: Ediciones SM Chile S.A.

Merino, R. Muños, V. Pérez, B. y Rupin, P. (2016). *Textos del estudiante Matemática 7° básico.* Santiago, Chile: Editorial SM Chile S.A.

MINEDUC (2016). *Planes y Programas para 4° básico.* Santiago ,Chile: Ed. MINEDUC.

MINEDUC (2016). *Planes y Programas para 5° básico.* Santiago ,Chile: Ed. MINEDUC.

MINEDUC (2016). *Planes y Programas para 6° básico.* Santiago ,Chile: Ed. MINEDUC.

MINEDUC (2016). *Planes y Programas para 7° básico.* Santiago ,Chile: Ed. MINEDUC.

MINEDUC (2016). *Planes y Programas para 8° básico.* Santiago ,Chile: Ed. MINEDUC.

MINEDUC (2016). *Planes y Programas para I medio.* Santiago ,Chile: Ed. MINEDUC.

MINEDUC (2016). *Planes y Programas para II medio.* Santiago ,Chile: Ed. MINEDUC.

MINEDUC (2016). *Planes y Programas para III medio.* Santiago ,Chile: Ed. MINEDUC.

MINEDUC (2016). *Planes y Programas para IV medio.* Santiago ,Chile: Ed. MINEDUC.

Muñoz, G. Gutiérrez, V. y Muñoz, S. (2016). *Matemática IV medio Texto del estudiante.* Santiago, Chile: Editorial Santillana del Pacífico S. A.

Muñoz, G. Rupin, P. y Jiménez, L. (2016). Matemática 2° medio. Santiago, Chile: Editorial SM Chile S.A.

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, Estados Unidos: NCTM.

OCDE. (2016). *PISA 2015 Resultados Clave*. Recuperado de https://www.oecd.org/pisa/pisa-2015-results-in-focus-ESP.pdf

Paulos, J. (1990). *El hombre anumérico: El analfabetismo matemático y sus consecuencias.* Barcelona, España: Editorial Tusquets.

Pino, J.; Blanco, L. (Junio, 2008). Análisis de los problemas de los libros de texto de matemáticas para alumnos de 12 a 14 años de edad de España y de chile en relación con los contenidos de proporcionalidad. *Publicaciones,* España, Granada. 38. pp. 63-88.

Pino-Fan, L. (2013). *Evaluación de la faceta epistémica del conocimiento didáctico-matemático de futuros profesores de bachillerato sobre la derivada.* (Tesis para obtener el grado doctoral) Universidad de Granada, Granada, España.

Pino, L., W. F. Castro, J. D. Godino Y V. Font. (Diciembre, 2013). Idoneidad epistémica del significado de la derivada en el currículo de bachillerato, *Paradígma*. Venezuela, Maracay. 34(2), pp. 123-150.

Rico, L. (Marzo, 1998). Complejidad del currículo de matemáticas como herramienta profesional. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, España, Granada. 1(1). p. 22-39.

Rivas, H. (2014). *Idoneidad didáctica de procesos de formación estadística de profesores de educación primaria.* (Tesis doctoral). Universidad de Granada. Granada, España.

Rondero, C., & Font, V. (Junio, 2015). Articulación de la complejidad matemática de la media aritmética. *Enseñanza de las Ciencias.* España, Barcelona. 33(2). Pp. 29-49.

Saiz, O. y Blumenthal, V. (2016). *Texto del estudiante Matemática 3° medio.* Santiago, Chile: Editorial Cal y Canto.

Santos, J. & Lozada, G. (2010). *Una Propuesta para la Construcción de los Conceptos Desigualdad e Inecuación Mediante el Modelo de Situaciones Didácticas y a Partir* *del Desarrollo de la Solución de Problemas*. Memoria 11° Encuentro Colombiano de Matemática Educativa. Colombia. Recuperado de http://funes.uniandes.edu.co/1098/1/457_Una_Propuesta_para_la_Construccin_Asocolme2010.pdf

Seckel, M.J. (2016). *Competencia en análisis didáctico en la formación inicial de profesores de educación general básica con mención en matemática.* (Tesis doctoral). Universidad de Barcelona. Barcelona, España.

Steffens, K. (2006). *The History of Approximation Theory: From Euler to Bernstein*. Boston, Estados Unidos: Birkhauser.

Stewart J., (2002). *Cálculo: Trascendentes Tempranas*. Distrito Federal, México: Thompson Learning, cuarta edición.

Stewart, I. (2008). *Historia de las matemáticas en los últimos 10.000 años.* Barcelona, España: Editorial Critica, S.L. (Publicación original en 2007).

Tapia, X. (1998). *Pasaje de registros: Inecuaciones.* (Tesis para optar al grado de Magister en Enseñanza de las Ciencias, Mención en Didáctica de la Matemática). Universidad de Valparaíso. Valparaíso, Chile.

Triana, J. & Moreno, M. (2013). *Una propuesta de enseñanza para la solución de inecuaciones por el método gráfico, a través del software geogebra.* (Trabajo de grado entregado para optar por el título de Especialista en Educación Matemática). Universidad pedagógica nacional, facultad de ciencias y tecnología, departamento de matemáticas. Bogotá, Colombia.

Vargas, A. (Julio, 2013). Propuesta para la enseñanza y aprendizaje de las inecuaciones lineales. *Revista educación*, Costa Rica, San Pedro, Montes de Oca. 37(2). pp. 1-16.

Vásquez, C. (2014). *Evaluación de los conocimientos didáctico-matemáticos para la enseñanza de la probabilidad de los profesores de educación primaria en activo.* (Tesis doctoral). Universidad de Girona. Cataluña, España.

Vásquez, C.; Alsina, A. (Mayo, 2015). Un modelo para el análisis de objetos matemáticos en libros de textos chileno: situaciones problemáticas, lenguaje y conceptos sobre probabilidad. Profesorado. *Revista de currículum y formación de profesorado*, España, Granada. 19(2). pp. 441-462.

Virginio Gómez. (2005). *Álgebra*. Recuperado de https://www.4shared.com/dir/18790328/518d5848/Manuales_Ciencias_Basicas.html#dir=KfOYlZQY

Vrancken, S.; Engler, A.; Müller, D. (Marzo, 2010). Inecuaciones algebraicas. Una experiencia didáctica articulando diversos sistemas de representacion. *Yupana*, Argentina, Santa fe. 10(5). pp. 55-66.

Zegarra, L. (2001). *Algebra lineal*. Santiago, Chile: Mcgraw-Hill interamericana.