

IMPLEMENTACIÓN DE UN MÉTODO DE ELEMENTOS DE FRONTERA (BEM) PARA PLACAS DELGADAS

*M. Daroch Morales*¹, *F. Sanhueza Espinoza*² y *M. Behrens Rincón*³

RESUMEN:

El análisis del comportamiento de los diversos elementos estructurales que frecuentemente pueden encontrarse formando parte de estructuras más complejas, ha sido motivo de estudio durante muchos años, es por eso, que a medida que la tecnología avanza a paso precipitado, junto a ella surgen nuevas metodologías de cálculo que facilitan el estudio detallado de estas estructuras. Hoy en día, una de esas metodologías es llamada el método de los elementos de frontera o BEM por sus siglas en inglés, el cual presenta una serie de ventajas comparativas a otros métodos numéricos como el de los elementos finitos (FEM) o diferencias finitas (FDM) pues logra reducir la dimensionalidad del problema a uno de frontera, con lo cual utilizando un número bastante menor de grados de libertad en el análisis y posiblemente una carga computacional menor, pero a expensas de fundamentos matemáticos más complejos, es posible obtener resultados muy cercanos a las soluciones analíticas existentes.

El objetivo de este trabajo es presentar la implementación del método de los elementos de frontera en su forma directa para el cálculo de la deflexión de una placa delgada cargada transversalmente por una fuerza distribuida sobre su superficie, utilizando el software Matlab® y considerando diferentes condiciones de contorno. Además, se tratan las consideraciones generales para el cálculo de las integrales singulares que aparecen en la formulación, para luego comparar los resultados obtenidos con las soluciones analíticas encontradas en la bibliografía básica del tema, y por otro lado discutir acerca de las pequeñas discrepancias que presenta este método con respecto a dichas soluciones.

PALABRAS CLAVES: Método elementos de frontera, BEM, deflexión de placas delgadas.

ABSTRACT:

Behavior of numerous structural elements that often are a part of more complex structures has been a subject of study for many years, which is why, as technology advances at a hasty pace, new procedures of calculation that facilitate the detailed study of these structures appear. Nowadays, one of these methodologies is the Boundary Elements Method (BEM), which presents a series of comparative advantages to other numerical methods like Finite Elements Method (FEM) or Finite Difference Method (FDM) by reducing the dimensionality of the problem to a boundary one; reducing degrees of freedom and possibly consuming less computational resources, but using more advanced mathematical concepts, it is possible to obtain very close results to the existing analytical solutions.

The objective of this work is to present the implementation of the direct Boundary Element Method in the bending of a transversely loaded thin plate by a distributed force on its surface using Matlab® bearing in mind two different sets of boundary conditions in the calculation. In addition, the general considerations for the treatment of the singular and hypersingular integrals that appear in the formulation are discussed, to compare then the results with the analytical solutions found in the plate's analysis bibliography and on the other hand, discussing the small discrepancies that this method presents with regard to these solutions.

KEYWORDS: Direct boundary element method, BEM, thin plate bending.

¹ Estudiante, Carrera de Ingeniería Civil, Universidad Católica de la Santísima Concepción, CHILE, madaroch@ing.ucsc.cl

² Profesor Titular, Departamento de Ingeniería Civil Geológica, Universidad Católica de la Santísima Concepción, CHILE, franksanhueza@ucsc.cl

³ Profesor Informante, Carrera de Ingeniería Civil, Universidad Católica de la Santísima Concepción, CHILE, ebehrens@ucsc.cl

1. INTRODUCCIÓN

El siguiente trabajo presenta la implementación del método directo de los elementos de frontera en el análisis estático de placas delgadas bajo flexión; cuya problemática es formulada en términos del desplazamiento transversal de su superficie media, considerando que la ecuación diferencial parcial que la rige es una de cuarto orden, por lo cual la obtención de las expresiones integrales y su implementación numérica requiere especial cuidado.

El método de los elementos de frontera (BEM o BIE por sus siglas en inglés), que tiene sus orígenes a principios del siglo XIX, cuando fue utilizado en la discretización integral de problemas de potencial, ya encontraba sus primeros indicios en la representación integral entregada por Somigliana en el año 1886, la cual relaciona valores de frontera de desplazamientos y tracciones (Beskos, 1991); identidad que representa la piedra angular del enfoque utilizado en el desarrollo de este trabajo.

La representación integral de la solución de la ecuación de la placa, en términos de las cantidades físicas descritas anteriormente, está basada en la identidad generalizada de Rayleigh-Green, la cual se obtuvo del teorema recíproco de Betti (Forbes, 1969) formulación que fue complementada con una segunda ecuación integral para la derivada normal (Katsikadelis, 2014), de modo que considera el aporte de las fuerzas ficticias generadas en los cambios abruptos de las condiciones de contorno, lo que permite dar una descripción detallada de la ecuación de la placa, incluidas aquellas con fronteras no-suaves.

BEM directo aplicado al análisis de placas de todo tipo representa una ventaja comparativa con otras metodologías de elementos de frontera pues no está restringido a una forma específica de placa o a las condiciones de contorno asociadas a esta, por consiguiente, se formula en términos de cantidades de frontera que tienen un significado físico directo para la teoría de placas delgadas, como lo son el momento flector, la fuerza de corte equivalente, el desplazamiento transversal, etc. Comparando BEM con FEM es posible establecer una serie de diferencias y ventajas, como la reducción en el tiempo y uso de recursos computacionales para el mismo nivel de precisión, pues BEM utiliza una menor cantidad de nodos y de elementos, pero haciendo uso de matrices llenas a diferencia de FEM. No menos importante es la naturalidad con la que el BIE puede trabajar sobre materiales incompresibles (su módulo de Poisson es exactamente 0.5) y en la que el enfoque de los elementos finitos encuentra una serie de dificultades en su implementación. Entre las desventajas podemos encontrar la falta de familiaridad con las matemáticas involucradas en la formulación del método, las cuales, sin ser desconocidas, son generalmente poco utilizadas en la praxis de la ingeniería, además, se debe añadir que BEM no es muy adecuado en el análisis de cascarones delgados, pues la proximidad entre los puntos nodales se torna muy pequeña, lo que generalmente causa errores numéricos en el método, siendo FEM la opción a seguir para este caso.

2. OBJETIVOS

2.1 OBJETIVO GENERAL

Implementar un código en lenguaje Matlab®, que permita resolver de forma numérica las ecuaciones de una placa delgada utilizando el método de los elementos de frontera.

2.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

Obtener la deflexión de la placa en cualquier punto, utilizando dos tipos de condiciones de contorno diferentes aplicadas a dos niveles de refinamiento de malla.

Implementación de la carga distribuida a partir de una ecuación integral de frontera, en reemplazo de su cálculo sobre elementos definidos en el dominio interior de la placa.

Obtener los esfuerzos y las reacciones de apoyo en las esquinas utilizando diferentes condiciones de contorno.

3. METODOLOGÍA

3.1. ECUACIONES DE LA PLACA

Los teoremas del trabajo recíproco y los principios del trabajo virtual han sido ampliamente utilizados en gran variedad de aplicaciones de la mecánica de medios continuos. Consideremos la placa como un cuerpo en equilibrio, con dos sets diferentes de esfuerzos y tensiones, como sigue:

- Un set (a) de esfuerzos aplicados σ_{ij}^a que producen un set de deformaciones ε_{ij}^a , los cuales pertenecen al problema real de la placa (denotado como sub-índice w).
- Un set diferente (b) de esfuerzos aplicados σ_{ij}^b que producen un set de deformaciones ε_{ij}^b , los cuales corresponden a la solución fundamental del problema (denotado como sub-índices "v").

Para una estructura linealmente elástica, el teorema recíproco de Betti indica que el trabajo realizado por los esfuerzos del sistema (a) en las deformaciones del sistema (b) es igual al trabajo realizado por los esfuerzos del sistema (b) sobre las deformaciones del sistema (a), lo cual permite establecer la relación que se presenta en la ecuación (2) luego de aplicar la identidad de Rayleigh-Green a la ecuación (1) como sigue:

Para una placa en flexión es posible escribir el siguiente set de ecuaciones integrales:

$$\begin{aligned}
 D \int_{\Omega} (v \nabla^4 w - w \nabla^4 v) d\Omega \\
 = - \int_{\Gamma} \left(v V_w - w V_v - \frac{\partial v}{\partial n} M_w + \frac{\partial w}{\partial n} M_v \right) ds + \sum_k (v [[T_w]]_k - w [[T_v]]_k) \quad (1)
 \end{aligned}$$

(1) representa la identidad generalizada de Rayleigh-Green aplicada a la placa. La ecuación de frontera ahora involucra términos que tienen directo significado físico y geométrico: la deflexión w , la pendiente normal $\frac{\partial w}{\partial n}$, el momento flector $M_w = M_n$, la fuerza de corte efectiva en la frontera $V_w = V_n$, además $[[T_w]]_k$ y $[[T_v]]_k$ que representan los saltos de discontinuidad ante el abrupto cambio de las condiciones de contorno que surge principalmente en las esquinas.

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega} v (D \nabla^4 w) d\Omega + \int_{\Gamma} \left(v V_w - \frac{\partial v}{\partial n} M_w \right) ds \\
 - \sum_k v [[T_w]]_k = \int_{\Omega} w (D \nabla^4 v) d\Omega + \int_{\Gamma} \left(w V_v - \frac{\partial w}{\partial n} M_v \right) ds - \sum_k w [[T_v]]_k \quad (2)
 \end{aligned}$$

La relación expresada por la ecuación (2) indica el teorema recíproco de Betti para la placa, en donde los términos de las esquinas $\sum_k v [[T_w]]_k$ y $\sum_k w [[T_v]]_k$ expresan el trabajo virtual producido por las fuerzas de esquinas, comprobando con esto que la aplicación del teorema de Betti para el problema de la deflexión de una placa debe incluir el trabajo realizado por las fuerzas ficticias de esquina.

3.2. LA SOLUCIÓN FUNDAMENTAL

La solución fundamental de la ecuación bi-armónica es una de tipo particular y singular de la ecuación

$$D \nabla^4 v = \delta(Q - P) \quad (3)$$

Donde $\delta(Q - P)$ es la función delta de Dirac que representa la densidad de carga en un punto colocación $Q: \{\xi, \eta\}$ debido a una fuerza transversal unitaria concentrada en el punto de campo $P\{x, y\}$. Físicamente la

solución de la ecuación (3) es una función de dos puntos $v = v(Q, P)$ que representa la deflexión en el punto Q debido a la fuerza unitaria concentrada en el punto P, en una placa infinita que tiene rigidez a la flexión D. Integrando repetidamente la ecuación (3) y teniendo en cuenta que $r = |Q - P|$ es la distancia entre los puntos P y Q se obtiene:

$$v(r) = C_1 r^2 \ln r + C_2 r^2 + C_3 \ln r + C_4 \quad (4)$$

Donde $C_i (i = 1, 2, 3, 4)$ son constantes arbitrarias de integración que pueden ser determinadas teniendo en cuenta las siguientes consideraciones físicas de la placa:

- (i) $v(r)$ debe ser finita para $r = 0$.
- (ii) $v(r)$ debe ser acotada en el infinito.
- (iii) Las fuerzas transversales en cualquier porción infinitesimal de la placa, incluida la fuerza unitaria concentrada deben estar en equilibrio.

Considerando $C_4 = 0$ y debido a las consideraciones anteriores la solución fundamental puede expresarse finalmente de la forma:

$$v = \frac{1}{8\pi D} r^2 \ln r \quad (5)$$

Siendo (5) simétrica con respecto a los puntos P y Q, lo que permite que estos puedan ser intercambiados.

3.3. PRIMERA ECUACIÓN INTEGRAL DE FRONTERA

La primera ecuación integral de frontera puede ser obtenida de la combinación de las siguientes ecuaciones (Katsikadelis, 2014):

$$w(P) = \iint_{\Omega} v f d\Omega + \int_{\Gamma} \left[v V_w - w V_v - \frac{\partial v}{\partial n} M_w + \frac{\partial w}{\partial n} M_v \right] ds - \sum_k (v \llbracket T_w \rrbracket_k - w \llbracket T_v \rrbracket_k) \quad (6)$$

La ecuación (6) representa la deflexión para cualquier punto del dominio de la placa

$$\frac{\alpha}{2} w(P) = \iint_{\Omega} v f d\Omega + \int_{\Gamma} \left[v V_w - w V_v - \frac{\partial v}{\partial n} M_w + \frac{\partial w}{\partial n} M_v \right] ds - \sum_k (v \llbracket T_w \rrbracket_k - w \llbracket T_v \rrbracket_k) \quad (7)$$

(6) y (7) pueden ser combinadas en:

$$\varepsilon(P) w(P) = \iint_{\Omega} v f d\Omega + \int_{\Gamma} \left(v V_w - w V_v - \frac{\partial v}{\partial n} M_w + \frac{\partial w}{\partial n} M_v \right) ds - \sum_k (v \llbracket T_w \rrbracket_k - w \llbracket T_v \rrbracket_k) \quad (8)$$

En donde $\varepsilon(P)$ es el coeficiente libre definido según la posición del punto P como

$$\varepsilon(P) = \begin{cases} 1 & P \text{ dentro de } \Omega \\ \frac{\alpha}{2} & P = p \text{ en } \Gamma \\ 0 & P \text{ fuera de } \Omega \end{cases}$$

Notar que para puntos P en donde la frontera es suave $\alpha = 1$, por lo tanto $\varepsilon(P) = 1/2$.

En base a la ecuación (8), las funciones de los kernel necesarias para obtener la representación son obtenidas como sigue:

$$v = \frac{1}{8\pi D} r^2 \ln r \quad (9)$$

$$\frac{\partial v}{\partial n} = \frac{1}{8\pi D} r r_n (1 + 2 \ln r) \quad (10)$$

$$M_v = -\frac{1}{8\pi D} [2(1 + \nu) \ln r + (3 + \nu)r_n^2 + (1 + 3\nu)r_t^2] \quad (11)$$

$$V_v = -\frac{1}{4\pi r} [2r_n + (1 - \nu)(r_n - kr)(r_n^2 - r_t^2)] \quad (12)$$

$$T_v = \frac{1}{4\pi} (1 - \nu)r_n r_t \quad (13)$$

Las expresiones de las derivadas direccionales $r_x, r_\xi, r_\eta, r_y, r_n, r_t$ utilizadas en las funciones de los kernel anteriores, quedan establecidas según las relaciones geométricas definidas en la figura 1 como:

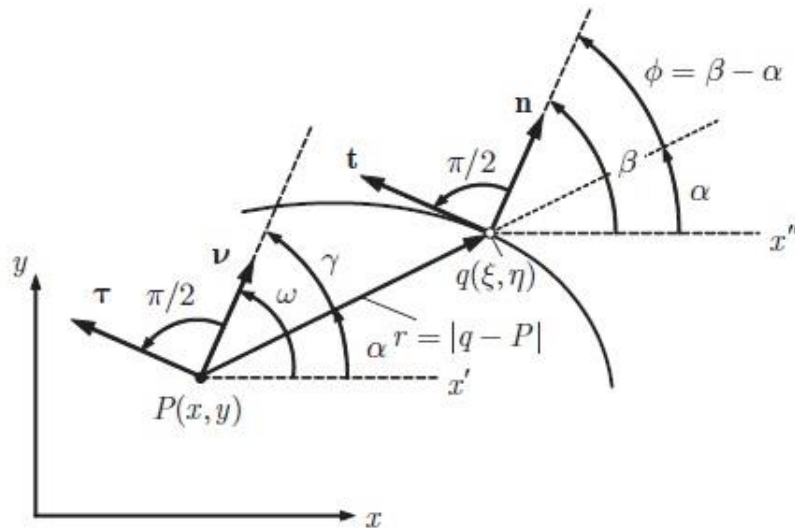


Figura 1: Katsikadelis, 2014. Definiciones geométricas relacionadas con la posición relativa de un punto de campo P y un punto de frontera q .

$$\cos \alpha = \frac{\xi - x}{r} \quad (14)$$

$$\sin \alpha = \frac{\eta - y}{r} \quad (15)$$

$$r = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2} \quad (16)$$

$$r_x = -r_\xi = -\frac{\xi - x}{r} = -\cos \alpha \quad (17)$$

$$r_y = -r_\eta = -\frac{\eta - y}{r} = -\sin \alpha \quad (18)$$

$$n_x = \cos \beta \quad (19)$$

$$n_y = \sin \beta \quad (20)$$

$$r_n = r_\xi n_x + r_\eta n_y \quad (21)$$

$$r_t = -r_\xi n_y + r_\eta n_x \quad (22)$$

3.4. SEGUNDA ECUACIÓN INTEGRAL

La deducción de la segunda ecuación integral linealmente independiente de frontera se obtiene diferenciando la ecuación presentada en (6) con respecto a una dirección arbitraria $m(m_x, m_y)$, después el punto P se acerca a un punto p en Γ , y la dirección m es seleccionada para coincidir con el vector normal que sale de la frontera $v(v_x, v_y)$ en ese punto (Katsikadelis et al, 1977). Este método es particularmente útil cuando se requiere integrar los kernel que se comportan de forma $1/r^2$ cuando $r \rightarrow 0$, pues dan lugar a integrales hipersingulares de este tipo.

Consideremos la ecuación:

$$\begin{aligned} \alpha_x w_x(P) + \alpha_y w_y(P) &= \int_{\Omega} v_1 f d\Omega \\ &+ \int_{\Gamma} \left(v_1 V_w - w V v_1 - \frac{\partial v_1}{\partial n} M_w + \frac{\partial w}{\partial n} M v_1 \right) ds - \sum_k (v_1 \llbracket T_w \rrbracket_k - w \llbracket T v_1 \rrbracket_k) \end{aligned} \quad (23)$$

Si p es un punto de esquina es importante notar que debe ser omitido en las sumas en la ecuación (23).

La ecuación presentada en (23) constituye un par de relaciones de compatibilidad para las funciones de frontera $w, \partial w / \partial n, M_w$ y V_w junto con las fuerzas de esquina.

De las cuatro funciones de frontera, solo dos son determinadas por las condiciones de apoyo y carga sobre esta, las otras dos funciones pueden ser determinadas luego de obtener la solución del acople de las ecuaciones (7) y (23). En los puntos de esquina que yacen sobre el contorno, las funciones presentan discontinuidades, en consecuencia pueden aparecer fuerzas concentradas ficticias, entonces existen ocho valores de contorno asociados a una esquina: dos valores para la pendiente de la normal w_n^-, w_n^+ , dos valores del momento flector M_w^-, M_w^+ , dos valores de la fuerza efectiva de corte V_w^-, V_w^+ un valor para el desplazamiento transversal w y uno para la fuerza concentrada $\llbracket T w \rrbracket_k$, por lo cual ocho relaciones linealmente independientes son requeridas para cada punto de esquina; una de esas relaciones es obtenida de la ecuación (7) y dos adicionales de la ecuación (23), las cinco faltantes se consiguen por las condiciones de contorno impuestas y el requerimiento de suavidad asintótica de la solución en la vecindad del punto de esquina (Timoshenko, 1959).

Considerando la ecuación integral (23), las funciones de los kernel necesarias para resolverla se obtienen de la siguiente forma:

$$v_1 = \frac{1}{8\pi D} r r_v (1 + 2 \ln r) \quad (24)$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial n} = \frac{1}{8\pi D} [2(r_n r_v + r_t r_\tau) \ln r + 3r_n r_v + r_t r_\tau] \quad (25)$$

$$M_{v_1} = -\frac{1}{4\pi r} [(1 + \nu)r_v + 2(1 - \nu)r_n r_t r_\tau] \quad (26)$$

$$V_{v_1} = -\frac{1}{4\pi r^2} \{ [(-3 + \nu) + 2(1 - \nu)r_t^2] (r_n r_v - r_t r_\tau) + 4(1 - \nu)(r_n - k r) r_n r_t r_\tau \} \quad (27)$$

$$T_{v_1} = \frac{1 - \nu}{4\pi r} (r_t^2 - r_n^2) r_\tau \quad (28)$$

Las derivadas direccionales r_v y r_τ son calculadas en base a la figura número 1 como sigue:

$$r_v = r_x \cos \omega + r_y \sin \omega \quad (29)$$

$$r_t = -r_x \sin \omega + r_y \cos \omega \quad (30)$$

3.5. SOLUCIÓN NUMÉRICA DE LAS ECUACIONES INTEGRALES DE FRONTERA

Las ecuaciones (8) y (23) son resueltas usando la metodología de los elementos de frontera, para lo cual esta es discretizada en N elementos, que en el siguiente trabajo son del mismo tamaño, lo cual facilita la programación, pues la distribución de las cantidades w, w_n, M_w y V_w son consideradas también constantes en cada elemento e iguales a su valor en el punto nodal situado en medio de este. Designamos estas cantidades por w^i, w_n^i, M_w^i, V_w^i ($i = 1, 2, \dots, N$) y por w_c^k, R^k ($k = 1, 2, \dots, N_c$) los desplazamientos y las fuerzas concentradas en las esquinas respectivamente (Katsikadelis, 2014).

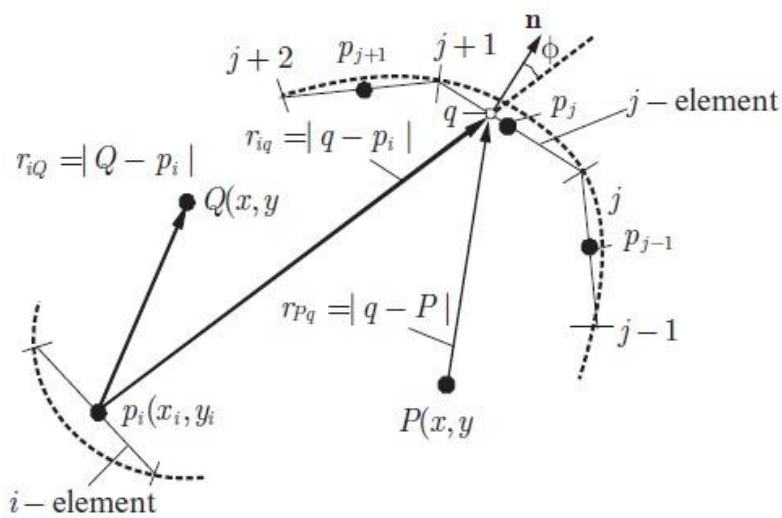


Figura 2: Katsikadelis, 2014. Ubicación de los puntos nodales en la discretización de elementos constantes.

Considerando la discretización anterior, se tiene:

- I. N ecuaciones de la ecuación (7) cuando se aplica a los N elementos en sus puntos nodales.

$$\frac{1}{2} w^i + \sum_{j=1}^N [V_v]^{ij} w^j - \sum_{j=1}^N [M_w]^{ij} w_n^j - \sum_{k=1}^{N_c} [[T_w]]^{ik} w_c^k =$$

$$\sum_{j=1}^N [v]^{ij} V_w^j - \sum_{j=1}^N [v_n]^{ij} M_w^j - \sum_{k=1}^{N_c} [v]^{ik} R^k + F_1^i \quad (31)$$

$$i = 1, 2, \dots, N$$

II. N_c ecuaciones de la ecuación (7) cuando se aplica a los N_c puntos de esquina.

$$\frac{\alpha}{2\pi} w_c^l + \sum_{j=1}^N [V_v]^{lj} w_w^j - \sum_{j=1}^N [M_v]^{lj} w_n^j - \sum_{k=1}^{N_c} [[T_v]]^{lk} w_c^k =$$

$$\sum_{j=1}^N [v]^{lj} V_w^j - \sum_{j=1}^N [v_n]^{lj} M_w^j - \sum_{k=1}^{N_c} [v]^{lk} R^k + F_2^l \quad (32)$$

$$l = 1, 2, \dots, N_c$$

III. N ecuaciones de la ecuación (23) cuando se aplica a los N elementos en sus puntos nodales.

$$\frac{1}{2} w_n^i + \sum_{j=1}^N [V_{v1}]^{ij} w_w^j - \sum_{j=1}^N [M_{v1}]^{ij} w_n^j - \sum_{k=1}^{N_c} [[T_{v1}]]^{ik} w_c^k =$$

$$\sum_{j=1}^N [v_1]^{ij} V_w^j - \sum_{j=1}^N [v_{1n}]^{ij} M_w^j - \sum_{k=1}^{N_c} [v_1]^{ik} R^k + F_3^i \quad (33)$$

$$i = 1, 2, \dots, N$$

para las ecuaciones (31), (32) y (33) los términos relevantes a evaluar corresponden a integrales de línea definidas como sigue:

$$[v]^{ij} = \int_{\Gamma_j} v(p_i, q) ds_q \quad (34)$$

$$[M_v]^{ij} = \int_{\Gamma_j} M_v(p_i, q) ds_q \quad (35)$$

$$[v_n]^{ij} = \int_{\Gamma_j} \frac{\partial v(p_i, q)}{\partial n_q} ds_q \quad (36)$$

$$[V_v]^{ij} = \int_{\Gamma_j} V_v(p_i, q) ds_q \quad (37)$$

$$[v_1]^{ij} = \int_{\Gamma_j} v_1(p_i, q) ds_q \quad (38)$$

$$[v_{1n}]^{ij} = \int_{\Gamma_j} \frac{\partial v_1(p_i, q)}{\partial n_q} ds_q \quad (39)$$

$$[M_{v1}]^{ij} = \int_{\Gamma_j} M_{v1}(p_i, q) ds_q \quad (40)$$

$$[V_{v1}]^{ij} = \int_{\Gamma_j} V_{v1}(p_i, q) ds_q \quad (41)$$

$$[[T_v]]^{ik} = [[T_v(p_i, q_k)]] \quad (42)$$

$$[[T_{v1}]]^{ik} = [[T_{v1}(p_i, q_k)]] \quad (43)$$

$$F_1^i = \int_{\Omega} f v(p_i, Q) d\Omega_q \quad (44)$$

$$F_2^l = \int_{\Omega} f v(p_l, Q) d\Omega_q \quad (45)$$

$$F_3^i = \int_{\Omega} f v_1(p_i, Q) d\Omega_q \quad (46)$$

Donde Γ_j corresponde al segmento en el cual se localiza el elemento j y el lugar en la cual la integración es llevada a cabo, p_i es el punto medio nodal y p_l y q_k son puntos de esquina respectivamente.

Las ecuaciones (44), (45) y (46) corresponden a integrales del dominio interior de la placa, las cuales serán transformadas a integrales sobre la frontera, utilizando el hecho de que para una placa sometida a una fuerza distribuida uniformemente, transversal a su superficie, sobre un área $\Omega^* \subseteq \Omega$ limitada por la curva Γ^* es $\nabla^2 f = 0$ y por lo tanto aplicando la identidad de Rayleigh-Green a la función $v = f$ y $u = \hat{u}$, donde \hat{u} es una solución particular de la ecuación

$$\nabla^2 \hat{u} = v, \quad v = \frac{1}{8\pi D} r^2 \ln r \quad (47)$$

Se obtiene

$$\int_{\Omega^*} v f d\Omega = \int_{\Gamma^*} (f \hat{u}_{,n} - f_{,n} \hat{u}) ds \quad (48)$$

La función \hat{u} resulta de la integración de la ecuación (47), así se tiene que

$$\hat{u} = \frac{r^4(2 \ln r - 1)}{256\pi D} \quad (49)$$

y la derivada normal

$$\hat{u}_{,n} = \frac{r^3(2 \ln r - 0.5)r_v}{64\pi D} \quad (50)$$

Luego diferenciando (48) con respecto a la dirección v se obtiene

$$\int_{\Omega^*} v_1 f d\Omega = \int_{\Gamma^*} (f \hat{u}_{1,n} - f_{,n} \hat{u}_1) ds \quad (51)$$

donde

$$\hat{u}_1 = \frac{r^3(2 \ln r - 0.5)r_v}{64\pi D} \quad (52)$$

$$\hat{u}_{1n} = \frac{1}{64\pi D} r^2 [r_n r_v (6 \ln r + 0.5) + r_\tau r_t (2 \ln r - 0.5)] \quad (53)$$

Utilizando la discretización anterior para la fuerza de dominio y considerando las expresiones de las ecuaciones (52) y (53), se obtienen las expresiones de la fuerza en términos de integrales de frontera (Katsikadelis, 2014) como

$$F_1^i = \sum_{j=1}^N \int_{\Gamma_j} [f \hat{u}(r_{ij})_n] ds \quad (54)$$

$$F_2^l = \sum_{j=1}^N \int_{\Gamma_j} [f \hat{u}(r_{ij})_n] ds \quad (55)$$

$$F_3^i = \sum_{j=1}^N \int_{\Gamma_j} [f \hat{u}_1(r_{ij})_n] ds \quad (56)$$

finalmente, las ecuaciones (31), (32) y (33) pueden combinarse como:

$$H \begin{Bmatrix} w \\ w_c \\ w_n \end{Bmatrix} = G \begin{Bmatrix} V \\ R \\ M \end{Bmatrix} + F \quad (57)$$

donde

$$H = \begin{bmatrix} [V_v]^{ij} + \frac{1}{2} \delta_{ij} & - [T_v]^{ik} & - [M_v]^{ij} \\ [V_v]^{lj} + \frac{\alpha}{2\pi} \delta_{lj} & - [T_v]^{lk} & - [M_v]^{lj} \\ [V_{v1}]^{ij} & - [T_{v1}]^{ik} & - [M_{v1}]^{ij} + \frac{1}{2} \delta_{ij} \end{bmatrix}_{(2N+N_c) \times (2N+N_c)} \quad (58)$$

$$G = \begin{bmatrix} [v]^{ij} & - [v]^{ik} & - [v_n]^{ij} \\ [v]^{lj} & - [v]^{lk} & - [v_n]^{lj} \\ [v_1]^{ij} & - [v_1]^{ik} & - [v_{1n}]^{ij} \end{bmatrix}_{(2N+N_c) \times (2N+N_c)} \quad (59)$$

$$F = \begin{Bmatrix} F_1^i \\ F_2^l \\ F_3^i \end{Bmatrix} \quad (60)$$

La ecuación (49) constituye un sistema de $2N + N_c$ ecuaciones lineales para las $4N + 2N_c$ cantidades de frontera desconocidas y utilizando las condiciones de contorno adecuadas es posible obtener:

$$\bar{H} \begin{Bmatrix} w \\ w_c \\ w_n \end{Bmatrix} = \bar{G} \begin{Bmatrix} V \\ R \\ M \end{Bmatrix} = \bar{F} \quad (61)$$

y se define

$$\bar{H} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & c_1 & 0 \\ 0 & 0 & \beta_1 \end{bmatrix} \quad (62)$$

$$\bar{G} = \begin{bmatrix} \alpha_2 & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & \beta_2 \end{bmatrix} \quad (63)$$

$$\bar{F} = \begin{Bmatrix} \alpha_3 \\ c_3 \\ \beta_3 \end{Bmatrix} \quad (64)$$

con $\alpha_i, \beta_i (i = 1, 2)$ son matrices diagonales de dimensión $N \times N$, $c_i (i = 1, 2)$ son matrices diagonales de dimensión $N_c \times N_c$, y α_3, β_3 y c_3 son vectores de la dimensión correspondiente.

3.6. CONDICIONES DE CONTORNO

Si bien es cierto el método de los elementos de frontera en su versión directa admite una gran cantidad de condiciones de contorno, el presente trabajo utilizara dos de ellas: todos los bordes empotrados y todos los bordes simplemente apoyados, cuya aplicación al problema consiste en definir apropiadamente las sub-matrices y sub-vectores utilizados en las ecuaciones (62), (63) y (64) de la siguiente forma:

Todos los bordes empotrados ($w = 0, \partial_w / \partial_n = 0$)

$$\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 0, \alpha_3 = 0, \beta_1 = 1, \beta_2 = 0, \beta_3 = 0, c_1 = 1, c_2 = 0, c_3 = 0$$

Todos los bordes simplemente apoyados ($w = 0, M_n = 0$)

$$\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 0, \alpha_3 = 0, \beta_1 = 0, \beta_2 = 1, \beta_3 = 0, c_1 = 1, c_2 = 1, c_3 = 0$$

3.7. TRATAMIENTO DE LAS SINGULARIDADES

Se pueden distinguir dos casos en la evaluación de las integrales de línea definidas para las matrices H y G:

I. Elementos fuera de la diagonal $i \neq j$

En este caso el punto $p_i(x_i, y_i)$ yace fuera del elemento j y por lo tanto la distancia $r = |q - p_i|$ no se hace nula y en consecuencia, la integral es considerada regular y se aplica la cuadratura de Gauss estándar con 4 puntos para su evaluación.

II. Elementos de la diagonal $i = j$

En este caso el nodo p_i coincide con el nodo p_j y r yace sobre el elemento, en consecuencia, esta distancia r asume el valor cero y algunas de las integrales de línea pueden ser singulares o hipersingulares y su evaluación requiere de especial cuidado, por lo cual se realiza su evaluación de forma analítica.

Aparentemente las integrales $[v]^{ii}, [v_n]^{ii}$ y $[v_1]^{ii}$ son regulares, mientras que $[M_v]^{ii}, [V_v]^{ii}, [v_{1n}]^{ii}, [M_{v1}]^{ii}$ y $[V_{v1}]^{ii}$ presentan singularidades de tipo logarítmica, Cauchy $1/r$ y $1/r^2$ respectivamente, y por lo tanto su evaluación analítica queda representada por:

$$[M_v]^{ii} = -\frac{(1 + \nu) l_i}{2\pi} \frac{l_i}{2} \left[\ln \left(\frac{l_i}{2} \right) - 1 \right] + (1 + 3\nu) l_i \quad (65)$$

$$[V_v]^{ii} = 0 \quad (66)$$

$$[v_{1n}]^{ii} = \frac{l_i}{8\pi D} \left[2 \ln \left(\frac{l_i}{2} \right) - 1 \right] \quad (67)$$

$$[M_{v1}]^{ii} = 0 \quad (68)$$

$$[V_{v1}]^{ii} = -\frac{(1+\nu)}{\pi l_i} \quad (69)$$

La expresión de la ecuación (69) coincide con la definición de la solución de (41) para una integral hipersingular (Hadamard, 1923).

Integrales singulares de frontera también aparecen cuando la integración es realizada en los elementos adyacentes a una esquina l , en este caso el punto en donde $r = 0$ es aquel en el cual finaliza dicho elemento. Las integrales $[v]^{lj}$ y $[v_n]^{lj}$ son regulares, mientras que $[M_v]^{lj}$ y $[V_v]^{lj}$ exhiben singularidad de tipo logarítmica y Cauchy $1/r$, y por lo tanto son integradas de forma analítica como sigue:

$$[M_v]^{lj} = [M_v]^{l,j+1} = -\frac{l_j}{8\pi} \left[2(1+\nu)[(\ln l_j - 1) + (1+3\nu)] \right] \quad (70)$$

$$[V_v]^{lj} = [V_v]^{l,j+1} = 0 \quad (71)$$

Finalmente, se tiene que $T_v = 0$ para $r = 0$

$$[[T_v]]^{ll} = 0 \quad (72)$$

Las expresiones obtenidas anteriormente fueron utilizadas en el tratamiento de las singularidades que aparecen en la evaluación de las integrales de línea de la solución numérica en la formulación. (Katsikadelis, 2014).

3.8. DEFLEXIÓN EN CUALQUIER PUNTO DE LA PLACA

Luego de que las cantidades de contorno w, w_c, w_n, V, R y M , que corresponden a la deflexión en cada punto medio del contorno, la deflexión en los puntos de esquina, la pendiente normal, el corte efectivo, las fuerzas concentradas que aparecen en las esquinas según la teoría de Kirchhoff y el momento flector respectivamente son obtenidas, es posible calcular la deflexión en cualquier punto del dominio interior de la placa utilizando la ecuación (6), que discretizada de la misma forma anterior queda como:

$$w(P) = F_i + \sum_{j=1}^N \left([v]_P^j V_w^j - [V_v]_P^j w^j - [v_n]_P^j M_w^j + [M_v]_P^j w_n^j \right) - \sum_{k=1}^{N_c} \left(v_P^k R^k - [[T_v]]_P^k w^k \right) \quad (73)$$

Para este caso las matrices de influencia son evaluadas haciendo colocación en la frontera y puntos de esquina cuando corresponde y el punto de campo es seleccionado de un punto interior del dominio.

4. RESULTADOS

A continuación se presentan los resultados para una placa de $12 \times 12 \text{ m}$, con un espesor $h = 0,05 \text{ m}$, para una fuerza transversal uniformemente aplicada de $1000 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$, un módulo de Young de $2,1 \times 10^{10} \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$, un coeficiente de Poisson de 0.3 (propiedades típicas de un acero estructural), una placa con un refinamiento de 48 elementos de frontera y 288 elementos triangulares de dominio, para una configuración de bordes empotrados.

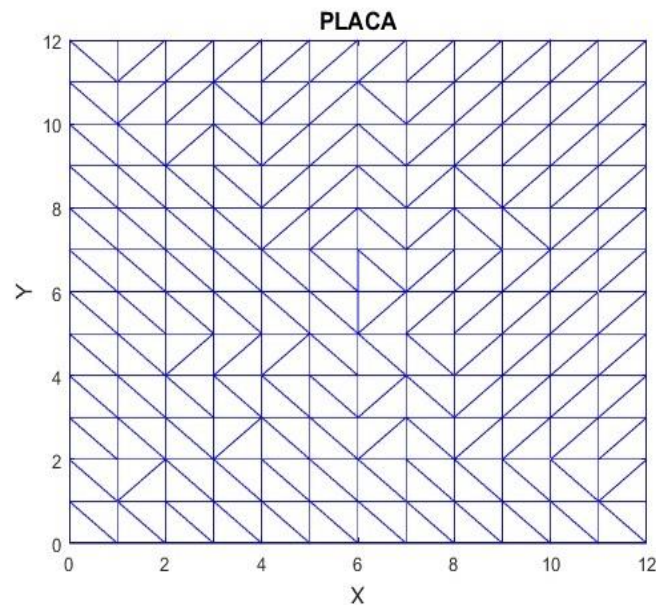


Figura 3: Discretización de la placa en 48 elementos lineales de frontera. Elaboración propia.

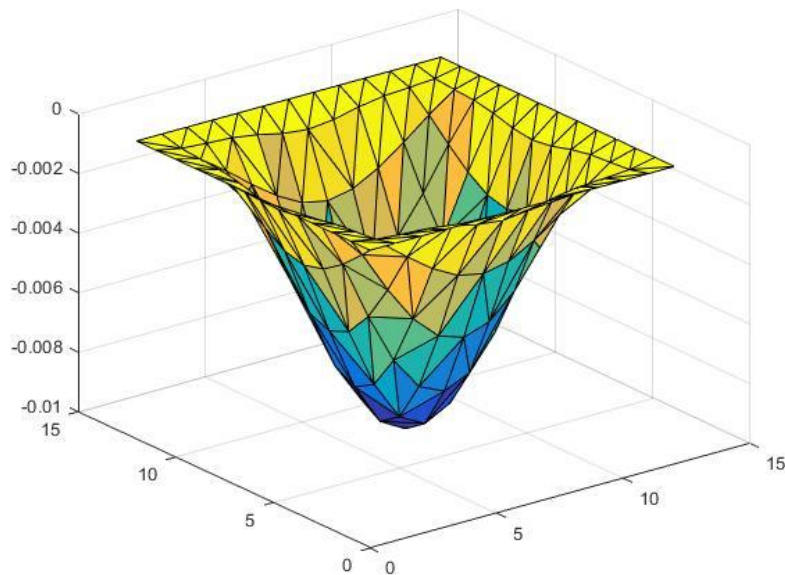


Figura 4: Deformada de la placa con 48 elementos lineales de frontera para el caso empotrado. Elaboración propia.

La deflexión máxima obtenida para la placa, con las características descritas anteriormente, en su punto central fue de $0,00966482 \text{ m}$. analíticamente la deflexión máxima para esta placa, en su punto central, da como resultado $0,01086898 \text{ m}$ (Timoshenko, 1959).

Las fuerzas concentradas en los esquinas $[[T_w]]_k = R$, como es de esperar por la simetría del problema (placa cuadrada), presentan igual magnitud.

Tabla 1: Fuerzas concentradas en las esquinas utilizando 48 elementos lineales de frontera para el caso empotrado.

| FUERZAS CONCENTRADAS DE ESQUINA | MAGNITUD |
|---------------------------------|-------------------------------|
| nodo (0,0) | $1,035 \times 10^3 \text{ N}$ |
| nodo (12,0) | $1,035 \times 10^3 \text{ N}$ |
| nodo (12,12) | $1,035 \times 10^3 \text{ N}$ |
| nodo (0,12) | $1,035 \times 10^3 \text{ N}$ |

El corte efectivo calculado para la placa con las propiedades anteriores puede verse representado por la figura número 6 (resultados expresados en N), es interesante notar la simetría que se presenta, además del salto producido por la discontinuidad en las condiciones de contorno en los puntos de esquina.

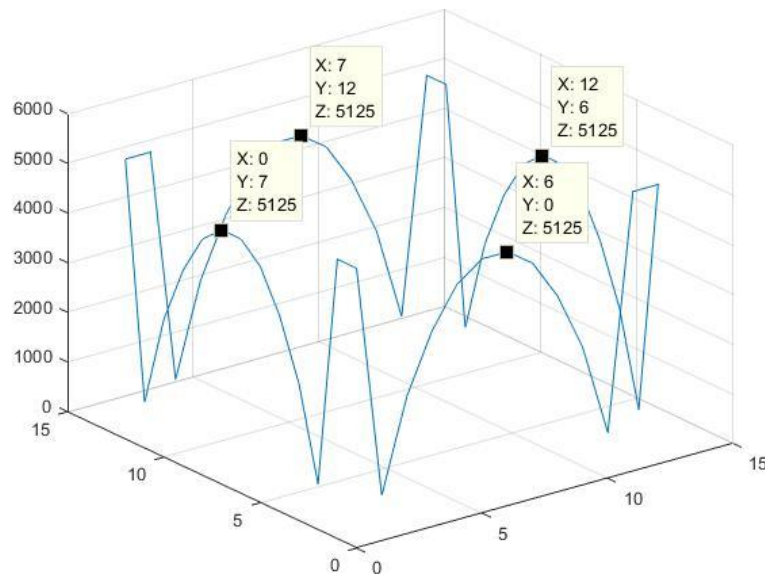


Figura 6: Fuerza de corte efectiva sobre los nodos del contorno utilizando 48 elementos lineales de frontera para el caso empotrado. Elaboración propia.

Utilizando las mismas propiedades anteriores, pero refinando la malla a una de 96 elementos de frontera, con 576 elementos triangulares de dominio, para una configuración de bordes empotrados, se tiene:

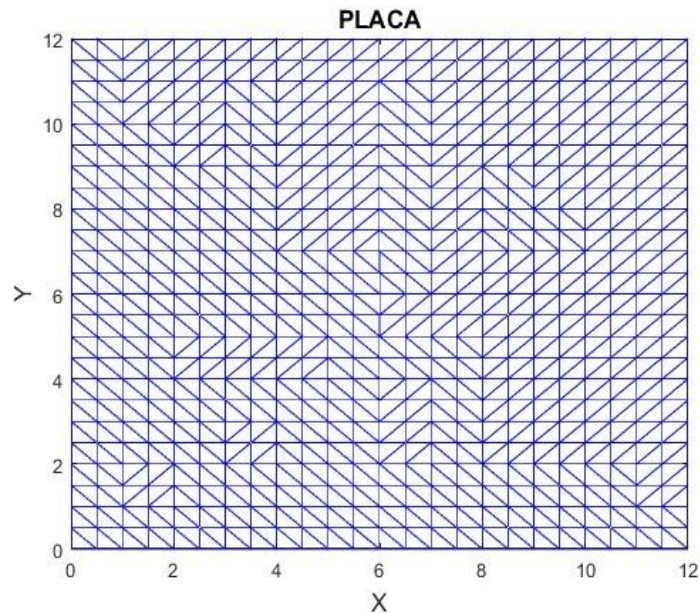


Figura 7: Discretización de la placa en 96 elementos lineales de frontera. Elaboración propia.

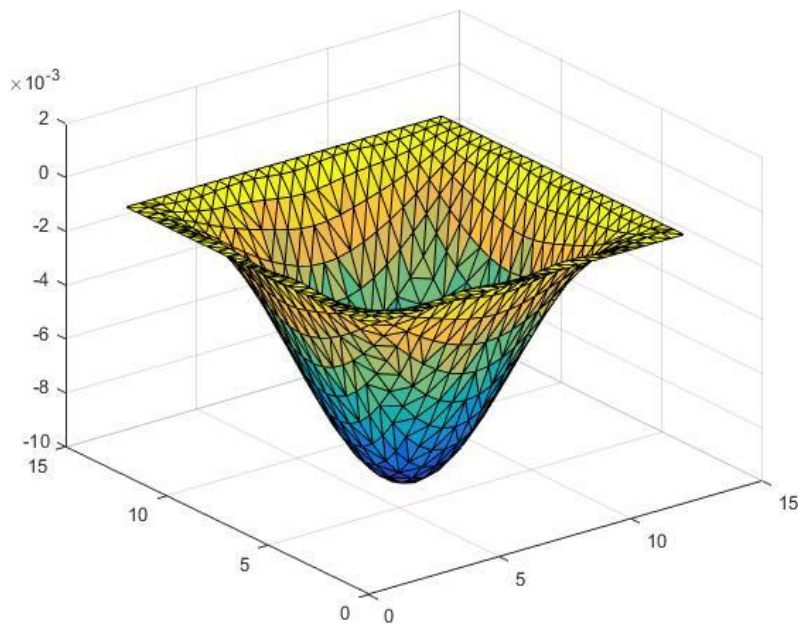


Figura 8: Deformada de la placa con 96 elementos lineales de frontera para el caso empotrado. Elaboración propia.

La deflexión máxima obtenida para este nivel de refinamiento de malla fue de 0,00986482 m.

Considerando las mismas características de placa anteriores, pero cambiando las condiciones de frontera a una de tipo simplemente apoyada en todos los bordes, y para un mallado de 48 elementos de frontera se obtiene una deflexión máxima de 0,03084720 m, siendo la obtenida analíticamente de 0,03450470 m (Timoshenko, 1959).

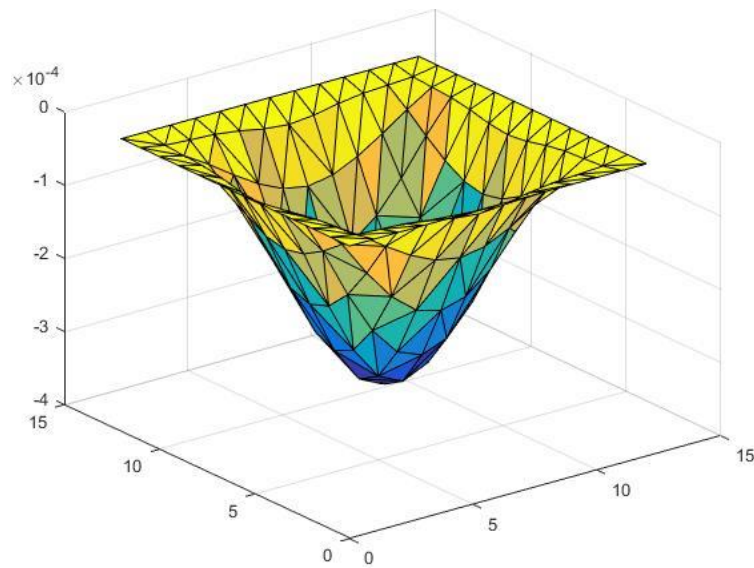


Figura 9: Deformada de la placa con 48 elementos lineales de frontera para el caso simplemente apoyado.
 Elaboración propia.

Las fuerzas concentradas en las esquinas, para el caso simplemente apoyado se ven reflejadas en la tabla número 2:

Tabla 2: Fuerzas concentradas en las esquinas utilizando 48 elementos lineales de frontera para el caso simplemente apoyado.

| FUERZAS CONCENTRADAS DE ESQUINA | Magnitud |
|---------------------------------|-------------------------------|
| nodo (0,0) | $9,112 \times 10^3 \text{ N}$ |
| nodo (12,0) | $9,112 \times 10^3 \text{ N}$ |
| nodo (12,12) | $9,112 \times 10^3 \text{ N}$ |
| nodo (0,12) | $9,112 \times 10^3 \text{ N}$ |

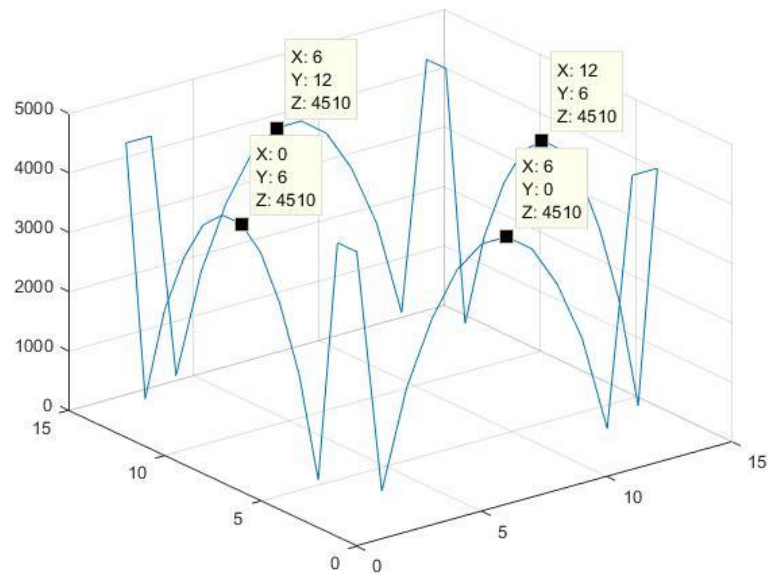


Figura 11: Fuerza de corte efectiva sobre los nodos del contorno utilizando 48 elementos lineales de frontera para el caso simplemente apoyado. Elaboración propia.

Análogamente, se aplica ahora para una malla más refinada de 96 elementos y se obtiene que la deflexión máxima es de 0,03124731 m.

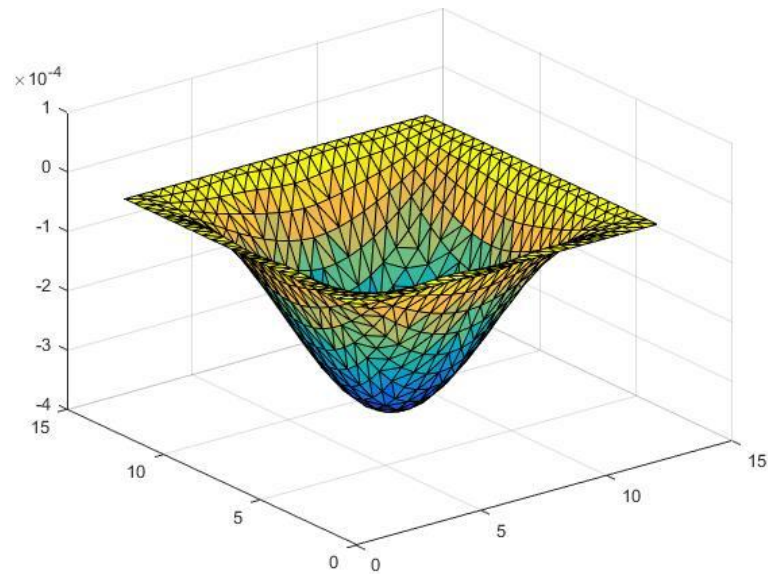


Figura 12: Deformada de la placa con 96 elementos lineales de frontera para el caso simplemente apoyado. Elaboración propia.

5. CONCLUSIONES

Se implementó un código en lenguaje Matlab® que permitió evaluar numéricamente cada una de las integrales de línea que componen la formulación del método, empleando la cuadratura Gaussiana estándar en su versión de cuatro puntos en la evaluación de todas aquellas integrales que presentan un comportamiento regular y utilizando un enfoque analítico para el tratamiento de las singularidades que surgen en el cálculo de las diagonales de algunas de estas, cuando el punto nodal coincide con el punto de colocación.

Los resultados de la deflexión máxima para el caso empotrado en todos los bordes y para una malla de 48 elementos de frontera, discrepa con la solución analítica en un 11,08 % y para una malla de 96 elementos el resultado difiere 9,24%

Para el caso de los bordes simplemente apoyados los resultados difieren 10,60% y 9,44% con la solución analítica para las mallas de 48 y 96 elementos respectivamente.

Se logró calcular los esfuerzos de corte y las fuerzas concentradas que aparecen en las esquinas mediante el código, bajo dos condiciones de contorno distintas, para además comprobar que estos resultados son consistentes con la simetría que conlleva el análisis de una placa cuadrada.

Se puede deducir de estos resultados que se está sub estimando la fuerza aplicada sobre la placa en la formulación que permite calcular la fuerza del dominio interior de la placa en la frontera de esta, mediante una discretización de frontera, pues las deflexiones corresponden a unas de menor magnitud. Sería interesante comprobar estos resultados mediante el esquema clásico de discretización de la fuerza sobre el dominio utilizando un enfoque bi-dimensional con elementos rectangulares o triangulares.

6. REFERENCIAS

Beskos, D.E (1991). *Boundary Element Analysis of Plates and Shells*. Springer-Verlag, Berlin, Alemania.

Forbes, D.J. Robinson, A.R (1969). *Numerical Analysis of Elastic Plates and Shallow Shells by an Integral Equation Method*. Structural Research Series, University of Illinois, Illinois, EE.UU.

Hadamard, J (1923). "Lectures on Cauchy's Problem in Linear Partial Differential Equations", *Yale University Press*, New Haven, EE.UU.

Katsikadelis, J.T. (2014). *The Boundary Element Method for Plate Analysis*, Academic Press, Elsevier, Oxford, U.K.

Timoshenko, S. Woinowsky-Krieger, S. (1959). *Theory of Plates and Shells, second ed.*, McGraw-Hill, New York, EE.UU.