UNIVERSIDAD CATÓLICA DE LA SANTÍSIMA CONCEPCIÓN
FACULTAD DE EDUCACIÓN – FACULTAD DE INGENIERÍA
MAGÍSTER EN DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA

[Construcción y análisis de un dispositivo didáctico en el Eje de Probabilidad y Estadística**]**

POR: Juana Arriagada Durán

Tesis presentada a la Facultad de Educación de la Universidad Católica de la Santísima Concepción para optar al grado académico de Magister en Didáctica de la Matemática.

MAGÍSTER EN DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA

PROFESOR: Dra. Carmen Cecilia Espinoza Melo

CONCEPCIÓN, Abril - 2019

ÍNDICE DE CONTENIDOS

Contenido

INDICE DE FIGURAS

INDICE DE TABLAS

Resumen

Esta investigación tiene como propósito el diseño y aplicación de un dispositivo didáctico como medio para trabajar los contenidos de Probabilidad y Estadística en primer y segundo año de Enseñanza Media con el objetivo de contribuir a la enseñanza de un área del conocimiento matemático y fortalecer el trabajo de adquisición de aprendizaje en los estudiantes mediante el desarrollo de secuencias didácticas que se fortalecen en un orden de Organizaciones matemáticas y didácticas que entregan funcionalidad al trabajo presentado al estudiantes de acuerdo a las indicaciones del Programa de Estudio propuesto por el Marco Curricular Chileno.

El dispositivo didáctico diseñado y aplicado a los estudiantes tiene su fundamento en la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) que plantea la necesidad de introducir en los sistemas de enseñanza procesos de estudio funcionales que se visualizan a través de un Recorrido de Estudio e Investigación (REI) que realiza la reconstrucción funcional de los saberes matemáticos como respuesta a ciertas cuestiones fundamentales que transitan e interactúan en base a una gran pregunta generatriz y sub-interrogantes que tributan a la construcción de aprendizaje. La incorporación de los REI en los procesos de enseñanza busca y requiere de un cambio de paradigma de enseñanza, del paradigma tradicional al de la Investigación y del Cuestionamiento del Mundo, de esta manera los estudiantes guiados por el profesor el cual predefine el tipo de operación mental que desea explicitar con trabajo profundo en las Organizaciones matemáticas que permitan a los estudiantes encontrar las herramientas y caminos para alcanzar procedimientos que den respuesta a la interrogantes planteadas. De esta manera los estudiantes mediantes procesos de interacción en un encuentro dialógico mejoran sus técnicas para cumplir con la tarea y actividades propuestas.

El punto de inicio del REI, es una “pregunta integradora” llamada cuestión generatriz y una serie de situaciones problemas más acotadas y específicas usadas para abordar los contenidos del programa de estudio en la unidad de Probabilidad y Estadística en Primer y Segundo Año de Enseñanza Media de un Liceo Municipal de Talcahuano. Los resultados muestran influencia positiva del REI en las variables estudiadas. La finalidad de la investigación es describir los niveles de conocimiento matemático adquiridos por los estudiantes en el transcurso de la intervención con el REI y el nivel de interacción con las organizaciones matemáticas propuestas mediante tareas a las cuales los estudiantes las enfrentan indagando y buscando solución en forma colaborativa. La investigación se

enmarca en el método participativo y descriptivo para establecer el impacto del REI en las variables en estudio. Aquí se presentan preguntas que constituyen la propuesta del trabajo en clase donde los alumnos serán los encargados de buscar los caminos para solucionar la interrogante presentada, mientras que el papel del profesor es crear el REI, orientar y guiar las actividades de sus estudiantes en el aula. Los resultados obtenidos de la implementación del REI permiten establecer la influencia del dispositivo didáctico en el proceso de enseñanza, el rescate de las organizaciones matemáticas y el tipo de tareas como también las formas para alcanzar un mejor proceso de resolución frente a las interrogantes planteadas, como indicadores de un aprendizaje profundo y duradero, mediante el cual los estudiantes se muestran motivados a trabajar en forma cooperativa y opinan favorablemente acerca de su implementación.

ABSTRAC

The purpose of this research is the design and application of a didactic device as a means to work on the contents of statistics and probability in the first and second year of secondary education with the aim of contributing to the teaching of an area of mathematical knowledge and strengthening the work of acquisition of learning in students through the development of didactic sequences that are strengthened in an order of mathematical and didactic organizations that deliver functionality to the work presented to students according to the indications of the Study Program proposed by the Chilean Curricular Framework.

The didactic device designed and applied to the students has its foundation in the Anthropological Theory of the Didactic (TAD) that raises the need to introduce into the teaching systems functional study processes that are visualized through a Study and Research Course (REI) that performs the functional reconstruction of mathematical knowledge as a response to certain fundamental questions that transit and interact based on a large generating question and sub-questions that contribute to the construction of learning. The incorporation of the REI in the teaching processes seeks and requires a change of teaching paradigm, from the traditional paradigm to the Research and the Questioning of the World, in this way the students guided by the teacher which predefines the type of operation mental that you want to explain with deep work in the Mathematical Organizations that allow students to find the tools and ways to reach procedures that respond to the questions raised. In this way the students mediating interaction processes in a dialogical encounter improve their techniques to fulfill the task and proposed activities.

The starting point of the REI is an "integrating question" called the generating question and a series of more limited and specific problems used to address the contents of the study program in the unit of statistics and probability in First and Second Year of High School of a Municipal Lyceum of Talcahuano. The results show a positive influence of the REI on the variables studied. The purpose of the research is to describe the levels of mathematical knowledge acquired by the students during the course of the intervention with the REI and the level of interaction with the proposed mathematical organizations by means of tasks to which the students are confronted by inquiring and looking for a solution. collaborative The research is part of the participative and descriptive method to establish the impact of the REI on the variables under study. Here are presented questions that constitute the proposal of work in class where students will be responsible for finding ways to solve the question presented, while the role of the teacher is to create the REI, guide and guide the activities of

their students in the classroom . The results obtained from the implementation of the REI allow to establish the influence of the didactic device in the teaching process, the rescue of the mathematical organizations and the type of tasks as well as the ways to reach a better resolution process in front of the raised questions, like Indicators of a deep and lasting learning, through which students are motivated to work cooperatively and think favorably about its implementation.

INTRODUCCIÓN.

Todas las personas se enfrentan regularmente a situaciones matemáticas cuando compran, viajan, se alimentan, pagan sus impuestos, gestionan sus finanzas personales, organizan su tiempo y sus entornos vitales, juzgan cuestiones políticas en cuanto procesos electorales, y muchas otras, en las que usan el razonamiento cuantitativo, relacional o espacial.

El conocimiento se construye sobre la base de las propias experiencias y saberes previos, el ser humano busca permanentemente significados y patrones en los fenómenos que ocurren a su alrededor, lo que, sumado a la influencia que ejercen las emociones sobre los procesos cognitivos, es fundamental para lograr un aprendizaje profundo. Por ello, las experiencias de aprendizaje deben evocar emociones positivas y diseñarse con un nivel adecuado de exigencia, de modo que representen un desafío cognitivo para las alumnas y los alumnos. Investigar, realizar conexiones y transferencias a otras áreas, plantear y resolver problemas complejos, argumentar creencias y teorías, y organizar información de acuerdo a modelos propios son algunos ejemplos de actividades adecuadas para la construcción del aprendizaje.

Es por esta razón que el currículum chileno busca que los estudiantes comprendan las matemáticas para ser capaz de aplicar sus conceptos y procedimientos a la resolución de problemas reales como base fundamental para los ciudadanos y las ciudadanas en el mundo moderno y para ello incorpora una secuencia de trabajo en la cual los conocimientos se organizan en cuatro ejes temáticos: Números, Álgebra y funciones, Geometría y Probabilidad y estadística (Mineduc, Currículum en Linea,Programa de Estudio Matemática, 2017).

El marco curricular vigente (2007) nos entrega lineamientos en el Eje de Probabilidad y Estadística que nos indican la necesidad de los estudiantes en aprender a realizar análisis, inferencias y obtengan información a partir de datos estadísticos, para formar estudiantes críticos que puedan utilizar la información para validar sus opiniones y decisiones. En probabilidad, se pretende que estimen de manera intuitiva y que calculen de manera precisa la probabilidad de ocurrencia de eventos en forma experimental y teórica, y que construyan modelos probabilísticos basados en situaciones aleatorias, que los estudiantes diseñen experimentos de muestreo aleatorio para inferir sobre características de poblaciones, experimentos aleatorios sencillos, para construir desde ellos la teoría y modelos probabilísticos; utilicen medidas de tendencia central, de posición y de dispersión para resolver problemas. El estudiante deberá comprender el rol de la probabilidad en la sociedad, utilizando herramientas de la estadística y de la probabilidad misma (Mineduc, Currículum en Linea,Programa de Estudio Matemática, 2017).

Tomando como base la problemática la enseñanza de la Probabilidad y Estadística y rol que cumple estas áreas del conocimiento en el marco de la cultura en Probabilidad y Estadística con su lenguaje propio y su rol cada vez más imperante en la sociedad de la información y del conocimiento, se trabaja esta investigación que centra la atención en la Teoría Antropológica de lo Didáctico, aspectos del currículum nacional vigente y la integración de las tecnologías de la información y comunicación TIC articulados en la construcción y utilización de un Recorrido de Estudio e investigación(REI) propuesto por Chevallard, en estudiantes de 1º Y 2º año de Enseñanza Media, en donde el trabajo con REI junto a un pregunta generatriz y sus consiguientes interrogantes nos permitirán encontrar y re-encontrar las organizaciones matemáticas propuestas para enseñar en los programas de estudios.

La presente investigación por tanto se centra en el análisis y construcción de un dispositivo didáctico REI con base en la Teoría Antropológica de lo Didáctico en el Eje de Probabilidad y Estadística, en donde los estudiantes enfrentan una metodología de trabajo basada en una gran pregunta generatriz integradora, que los lleva a preguntas derivadas de ésta para indagar las formas de enseñanza, los conocimientos y formas de resolución e indagación que conduzcan a organizaciones matemáticas que movilizan el proceso de enseñanza entregando información sobre un conjunto de tareas, técnicas, tecnologías y teorías que permita a los estudiantes conectarse a ésta pregunta generatriz con las sub-interrogantes o preguntas derivadas y la forma de cómo las respuestas a éstas enriquecen y entregan información sobre el trabajo realizado en el proceso de enseñanza generando dinamismo en el proceso de interacción entre pares guiados por su profesor en un aprendizaje funcional que entrega sentido al desarrollo de las actividades trabajadas por parte de los estudiantes para ir avanzando y complementando el trabajo de preguntas y respuestas generadas por la interacción con el dispositivo con el apoyo y dirección del profesor que se ve obligado a realizar cambios sustanciales con respecto el método de enseñanza tradicional.

Para ello se expone en un Primer Capítulo el planteamiento del problema de investigación desarrollado en una primera parte con la Problematización que resume antecedentes contextuales y empíricos que permiten tener una visión general de la Enseñanza de la Matemática en Chile, bajo una mirada didáctica.

A continuación se señalan los supuestos que la orientan, como también los objetivos de la investigación que nos permitirán develar información científica específica en base a las dialécticas y funciones didácticas presentes en las respuestas de los estudiantes al aplicar nuestro dispositivo didáctico. Se expone también en este capítulo la Justificación del Problema, que nos da noticia sobre los alcances de esta investigación y la necesidad de tener conciencia de los vacíos existentes en esta área de investigación como también los aportes que nos entregarán los resultados de ésta.

En el segundo capítulo se desarrollará el Marco Teórico que es el sustento de la investigación, enmarcado en la Teoría Antropológica de lo Didáctico en donde se explicarán los elementos de dicha teoría que fundamentan esta investigación.

En el tercer capítulo se describe el Marco Metodológico de la Investigación que dará luces sobre el objetivo de la investigación llevado a su ejecución, inicialmente bajo el paradigma cualitativo con un enfoque descriptivo-interpretativo que proporcione una visión a partir de datos en forma de palabras, imágenes y desarrollo de respuestas de los estudiantes con el objeto de entregar información valiosa con una rica descripción que dote al estudio de la capacidad de informar y aplicar resultados.

En el cuarto capítulo se muestran los resultados en base a la recogida de información y detalles del instrumento utilizado para recoger esta información como también la forma de construcción de las categorías de análisis que evidencien el trabajo realizado por los estudiantes frente a las respuestas generadas con la pregunta generatriz y las sub-interrogantes generadas por el dispositivo didáctico.

Luego en el quinto capítulo se realizará un análisis profundo de la información obtenida contrastando con los referentes teóricos, utilizando para ello técnicas de análisis de estudios cualitativos para levantar nuevo conocimiento en el proceso de enseñanza de la matemática con las orientaciones didácticas del sustento teórico.

Finalmente en el sexto capítulo se realizarán las proyecciones, alcances, limitaciones y conclusiones de la investigación en coherencia con el objeto de estudio y los hallazgos encontrados.

Capitulo I. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

CAPÍTULO 1: PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA.

1.1. PROBLEMATIZACIÓN

La matemática es una ciencia antigua, importante según el ámbito social, cuyo origen se encuentra en distintas culturas teniendo la finalidad de resolver problemas cotidianos del hombre, comenzando desde los primeros años.

Existe por tanto un interés permanente de los investigadores en conocer de qué manera se imparten de mejor forma la enseñanza matemáticas en el aula, considerando las habilidades y destrezas de nuestros estudiantes como también las dificultades que presentan en el desarrollo de los contenidos desatendiendo muchas veces la búsqueda de comprensión de las nociones (Bonacina, Teti, Haida, Bortolato, & Philippe, 2014) .

A partir de la Reforma Educacional de los años noventa, el sistema educativo de nuestro país ha venido desarrollando una serie de procesos de ajuste que han intentado mejorar los procesos de aprendizaje de los estudiantes. Sin embargo, dichas instancias han presentado algunas particularidades que provocan sensaciones, reflexiones y críticas de parte de los estudiantes y profesores (Mineduc, Currículum en Linea,Programa de Estudio Matemática, 2017).

Al analizar la enseñanza de la matemática y los continuos cambios producidos en el Programa de Estudio por las adecuaciones curriculares realizadas progresivamente en nuestro país, se establece una falta de diversidad de métodos que llevan a pensar que la enseñanza de la Matemática se considera una tarea difícil, una disciplina dura, rigurosa y formal que finaliza en un desencanto del estudiante, obteniendo generalmente malos resultados educativos (Agencia de calidad & Resultados nacionales e internacionales, 2018)

Se adaptó el estilo educativo a los nuevos tiempos, con la idea de descartar la visión tradicional de la Enseñanza de la Matemática, pero se insiste en forjar un trabajo de aula en base a clases expositivas procedimientos, rutinas y ejercicios que no contribuyen en nada al avance del estudiante en la comprensión y construcción de conceptos (Estándares orientadores para carreras de Pedagogía en Enseñanza Media, Mayo 2012).

Dentro del trabajo propuesto en el Marco curricular vigente en la enseñanza y el estudio de la Matemática en el Eje de Probabilidad y Estadística se discute sobre el avance en contenidos y el manejo de habilidades en el campo disciplinar de la Probabilidad y Estadística, planteando interrogantes que aún están por resolver , no sólo en Chile, sino también en varios países en donde se han implementado con fuerza la Probabilidad y Estadística en las últimas décadas en los currículum escolares (NCTM, 1989; NATIONAL CURRICULUM, 1999; NCTM, 2000; & SINGAPORE, 2007; MINEDUC, 2012; 2013a), 2016).

Durante muchos años, la "modelación y su utilización" han estado limitada en las instituciones escolares a la aplicación de un conocimiento matemático, previamente aprendido por los alumnos, a determinadas situaciones más o menos reales, con la doble finalidad de mostrar su utilidad y servir de motivación al aprendiz. Aun hoy día este uso perdura en los sistemas de enseñanza. Sin embargo, en el ámbito de la investigación en Educación Matemática, la "modelación y las aplicaciones" constituyen un dominio de investigación que no ha dejado de crecer intensamente en los últimos años.

Se pretende que el profesor encuentre en la didáctica de las matemáticas modelos de enseñanza que puedan transportar al aula, algo que hoy día parece estar monopolizado casi en exclusiva por los libros o textos guías que utiliza el profesor para replicar la ejercitación en aula y no logra promover el diálogo entre estos instrumentos y las necesidades, intereses y características de la población escolar.

Se tiene conocimiento en estudios recientes en Didáctica de la Matemática sobre la pérdida de sentido del estudio de la matemática en sistemas de enseñanza que conduce a ver la enseñanza como un saber incuestionable sin conexión o sentido para los estudiantes. Este fenómeno es y ha sido objeto de investigación de numerosos investigadores en educación matemática. Los estudiantes son invitados a "visitar" estos cuerpos de saberes, que no tienen ningún uso, solo raros empleos (Parra, Otero, & Ángeles, 2015).

Junto a todos estos antecedentes el trabajo curricular en el Eje de Probabilidad y Estadística presenta un nivel de desempeño bajo, por parte de los estudiantes en 2º Medio quienes NO alcanzan un nivel adecuado de conocimientos de acuerdo al objetivos del eje (Mineduc, 2016). Los bajos rendimientos alcanzados en Simce, Timss y Pissa en Enseñanza Media ligados a este Eje, como la falta de cultura en Probabilidad y Estadística tienden a ser cuestión de debate y reflexión en el proceso de Enseñanza (Agencia de Calidad de la Educación, 2015).

La Prueba Timss que es un Estudio realizado por la Asociación Internacional para la Evaluación del Logro Educativo (IEA), realizado en 4º y 8º básico se obtuvo información que nos indica que uno de cada tres estudiantes no alcanza 400 puntos, con un promedio país aproximado de 427 puntos, lo que nos ubica bajo la línea promedio que está en 500 puntos con igual promedio que Irán y Tailandia (Agencia Calidad, 2015).

De manera similar la Prueba Pisa (Programa de evaluación de estudiantes) dirigida por la OCDE en Enseñanza Media, se obtuvo que casi la mitad de los estudiantes chilenos no han desarrollado las competencias básicas, bajo nivel 2, según las últimas mediciones realizadas con resultados 2015 (Agencia de Calidad de la Educación, 2015).

Todas estas mediciones se complementan con la información entregada por la Prueba Simce (Sistema de Medición de la calidad de la Educación en Chile) que nos muestra un promedio Nacional bajo en comparación con los Estándares de Aprendizaje y reportes por eje del Currìculum en el Eje de Probabilidad y Estadística (Agencia de Calidad de la Educación, 2015).

Según los Estándares de Aprendizaje elaborados por el Ministerio de Educación, aprobados por el Consejo Nacional de Educación, que indican qué tan adecuados son los aprendizajes en relación con los objetivos planteados en el currículum nacional, que son los referentes que describen lo que deben saber los estudiantes y lo que deben poder hacer para demostrar, en las evaluaciones SIMCE, determinados niveles de logro de los objetivos de aprendizaje estipulados en el currículum vigente, en el Eje de Probabilidad y Estadística los estudiantes a nivel nacional no alcanzan el nivel adecuado en su mayoría, logrando un gran porcentaje de estudiantes ubicarse en un nivel de logro de desempeño inicial o insuficiente (Mineduc, Resultados SIMCE, 2016)

En el Eje de Probabilidad y Estadística en Segundo Año de Enseñanza Media cuyo desempeño se ubica en el Nivel de Aprendizaje Adecuado que nos indica cuando el estudiante es capaz de extraer información a partir de datos agrupados presentados en tablas, histogramas, gráficos de barras, circulares o de líneas, y también hacer cálculos e inferencias. También debe ser capaz de interpretar medidas de tendencia central (media aritmética, mediana y moda), de posición (cuartiles, quintiles y deciles) y de dispersión (rango) en situaciones cotidianas con datos no agrupados, y comparar dos conjuntos de datos a partir de sus medidas de tendencia central y de dispersión. Junto con esto, lograr determinar la probabilidad de ocurrencia de un evento, de su complemento y de un evento formado por la unión de dos sucesos simples, en un experimento aleatorio, mediante frecuencias relativas o el modelo de Laplace (Mineduc E. d., 2015).

Otro aspecto importante a considerar es el trabajo docente en la Enseñanza de la Matemática en el Eje de Probabilidad y Estadística, en donde frecuentemente se acusa la falta de manejo disciplinar en el área, para lo cual se han desarrollado programas de perfeccionamiento docente a nivel país (Ministerio de Educación, 2017).

Además existe como modelo regulador de la formación inicial docente el documento preparado por el Ministerio de Educación Chileno "Estándares orientadores para carreras de pedagogía en Enseñanza Media Matemática", en donde en relación a Datos y Azar establece y define cinco estándares que el futuro profesor o profesora necesita dominar para conducir con éxito el proceso de Enseñanza Aprendizaje que son, (Estándares orientadores para carreras de Pedagogía en Enseñanza Media, Mayo 2012):

- Estándar 17: Ser capaz de motivar la recolección y estudio de datos y de conducir el aprendizaje de las herramientas básicas de su representación y análisis.

- Estándar 18: Es capaz de conducir el aprendizaje de las probabilidades discretas.

- Estándar 19: Está preparado para conducir el aprendizaje de las variables aleatorias discretas.

- Estándar 20: Está preparado para conducir el aprendizaje de la distribución normal y teoremas límite.

- Estándar 21: Está preparado para conducir el aprendizaje de inferencia estadística.

Sin embargo el mismo documento reconoce en forma natural y consciente "*que la presencia de la estadística y las probabilidades en el currículo escolar es nueva, por lo que no existe tradición nacional en su enseñanza a nivel escolar ni en la formación de los profesores y profesoras*" (Estándares orientadores para carreras de Pedagogía en Enseñanza Media, Mayo 2012).

Es entonces imperante en el quehacer Docente el continuo perfeccionamiento y apoyo docente en el área de Datos y Azar que contribuya al mejoramiento del desempeño docente en este Eje que presenta tantas dificultades en las mediciones de desempeño de estudiantes tanto a nivel nacional como internacional.

En esta investigación se revisará la funcionalidad del trabajo mediante la utilización del REI, a partir de una pregunta en sentido fuerte que genere relaciones y conexiones con el conocimiento que se «encuentra» en función y en relación a la pregunta y a sus posibles respuestas, dejando claro el gran abanico de opciones puesto que no se sabe de antemano qué se va a encontrar o a reencontrar.

En consecuencia surge la necesidad de realizar esta investigación que entregará información sobre la construcción e implementación de REI con el objeto de modificar la forma de realizar clases abandonando el modelo didáctico tradicional, llevándonos a explorar las prácticas de enseñar y aprender a través de la utilización de éste dispositivo didáctico, que se considera una forma de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas a través de la Pedagogía de la Investigación y el Cuestionamiento del Mundo como consecuencia del trabajar con el dispositivo didáctico REI.

1.2. PREGUNTAS DE INVESTIGACIÓN.

En relación a los antecedentes anteriormente descritos, surge el interés por conocer un cambio en el proceso de enseñar y aprender, transitando desde un modelo centrado en la enseñanza tradicional a un prototipo basado en la pedagogía de la investigación y el cuestionamiento del mundo en donde los estudiantes puedan realizar un trabajo en aula a partir de intercambio de ideas y trabajo colaborativo en base a metodologías activas y participativas y se construyen conocimientos en base a un dispositivo didáctico REI, estableciendo de esta manera las siguientes interrogantes de investigación:

1.2.1.-¿Cómo desarrollar las diferentes dialécticas para la implementación de un REI ?

1.2.2.-¿Cómo funciona la Mesogénesis, Topogénesis y Cronogénesis durante la implementación de un REI ?

1.2.3.-¿Es posible realizar o trabajar un dispositivo didáctico REI en Enseñanza Media para la Unidad de Probabilidad y Estadística ?

1.2.4.-¿Cuáles son las dificultades en la institución para la implementación del REI ?

1.2.5.- ¿Cómo influyó la implementación del dispositivo didáctico en las prácticas de la profesora?

1.3 OBJETIVOS DE LA INVESTIGACIÓN

1.3.1 Objetivo General:

Analizar los alcances y limitaciones de la enseñanza por Recorridos de Estudio e Investigación REI en 1º y 2º Año de Enseñanza Media en el eje temático de Probabilidad y Estadística para dar respuesta a situaciones problemáticas que no se limitan a una presentación desarticulada y carente de sentido.

1.3.2 Objetivos Específicos:

1. Desarrollar un REI para 1º y 2º Año de Enseñanza Media cuya cuestión generatriz provengan del Eje Temático Probabilidad y Estadística en tres grandes tópicos o contenidos que son Estadística, Probabilidad y Variable Aleatoria

2. Describir las respuestas entregadas por los estudiantes en el Merco Teórico de la TAD

3. Describir el funcionamiento de las dialécticas y su incidencia en los procesos de funciones didácticas

4. Describir cómo la profesora de matemática aborda el trabajo y experiencia con REI en el transcurso de la implementación con REI

1.4. JUSTIFICACIÓN DEL PROBLEMA

Hoy en día la Enseñanza de la Estadística y la probabilidad está adquiriendo cada vez mayor importancia en los currículos de la mayoría de los países, incluso desde los primeros niveles educativos (Ortiz & Batanero, 2010). Es por ello que el estudio de los conceptos estadísticos y probabilísticos debe cambiar no sólo los contenidos sino la metodología, mediante una enseñanza activa basada en situaciones contextualizadas, en la modelación de diversas situaciones problemáticas que sean representativas del significado de dichos conceptos. Para alcanzar estos objetivos, la investigación en educación estadística debe tratar de responder a los nuevos problemas relacionados con la enseñanza y aprendizaje de la estadística y la probabilidad y contribuir a la mejora de la formación de los profesores que han de llevar a cabo dicha enseñanza (Ortiz & Batanero, 2010).

Desde esta perspectiva la presente investigación pretende ser un aporte para los estudiantes, profesores y para la investigación en Educación Matemática en el área de enseñanza de la Probabilidad y Estadística sobre la base del trabajo realizado con estudiantes de primer y segundo año de Enseñanza Media.

Esta investigación describe y analiza la evidencia de un trabajo basado Teoría Antropológica de lo Didáctico para encontrar la base o sustento de transformación de los procesos de enseñanza tradicionales, utilizados de manera recurrente en el aula chilena. Se busca proponer una forma de trabajo en aula acorde a los nuevos tiempos y desafíos que propone la adecuación curricular en el Marco Curricular en Chile, mediante el diseño e implementación de un Recorrido de Estudio y de Investigación que se ve materializado en la construcción y aplicación de un dispositivo didáctico en el área de la Probabilidad y Estadística.

Algunas de las investigaciones basadas en la TAD concretada a través de los REI han sido de carácter cualitativo (Fonseca, 2004, Barquero 2009, Lucas 2010, Serrano, 2012, Llano, 2012, Parra, 2013, Costa 2013), muestran cómo diseñar e implementar un REI en educación secundaria y superior que se evidencian en estudios etnográficos descriptivos.

La investigación realizada considera los antecedentes antes expuestos responde a la necesidad de diseñar, construir e implementar un dispositivo didáctico como una experiencia de estudio colaborativo en un Recorrido de Estudio e Investigación (REI) realizado en Chile con estudiantes de un Liceo Municipal de Talcahuano en el cuál se presentan diversas realidades y procesos de inclusión para estudiantes con habilidades diferentes que se interrelacionan en cursos numerosos. enmarcada en la Teoría Antropológica de lo Didáctico y rescatar las praxeologías didácticas en una epistemología realmente funcional, en la que los saberes aparezcan como agentes productores de conocimiento útiles para la creación de respuestas a determinadas cuestiones auténticamente problemáticas. Podemos entonces, considerar un modelo más general de proyecto de estudio en el que el objetivo de estudio no viene definido como un conjunto de saberes o de sistemas praxeológicos designados de antemano, sino como un conjunto de cuestiones a las que la comunidad de estudio se propone aportar una respuesta R. En este contexto, durante la aplicación del dispositivo, se movilizarán todos aquellos recursos, medios, saberes y respuestas a cada tarea o actividad propuesta que sean necesarias con tal de contribuir a una gran respuesta R a partir de nuestra cuestión generatriz Q.

Por otro lado, la naturaleza dual de la probabilidad, aumentan la dificultad de la enseñanza, puesto que una comprensión completa no puede restringirse a uno solo punto de vista debido a esto, paralelamente junto al cambio del currículo surge la necesidad de formación didáctica de los profesores que incluye, además del conocimiento en Probabilidad y Estadística (Batanero, Ortiz, & Serrano, 2006).

En chile, son pocos los artículos que entregan información sobre el trabajo de la enseñanza de la Probabilidad y Estadística que hagan notar la necesidad progresiva de la inserción de la Probabilidad y estadística en el Currículum Chileno (Del Pino & Soledad, 2012).Es por ello que resulta importante trabajar en las interrogantes que podemos realizar a nuestros estudiantes, conectadas a una descripción e interpretación de diversa respuestas de los estudiantes motivados con la ejecución de un dispositivo didáctico.

Capitulo II. MARCO TEÓRICO

CAPÍTULO 2: MARCO TEÓRICO DE LA INVESTIGACIÓN.

La investigación en curso considera aspectos de la Teoría Antropológica de lo didáctico y la enseñanza de la Probabilidad y Estadística en la Enseñanza Media en donde el nuevo paradigma didáctico del "Cuestionamiento del Mundo" se convierte en un hecho didáctico y social en el cual debemos conocer y reflexionar, partiendo de sus orígenes como la evolución de éste.

2.1 ASPECTOS HISTÓRICOS.

Las cuestiones epistemológicas ocupan un lugar fundamental en la reflexión de las personas interesadas por el aprendizaje de las matemáticas, esto debido a los obstáculos surgidos históricamente en la formación de los conceptos que se reproducen, con cierta frecuencia, en los estudiantes. Esto trae como consecuencia generar enfoques educativos innovadores centrados en el estudiante y su aprendizaje, en los procesos de construcción de conocimiento y no solo de transmisión (Sánchez & Camacho, 2013).

El análisis histórico de la Enseñanza de la Matemática en Educación Media o Secundaría entrega algunos detalles de cómo se ha ido sucediendo en el tiempo diversos paradigmas escolares. El paradigma clásico de la visita de "monumentos del saber y conocimiento", aunque sean pequeños, sufre hoy en día diferentes niveles de abusos constantes del poder pedagógico. Según Chevallard, el más arcaico de estos paradigmas didácticos ha desaparecido, en la gran mayoría de los países en el transcurso del siglo XIX. Las consecuencias de esta situación histórica y la evolución irresistible del currículum escolar de matemáticas hacia una forma de "monumentalismo" epistemológico, en el que el conocimiento viene organizado en unos trozos y pedazos santificados por la tradición, cuya supuesta "belleza" ha sido realzada en el tiempo y que los estudiantes tienen que visitar, reverenciar, disfrutar, divertirse con él e incluso "amar". (Chevallard, El análisis de las prácticas docentes, 1.999)

Según Chevallard, desde sus inicios con el estudio de los procesos de transposición didáctica que se considera el paso fundamental para llegar a la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD), el desarrollo de ésta teoría ha estado estrechamente vinculado al problema de la enseñanza y en un principio al problema de la enseñanza del álgebra elemental en Secundaria. (Chevallard, Bosch, & Gascón, 2004)

Su realización da respuesta a una exigencia metodológica de articulación de la investigación con sus "objetos de estudio", esto provoca grandes rupturas. La primera de ellas es el reconocimiento de la existencia de los fenómenos didácticos propuesto por Guy Brousseau con el nacimiento de la teoría de las situaciones didácticas que corresponde a la fuente principal o razón de ser de la ciencia de lo didáctico. Por otro lado la ampliación del ámbito empírico y de la unidad de análisis de los procesos didácticos que suelen estar más allá de la sala de clases y del contexto escolar. El enfoque que propone la TAD conduce a situar los objetos de estudio de la didáctica en relación con las condiciones y restricciones propias a la ecología institucional de los saberes. Esta inversión del objeto de estudio requiere cuestionar las formas habituales de describir e interpretar los "conocimientos matemáticos" (Chevallard, Bosch, & Gascón, 2004). Cambian, por tanto, las interrogantes sobre las antiguas cuestiones que constituían el objeto primario de investigación de la Educación Matemática:

- ¿Cómo aprenden matemáticas los alumnos? ¿Qué dificultades ponen de manifiesto?
- ¿Mediante qué mecanismos o procesos cognitivos adquieren los conceptos matemáticos los alumnos (o cómo los construyen)?
- ¿Qué métodos son los más adecuados para enseñar dichos conceptos?

Substituyéndolas por otras cuestiones de diferente naturaleza:

- ¿Qué condiciones debe satisfacer una situación para poner en funcionamiento los conocimientos específicos que la propia situación modeliza?
- ¿Cuáles son los efectos previsibles de dicho funcionamiento sobre los protagonistas y sobre sus producciones (fenómenos didácticos)?
- ¿Qué juego debe jugar el sujeto para necesitar un conocimiento determinado? (Fuente--, Investigación Matemática XVI)

De esta manera estudio de la didáctica se transformó así un problema centrado en la enseñanza-aprendizaje en otro de epistemología experimental de las matemáticas. La ruptura con el enfoque cognitivo dominante o esquema de enseñanza tradicional, centrándonos en el sujeto que aprende y, después, en el que enseña, supone una difícil misión por cumplir.

La Teoría Antropológica de lo Didáctico (Chevallard, 1999,2007, 2009,2012) ha estudiado, caracterizado, identificado y descrito de manera minuciosa los fenómenos didácticos y ha construido instrumentos alternativos a la pedagogía monumental dominante, que permitirían sustituir el modelo de enseñanza tradicional.

El adjetivo "antropológico", basada en el conjunto de actividades humanas y de instituciones sociales y los procesos de difusión de "obras" que no se restringen a la institución escolar y que, por cierto, viene dado por la actividad matemática. Podemos referirnos al adjetivo antropológico y a la condición antropológica, que se expresa de manera formal en la Escala de Niveles de Coderterminación Didáctica, la cual se ha propuesto y reformulado de manera sucesiva (Chevallard 2001,2007,2013).

Esta Escala de Niveles de Codeterminación Didáctica permite entre otras cosas rastrear de los conocimientos matemáticos y las condiciones dadas y si éstas se encuentran en los niveles inferiores de la tabla como en los niveles superiores de ella (pedagogía, escuela, sociedad, civilización, humanidad).

2.2. CODETERMINACIÓN DIDÁCTICA

La escala de niveles de Codeterminación didáctica, que no es exclusiva como tampoco originada en la TAD, sugerida por Chevallard y ésta se presenta como un apoyo asociado desde la mirada de la TAD, que permite por niveles vincular éstos desde el nivel inferior al superior , lo que se aprecia en el siguiente ilustración:

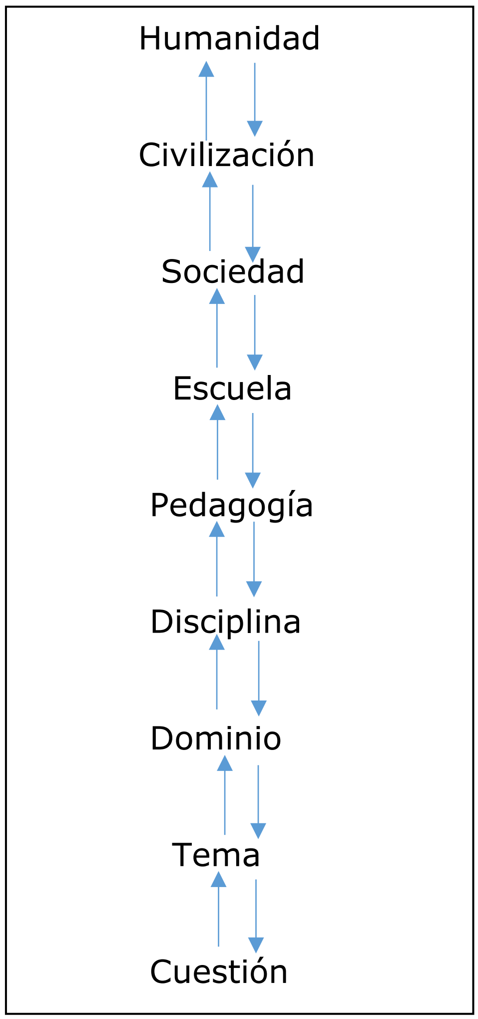


Figura N° 1. Codeterminación Didáctica (Chevallard, 1.999)

En la Figura N° 1 se visualiza que la escala de codeterminación está formada por componentes desde lo más global hasta lo específico. De la jerarquía que presenta la escala se deduce conocimiento sobre una cuestión específica, para esto se debe recorrer un camino que comienza llegando a entrelazarse las OM y OD presentes en la escala de codeterminación

El docente en su trabajo habitual o tradicional a menudo induce tener en cuenta, dentro de la escala de niveles de codeterminación, un poco más que el nivel de pedagogía y el de la disciplina, aprehendido especialmente en el subnivel de temas. Mientras, por el contrario, la TAD empuja a tener en cuenta TODOS LOS NIVELES DE CODETERMINACIÓN DIDÁCTICA, y por lo tanto nos invita a romper con la naturalización de las situaciones del mundo al resaltar su carácter en determinado (Chevallard, 2004).

La escala de codeterminación didáctica, según Chevallard, nos muestra un ascenso progresivo desde los niveles inferiores , un tema de estudio en matemática es una pregunta acerca de un tema específico o bien sobre el procedimiento de un cálculo , luego los temas están organizados en sectores y los sectores están integrados por amplios dominios, geometría, análisis, aritmética, etc.., los dominios a su vez se agrupan en una disciplina que es tradicionalmente "matemática" para así avanzar al próximo nivel superior, que será pedagogía, escuela, sociedad, civilización… (Chevallard, La TAD face au professeur de mathématiques, 2009).

El principio esencial que refleja la escala propuesta depende de las limitaciones impuestas y las condiciones creadas por los niveles más altos y en este punto Yves Chevallard nos plantea interrogantes ¿Cómo volver a registrar la Escuela en la sociedad? ¿Qué contribución puede hacer la Escuela al esfuerzo por la vida buena? ¿Cómo refundar, en este punto, nuestra civilización? (Chevallard, 2009)

Con respecto a esto, Chevallard nos menciona que la *escuela* tiene una función crítica y ésta debe ayudar a deconstruir preguntas preparadas, las preguntas que denominaremos "*Q*" que se hacen, que no tienen una sola respuesta. Estas Preguntas "*Q*" surgen para hacer la vida mejor, para contribuir a estas preguntas "*Q*" las respuestas *R* deben ser juzgadas lo mejor posible. También debe ayudar, por supuesto, a analizar, evaluar las respuestas *R* a través de la cultura en donde apliquemos (Chevallard, Estructura de los recorridos de Estudios e Investigación, 2007).

Las condiciones creadas por los niveles más altos son restricciones para las actividades (superestructurales) desplegadas en la infraestructura dada. Una infraestructura puede tener un componente en cada nivel de codeterminación (disciplina, pedagogía, etc.): hablaremos en general sobre las infraestructuras solicitadas por una determinada organización didáctica. La falta de infraestructura es un aspecto clave del olvido de las limitaciones. En el mundo de la enseñanza, esto lleva en la práctica a pensar que problemas de la profesión pueden ser resueltos "a la infraestructura constante ", por solo trabajo superestructural.

La conceptualización que propone la TAD permite abrir un nuevo camino en la dirección correcta, al postular que la vida de las instituciones nunca se estudian como problemas aislados. Además, lo más importante no es el problema concreto que se plantea para ser resuelto sino lo que se hará después con la solución obtenida (Chevallard, 2009).

Sobre este tema Chevallard nos advierte que sólo interesan los problemas fecundos que están llamados a reproducirse y desarrollarse para formar tipos de problemas cada vez más amplios y complejos, tipos de problemas cuyo estudio provocará construir y justificar nuevas técnicas y nuevas necesidades tecnológicas capaces de resolver nuevos tipos de problemas y hasta problemas formulados en el nivel tecnológico respecto de la organización matemática inicial (Chevallard, 1.999).

De ello se desprende que sólo los problemas fecundos que están llamados a replicarse o más bien a reproducirse y desarrollarse para formar situaciones problemáticas cada vez más amplias y con creciente grado de complejidad, tipos de problema cuyo estudio provocará nuevas necesidades tecnológicas, que traerán desafíos que permitan construir y justificar técnicas “nuevas” capaces de resolver nuevos tipos de problemas. Todo esto deriva en la hipótesis antropológica que se resume y da noticia sobre el proceso de estudio de un tipo de problemas desemboca en la reconstrucción institucional de organizaciones o praxeologías matemáticas de complejidad creciente (Chevallard, Bosch, & Gascón, 2004).

Es por ello que la TAD concibe el proceso de estudio como un proceso de reconstrucción de organizaciones matemáticas (OM) cada vez más amplias y completas y, por lo tanto, se considera como un proceso fuertemente integrado y articulado, que ayuda al grave problema o fenómeno de la desarticulación o atomización de currículum de matemáticas (Chevallard, Bosch, Gascón, & Sierra, 2014).

Se propone de esta manera la TAD, que busca ayudar a la articulación y participación de todos su componentes bajo la mirada de la pedagogía de la investigación y cuestionamiento del mundo que se materializa en la noción de un Recorrido de Estudio e Investigación "REI"(Chevallard, 2001, 2009) en base a las organizaciones o praxeologías matemáticas que detallaremos a continuación.

2.3. Noción de praxeología.

Empezaremos describiendo de una manera muy simplificada la estructura de las organizaciones (o praxeologías) matemáticas, indicando cuáles son sus componentes e ilustrándola con algunos ejemplos sencillos. La primera noción primitiva que utilizaremos para describir las organizaciones matemáticas es la de tipo de tareas matemáticas (τ). Ésta es una noción muy general, que incluye cualquier tipo de tareas que sean consideradas "matemáticas" como por ejemplo en el área de la probabilidad y estadística en la institución de referencia. Son ejemplos de tipos de tareas matemáticas en la institución docente universitaria: resolver una ecuación de primer grado; buscar la medida de la hipotenusa en un triángulo rectángulo; descomponer un numeral compuesto en sus factores primos; calcular, con cierto grado de aproximación, las soluciones de una ecuación cuadrática con raíces inexactas; decidir si un objeto matemático cumple o no las hipótesis de un teorema dado; modelar una sistema físico, biológico o aritmético mediante un modelo matemático o función (Otero, Fanaro, Corica, & LLanos, 2013).

Uno de los conceptos clave de la teoría antropológica de lo didáctico es la noción de «organización praxeológica» o «praxeología». Según indica Y. Chevallard (2006): Una praxeología es, de algún modo, la unidad básica en que uno puede analizar la acción humana en general. [...]. Uno puede analizar cualquier acto humano en dos componentes principales interrelacionados: praxis, la parte práctica, por un lado, y el logos, por el otro. «Logos» es una palabra griega que, desde los tiempos presocráticos, ha sido utilizada constantemente para hacer referencia al pensamiento y razonamiento humano —particularmente sobre el cosmos. [...]

La palabra praxeología, por tanto, deriva de los términos praxis y logos. El término praxis hace referencia al saber hacer, es decir, los tipos de problemas o tareas que se estudian y las técnicas que se construyen para solucionarlos; el término logos, se identifica con el saber e incluye las descripciones y explicaciones que nos permiten entender las técnicas, esto es, el discurso tecnológico y la teoría que es la explicación detallada de las afirmaciones hechas en el discurso tecnológico, o en la tecnología.

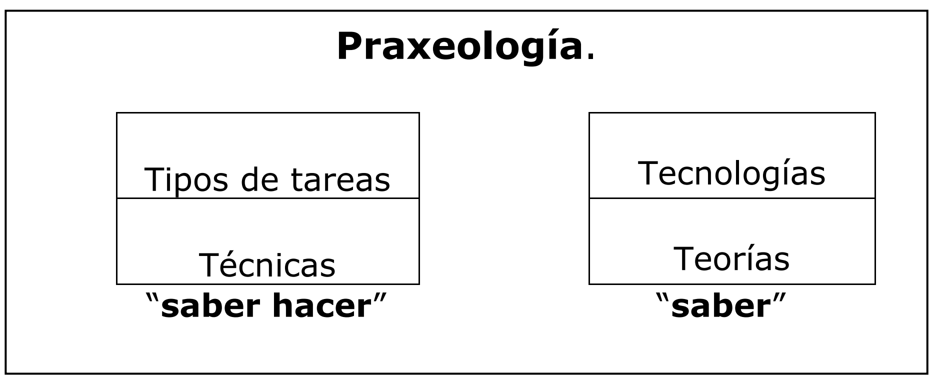


Figura N° 2. Representación de los elementos de una praxeología

Fuente : Silva (2005)

Se postula que la realización de cualquier tipo de tareas T requiere poner en funcionamiento una *técnica* τ es, una "manera de hacer sistemática y compartida" que depende obviamente de T y de la institución en que nos situemos. Tenemos así un bloque *práctico-técnico* que denotaremos mediante el símbolo (T/τ) y que está formado por un tipo de tareas T , y una técnica τ que la institución considera pertinente para llevar a cabo las tareas de este tipo. Es importante subrayar que, normalmente, cada técnica concreta sólo permite realizar un pequeño subconjunto de las tareas del tipo T de la cual es relativa y fracasa en la realización de las restantes tareas de ese tipo.

El bloque *práctico-técnico* no puede vivir aisladamente en una institución. Requiere la existencia de un "discurso racional" (*logos*) que *justifique* la técnica (*tekhnè*) y muestre su pertinencia para llevar a cabo el tipo de tareas T. Llamaremos *tecnología* de τ a este discurso, que es un discurso matemático, y lo designaremos con el símbolo θ . Otras funciones de la tecnología son: explicar y hacer inteligible el funcionamiento de la técnica, relacionarla con otras técnicas y, lo que es más importante, (T/τ) producir nuevas técnicas. El discurso tecnológico contiene siempre afirmaciones más o menos explícitas que, a su vez, pueden requerir justificación en una institución determinada. Se pasa entonces del nivel de justificación-explicación-producción de la técnica (que es el nivel de la tecnología) al nivel de justificación-explicación-producción de la tecnología, que denominamos el nivel de la teoría de θ , y que designaremos mediante el símbolo Θ. La teoría desempeña, respecto de la tecnología, el mismo papel que ésta desempeñaba respecto de la técnica.

Resumiremos lo anterior diciendo que, junto al bloque práctico-técnico (T/τ) tenemos, dentro de las organizaciones matemáticas institucionalizadas, un segundo bloque, el tecnológico-teórico (θ/Θ). El sistema formado por los cuatro componentes constituye una praxeología(u organización) matemática que consideramos como la unidad mínima en que puede describirse la actividad matemática y que designaremos mediante OM = $[T/\tau/\theta/\Theta]$.

Las nociones de "tarea", "técnica", "tecnología" y "teoría" son doblemente relativas. En primer lugar, son relativas a la institución de referencia. Esto significa que lo que es considerado como una tarea (o técnica o tecnología o teoría) matemática en una institución I no tiene por qué serlo en otra institución I'. De hecho, en una institución dada, únicamente pueden considerarse como "tipos de tareas", T, aquéllas para las que se dispone de algún tipo de técnica, τ , con su entorno tecnológico-teórico, (θ/Θ), más o menos explícito. Así, por ejemplo, en Educación Media, la descomposición en factores primos de números "pequeños" es una tarea, pero la de números "grandes" no lo es. (Otero, Fanaro, Corica, & LLanos, 2013)

2.4 ORGANIZACIONES MATEMÁTICAS (OM) Y DIDÁCTICAS (OD)

Esta teoría distingue dos tipos de praxeología u organizaciones praxeológicas: Organizaciones Matemáticas (OM) y las Organizaciones Didácticas (OD). Las primeras se refieren a la realidad matemática que se pretende estudiar y las segundas a la forma en que eso ocurre. Ambas praxeologías, Matemática y Didáctica, tienen como componente un bloque práctico- técnico, formado por tareas y técnicas y otro bloque tecnológico-teórico, formado por tecnologías y teorías. Corica y Otero (2009) sostienen que la OM se constituye alrededor de uno o varios tipos de tareas matemáticas que conducen a la creación de técnicas matemáticas, las cuales se justifican por tecnologías matemáticas desarrolladas en el marco de una teoría matemática.

Los términos tipo de tarea, técnica, tecnología y teoría son doblemente relativos. En primer lugar, son relativos a la institución de referencia y son relativos a la institución de referencia: lo que es considerado como un tipo de tarea o bien una técnica, tecnología o teoría en una institución no tiene que serlo en otra. Las técnicas existen en la medida en que pueden responder a algún tipo de tarea planteada en la institución considerada. En segundo lugar, las nociones tipo de tarea, técnica, tecnología y teoría son relativas a la función que cumplen en una actividad matemática determinada. Así, un mismo objeto matemático puede ser considerado como una técnica para realizar un tipo de tareas o servir como elemento tecnológico común a un conjunto de tipos de tareas y técnicas. (Otero, Fanaro, Corica, & LLanos, 2013).

2.5 RECORRIDO DE ESTUDIO E INVESTIGACIÓN.

Los Recorridos de Estudio e Investigación, desde ahora "REI", es un dispositivo didáctico definidos en el marco de la Teoría Antropológica de lo Didáctico de Yves Chevallard (2005 - 2006). El objetivo principal de los REI es introducir una nueva epistemología que otorgue sentido y funcionalidad al estudio escolar de la matemática en su conjunto y que reemplace a la pedagogía de inventariar los saberes.

Un REI se inicia con el estudio de una cuestión Q con fuerte poder generador, capaz de propiciar la aparición de numerosas cuestiones derivadas. Para poder dar respuesta a dichas cuestiones, se requiere la reconstrucción de un número considerable de herramientas matemáticas (técnicas, nociones, propiedades, etc.), que aparecen así como una consecuencia (y no como el origen) del estudio de las cuestiones. La propuesta de los REI pretende recuperar la relación genuina entre cuestiones y respuestas que está en el origen de la construcción del conocimiento científico en general y de la actividad matemática en particular.

A partir de la búsqueda de respuesta a una "cuestión generatriz" que, para ser respondida, requiere la construcción de toda una secuencia de Organizaciones Matemáticas (OM) y Organizaciones Didácticas (OD) completas y articuladas (Otero, Fanaro, Corica, & LLanos, 2013). De esta manera los REI, introducen en la escuela una nueva epistemología que permita reemplazar el paradigma del "inventario de saberes" por un trabajo más funcional que de sentido al estudio escolar de las matemáticas, transportando a la escuela una actividad de estudio más cercana al ámbito de la investigación. Se reconoce el carácter abierto y dinámico de los REI como un hecho que hace a la completitud de los mismos pero que a la vez plantea cuestiones que van más allá de los límites de aplicación que, en general, son aceptados en las instituciones educativas.

El currículum escolar de las matemáticas, en todas las etapas educativas, ha evolucionado hacia lo que el investigador francés en didáctica de las matemáticas Yves Chevallard (2012) ha designado como una forma de monumentalismo epistemológico en la que el conocimiento se presenta fragmentado en pequeños «pedazos» aislados que el estudiante debe conocer o por lo menos «haber visitado» y que, además, se espera que lo haga de forma «motivadora». Estos aparecen disgregados e inmóviles, como simples monumentos que hay que visitar pero sin una funcionalidad aparente, lo que conduce a la creencia de que las matemáticas no son útiles fuera de su ámbito disciplinar e incluso que son algo de lo que se puede prescindir casi por completo. La enseñanza por REI, requiere ingresar en una pedagogía escolar radicalmente diferente a la tradicional, llamada pedagogía de la investigación y del cuestionamiento del mundo (Parra, Otero, & Ángeles, Recorrido de estudio e investigación codisciplinar a la microeconomía en el último año del nivel secundario, 2015).

La génesis de los REI se remonta fuera de las clases de matemáticas. Surgió a partir de la noción "institucional" de los Trabajos Personales Encuadrados (TPE) que se instaló en el sistema escolar francés en las clases de primer año a comienzos del año 2000-2001, cuyo ancestro inmediato son los trabajos de iniciativa personal encuadrados (TIPE) introducidos en las clases preparatorias en las grandes escuelas (CPGE) en el año 1995, y del que uno de los primos son los itinerarios de descubrimiento (IDD) llevados a cabo en el año 2002. En el dispositivo TPE, propuesto por Boletín Oficial francés (BO) número 3 del 20 de enero de 2000, los alumnos debían realizar una sola producción en un trabajo personal encuadrado por varios profesores. Debían trabajar en autonomía, por grupos o individualmente, basándose en un proyecto que articulaba nociones resultantes de los programas de dos disciplinas dominantes. Según la circular publicada por el Boletín Oficial, los temas debían ser seleccionados por los profesores a partir de una lista propuesta en la circular.

Así, los Recorridos de Estudio e Investigación (REI) funcionan como un dispositivo didáctico capaz de "romper" la atomización de la matemática que se enseñan en muchas instituciones escolares, y evitar la pérdida de sentido de las cuestiones que allí se estudian. Esta función de los REI proviene de su capacidad para permitir que la modelización matemática "viva" en los Sistemas de Enseñanza. Una de las características fundamentales de los REI es que se generan por una cuestión *Q* viva y rica con un fuerte poder generador, denominada *cuestión generatriz*, es decir, una cuestión capaz de imponer numerosas *cuestiones derivadas*.

El estudio de una cuestión *Q* cualquiera responde al denominado *esquema herbartiano* (que Chevallard (2013) denomina *one more time* – el calificativo utilizado aquí que remite al filósofo y pedagogo alemán Johann Friedrich Herbart (1776-1841). Primero, realicemos una distinción entre los sistemas didácticos de la forma $R^{\heartsuit}$ y los sistemas de la forma $S(X;Y;Q)$

En el primer caso, se estudia una praxeología "dada"; en el segundo caso, una cuestión "dada".

El primer caso es el "clásico": $R^{♥}$es visto como lo que *X* (y/o cada uno de los miembros) deben integrar a su equipamiento praxeológico. El segundo caso es a partir del cual se propone la estructura de los REI en función del *esquema herbartiano*. En su forma reducida, este esquema se escribe de la siguiente manera:

$$S(X;Y;Q) \rightarrow R^{♥}$$

El símbolo ♥ colocado en el exponente de la respuesta *R* indica que la respuesta a la cuestión *Q* fue producida bajo ciertas limitaciones y "funciona" como respuesta a esa cuestión bajo esas limitaciones – no existe una respuesta universal, universalmente operante. Este esquema reducido indica que una cuestión *Q* es estudiada y una respuesta *R* debe ser producida (esto es lo que indica la flecha) (Chevallard, 2009, 2009, 2009).

En un sistema más completo una clase $[\boldsymbol{X}, \boldsymbol{y}]$"usual" denotada por $\boldsymbol{Y} = \{\boldsymbol{y}\}$ (donde *X* es el grupo de alumnos con un único profesor, el de la disciplina en cuestión ,por ejemplo, el profesor de matemática), cuando se estudia una cuestión *Q*, el profesor $\boldsymbol{y}$ aporta *su* respuesta, $\boldsymbol{R_Y}$, la cual, finalmente se volverá la respuesta *R*♥ de la clase. Así, tendríamos un tipo particular de esquema herbartiano:

$$\left[\boldsymbol{S}(\boldsymbol{X}; \boldsymbol{Y}; \boldsymbol{Q}) \rightarrow \{\boldsymbol{R_1^{\lozenge}}, \boldsymbol{O_2}\} \rightarrow R^{♥}\right]$$

$$R_1^{\lozenge} = R_y, O_2 = ♥ \text{ y } R^{♥} = R_y$$

Donde, la praxeología ♥ aparece como lo que le permite a $\boldsymbol{y}$ elaborar la respuesta R_y la que X deberá en definitiva hacer suya. La noción de REI contrasta con este tipo de historias didácticas. Estos tipos de esquemas no se corresponden con la estructura de los REI. Para que hubiera REI en un sentido razonable, es necesario que la organización didáctica manifieste un cierto número de condiciones que toquen a la vez la mesogénesis, la topogénesis y la cronogénesis.

2.6 FUNCIONES DIDACTICAS

- **La mesogénesis** :Es considerada la “fabricación” del medio M. La primera característica de la mesogénesis en un REI es que el medio M no está “totalmente hecho o construido de antemano”. El medio M es constituido por la clase a partir de las producciones diversas, tanto externas a la clase como internas a ella.

- **La topogénesis** Corresponde a la función que vincula cómo se ocupan los espacios del grupo de alumnos X y el profesor {y}. Las modificaciones en la topogénesis van a la par de los cambios en la mesogénesis dado que los cambios de roles afectan también a los resultados que puedan obtenerse en el medio didáctico; teniendo en cuenta que las modificaciones en el medio se dan al interior de la clase [X; y] y no sólo son responsabilidad de y. El topos del alumno y el topos del profesor hacen referencia a la posición de los alumnos y el profesor en relación con las OM construidas o en proceso de construcción durante el proceso de estudio en el medio.

- **La cronogénesis** Es una función que regula los tiempos didácticos para los distintos componentes del sistema. Esta componente relativa al tiempo real requerido para efectuar el estudio de una pregunta, es lo que permite diferenciar a los REI de los demás dispositivos didácticos. La constitución y el "trabajo" en el medio M en una enseñanza por REI, afectan al tiempo didáctico produciendo una dilatación del mismo; una extensión del tiempo reloj requerido. Esta "extensión del tiempo reloj" producido por la inserción de un REI, respecto de los episodios didácticos usuales en la escuela, afectan a la mesogénesis y como consecuencia también a la topogénesis. Aquí es necesario "cuidar" todo el trabajo en M, por el impulso de "estimular el estudio" de manera artificial para que el "tiempo escolar" recomendado sea acorde al producido por el REI. Si esta "exigencia" no es considerada, puede que el sistema didáctico efectivo en una pedagogía de REI, compuesto por $S(X;Y;Q_i)$, se transforme en un sistema didáctico tradicional $S(X;Y;O_j)$, es decir, es necesario evitar la reducción del estudio de las Q_i por el de obras finalizadas O_j.

Estas tres funciones didácticas difieren plenamente si el modo de enseñar corresponde a una enseñanza "monumentalista" o a una enseñanza por recorridos de estudio e investigación. En el primer caso, las funciones didácticas están limitadas y restringidas a decisiones pura y exclusivamente del profesor, mientras que, en el segundo caso, tanto la topogénesis como la mesogénesis y cronogénesis se amplían a partir no sólo las decisiones del profesor, sino también de los estudiantes. Pero una enseñanza por REI que implique cambios a nivel de las tres funciones didácticas requiere maneras de hacer propias de esta nueva enseñanza. Para poder gestionar un REI es necesario entonces activar gestos que, Chevallard (2013) denomina dialécticas. Una de las más importantes es la denominada dialéctica del estudio y de la investigación pues, impulsa acciones propias de un trabajo no sólo de estudiar una obra sino también de investigar. Es considerada una dialéctica pues el estudio de una obra conduce a estudiar otras y a su vez, la investigación desarrollada respecto a una obra, pregunta o noción conduce a estudiar aspectos que resultan desconocidos pero que pueden ser eficaces y funcionales en la construcción de las respuestas.

2.7 DIALÉCTICAS EN UNA ENSEÑANZA POR REI

Las dialécticas surgen a partir de las respuestas a las actividades propuestas por el REI. En un REI el proceso de estudio se desarrolla a partir de acciones o gestos didácticos, "gestos del estudio y de la investigación" denominados en el marco de la TAD, "dialécticas", (Otero, Fanaro, Corica, & LLanos, 2013)Actualmente, Chevallard (2013) propone nueve dialécticas:

D1: **Dialéctica del estudio y de la investigación**. Se manifiesta en la búsqueda permanente de respuestas a las preguntas a ser investigadas y en la formulación de nuevas preguntas. Al investigar para responder una pregunta, es necesario estudiar, y a su vez el estudio genera nuevas preguntas que requieren responderse para avanzar en el proceso de estudio.

D2: Dialéctica del individuo y del colectivo. En un REI, cada pregunta es estudiada en forma conjunta o grupal. Cada integrante de la comunidad de estudio puede realizar un estudio e investigación individual, pero además debe contribuir a la respuesta colectiva y concretar un acuerdo con su grupo. En una genuina enseñanza por REI, las respuestas desarrolladas por cada grupo de estudiantes deben surgir de un consenso entre todos los miembros del grupo.

D3: **Dialéctica del análisis (y la síntesis) praxeológico y del análisis (y la síntesis) didáctico**. Todo análisis praxeológico requiere el planteo de ciertas preguntas didácticas por ejemplo: ¿de dónde viene esta praxeología?, ¿cómo apareció en esta institución?, etc. Por otra parte, siempre que existe un análisis didáctico se debe considerar ¿cómo es la praxeología que se desea enseñar? Este análisis se materializa, por ejemplo, en la construcción por parte del investigador del Modelo Praxeológico de Referencia (MPR).

D4: Dialéctica del entrar y salir-de-tema. Cuando la pregunta generatriz conduce a recorridos de estudio e investigación amplios, existe la posibilidad de "salir" del tema, incluso hasta de la disciplina de referencia y reingresar posteriormente. En distintos momentos del proceso de estudio pueden ocurrir entradas y salidas a distintas obras de distintas disciplinas. Esto ocurre cuando los saberes encontrados no están disponibles en el equipamiento praxeológico de los estudiantes o bien, cuando están disponibles pero es necesario realizar un reencuentro.

D5: **Dialéctica del paracaidista y de las trufas**. La búsqueda de respuestas en un REI, requiere que los actores deban explorar el terreno desde arriba, inspeccionar zonas de gran alcance. Una vez identificado el objetivo, es necesario acercarse a los supuestos hallazgos y decidir sobre la utilidad de lo encontrado. Es decir, primero tomar distancia del problema y luego decidir qué de específico permitirá aportar la respuesta.

D6: Dialéctica de las cajas negras y cajas claras. La búsqueda en diferentes fuentes de información requiere determinar qué saberes son más pertinentes y funcionales, estudiar y utilizar lo estrictamente necesario. Estudiar las obras en un nivel de gris adecuado.

D7: Dialéctica de la lectura y de la escritura. La comunidad de estudio vincula las preguntas con ciertos saberes, sin transcripciones textuales, es decir, utiliza sólo los saberes relevantes y útiles para responder la pregunta. Los saberes son analizados, interpretados y reescritos sin realizar una copia textual.

D8: Dialéctica media-medio. Para construir respuestas a preguntas es necesario decidir en qué medias (internet, profesor, libros, etc.) realizar la búsqueda y luego determinar cuáles de esos medias o cuáles de sus elementos serán incorporados al medio de estudio.

D9: Dialéctica de la difusión y de la recepción. Una vez construida la respuesta en el interior de cada grupo, éstos la difunden y defienden para el resto de la comunidad de estudio.

En tabla 1 se presentan la búsqueda de las dialécticas del Recorrido de Estudio e Investigación aplicado, en donde se detalla la sesión, fecha, pregunta, dialécticas e indicadores para cada una de ellas como se muestra en la tabla siguiente:

Tabla 1. Identificación de las dialécticas

Búsqueda de las dialécticas en el Recorrido de Estudio e Investigación aplicado.												
			Dialéctica									
			1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	
Sesión Nº	**Fecha**	**Pregunta**	**Del estudio y de la investigación.**	**Del individuo y del colectivo.**	**Del análisis (y la síntesis) praxeológica y del análisis (y la síntesis) didáctica.**	**Del tema y fuera-de-tema.**	**Del paracaídas y las trufas.**	**De las cajas negras y las cajas claras.**	**De la conjetura y de la prueba (media-medio).**	**De la lectura y de la escritura.**	**De la difusión y de la recepción.**	Indicador
Conclusiones obtenidas en la búsqueda de dialécticas en el REI aplicado												

Fuente: Elaboración Propia.

Presentamos a continuación los tres tipos de indicadores de la dialéctica del estudio y de la investigación, denotados por $I_{1.1}$, $I_{1.2}$, $I_{1.3}$.

Capítulo III. MARCO METODOLOGICO

CAPÍTULO 3. MARCO METODOLÓGICO

3.1. Tipo y diseño de Investigación.

La investigación se enmarca en un diseño que pretende conocer y describir la forma de trabajo y articulación curricular con la implementación de un dispositivo didáctico REI en el marco de la Teoría Antropológica de lo Didáctico en la práctica pedagógica docente, los aprendizajes, apreciaciones y dialécticas, funciones didácticas que desprenden de este dispositivo al aplicarlos en los estudiantes de Primer y Segundo año de Enseñanza Media en la asignatura de matemática en el Liceo Científico Humanista de Talcahuano.

Por ello, se señala que el estudio es de tipo fenomenológico, interpretativo, descriptivo (Hernández, Fernández y Baptista, 2010) atendiendo a que "la investigación descriptiva busca especificar propiedades, características y los perfiles de las personas, grupo, comunidades, procesos, objetos o cualquier otro fenómeno que se someta a un análisis" (p. 80), así como pretenden medir o recoger información de manera independiente y conjunta sobre los conceptos de las variables a las que se describen.

Esta investigación se enmarca en el enfoque cualitativo interpretativo con un enfoque descriptivo que tiene por objeto proporcionar la visión de un evento, condición o situación. La investigación descriptiva cualitativa pretende proporcionar esta visión a partir de datos en forma de palabras o imágenes con el objeto de entregar información valiosa con una rica descripción que dote al estudio de la capacidad para informar y aplicar los resultados. La Muestra estará conformada por aproximadamente 100 estudiantes entre 14 y 16 años que participarán de la investigación que se desarrollará en un semestre, el REI se introduce en dos niveles en paralelo en el semestre. En total se realizaron seis implementaciones, y los datos obtenidos permiten describir, entre otras cosas, las diferencias significativas entre los estudiantes; a partir de las decisiones consideradas en el nivel de las funciones didácticas topogénesis, cronogénesis y mesogénesis que son el objeto de análisis de este trabajo y las dialécticas. Durante cada implementación el profesor que aceptó implementar el recorrido de estudio e investigación no es el investigador y el profesor a cargo del curso guía a los estudiantes en el desarrollo del dispositivo.

3.2. Población objetivo.

La población objetiva de esta investigación, son los estudiantes de dos cursos de Primer Año de Enseñanza Media y dos cursos de Segundo año de Enseñanza Media del Liceo Municipal Pedro Espina Ritchie, con el objetivo de determinar los procesos de trabajo e interacción con el trabajo realizado con el dispositivo didáctico en el marco de la TAD y las dialécticas observadas.

Tabla 2. Distribución de la población de estudiantes participantes en el estudio

Cursos	Estudiantes		Total	
	N	**%**	**N**	**%**
Primer Año de E. Media	30	20	63	38,3
Primer Año de E. Media	30	20		
Segundo Año de E. Media	46	30,7	91	61,6
Segundo Año de E. Media	44	29,3		
Total	**150**	**100%**	**150**	**100%**

Fuente: Elaboración propia

De la tabla N° 2, se deduce que el curso que aporta una mayor cantidad de estudiantes a la investigación corresponde al Segundo Año Medio con un 60%, mientras que el Primer Año de enseñanza Media sólo aporta el 40% de los estudiantes.

3.3. Estrategias de recopilación de información.

Las estrategias de recopilación de información, como la estructuración de la recogida de información se consideran aspectos fundamentales en el proceso de investigación, que de acuerdo a la presente investigación de naturaleza cualitativa los instrumentos deberán corresponderán a la técnica del cuestionario, a través del procedimiento de la encuesta y mediante el análisis de las respuesta de los estudiantes a las actividades propuestas en el marco del Recorrido de Estudio e Investigación, levantando categorías de análisis.

3.3.1. INTRUMENTOS DE RECOPILACIÓN DE INFORMACIÓN.

Se recopiló una entrevista semiestructurada realizada a la profesora que tiene un total de 15 preguntas, en la modalidad de pregunta abierta, que se realiza después de la aplicación del REI. También se recopiló información mediante a la aplicación del REI construido por la investigadora en colaboración de un especialista en el área de la Probabilidad y Estadística y se levanta información relacionada con las respuestas entregadas por los estudiantes.

3.4. ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS.

Los estudios de recorridos de investigación se analizarán con el marco teórico de la TAD y la entrevista se analiza con el software cualitativo ATLAS.TI 7.0. Para la construcción de una matriz se incluye la relación entre la competencia, el criterio y el ítem que forma parte del instrumento.

Luego, para el trabajo con dialécticas se realiza una tabla resumen basada en una matriz de recogida de información de acuerdo a los indicadores de cada categoría de análisis.

Capítulo IV. METODOLOGIA DE AULA

CAPÍTULO 4. METODOLÓGIA DE AULA

El trabajo realizado en aula se centra en la aplicación de un Recorrido de Estudio e Investigación basado en Probabilidad y Estadística con la aplicación de un dispositivo didáctico, tomando en consideración los aprendizajes esperados para los estudiantes propuesto en el Marco Curricular vigente.

El trabajo a realizar se dividió en dos etapas, la primera etapa correspondiente a la coordinación y planificación con el profesor a cargo de aplicar el dispositivo didáctico, y una segunda etapa que es la etapa investigativa que se detalla en la aplicación del dispositivo didáctico. A continuación se presentará el desglose de las etapas realizadas:

Etapa 1: COORDINACIÓN, COMUNICACIÓN Y PLANIFICACIÓN DEL TRABAJO CON EL DISPOSITIVO DIDÁCTICO. Conocimiento del trabajo a realizar por la persona-docente encargado de aplicar este dispositivo. En esta etapa el investigador trabaja con el docente que aplicará el instrumento que guiará el Recorrido de Estudio e investigación, entregando información en reuniones de trabajo sobre la forma de éste, la aplicación de preguntas y la forma de apoyo al estudiante para ir alcanzando este trabajo. En reuniones periódicas se trata de concientizar la importancia del trabajo en preguntas que guía las tareas y actividades, estas preguntas tienen por finalidad desafiar los conocimientos que tienen los estudiantes y que éstas sean una guía para que el estudiante pueda seguir avanzando en el trabajo propuesto por REI. Estas reuniones con el profesor se realizaron antes de la aplicación de cada sesión en base a una de las preguntas.

Se plantean ejemplos al docente que aplicará este trabajo, y se motiva a conectar sus preguntas con las interrogante generatriz que se propone en el REI, al igual que motivar a los estudiantes en el desarrollo de las actividades propuestas y guiar las interrogantes que se producen en la aplicación de éste dispositivo didáctico.

Etapa 2 : DESCRIPCIÓN DE LAS CLASES. Se describe de lo particular a lo general las reacciones, la forma de trabajo y el análisis de las respuestas obtenidas, deteniéndonos en aquellos casos de mayor relevancia que entregan información valiosa para esta investigación. Estas clases fueron realizadas tres veces por semana en un bloque de dos horas pedagógicas, siguiendo los lineamentos generales del marco curricular vigente.
Se toma como punto de inicio la Figura N°3 se observa la organización del Recorrido de Estudio e Investigación en base a una gran pregunta generatriz Q_0 en relación a Probabilidad y Estadística .

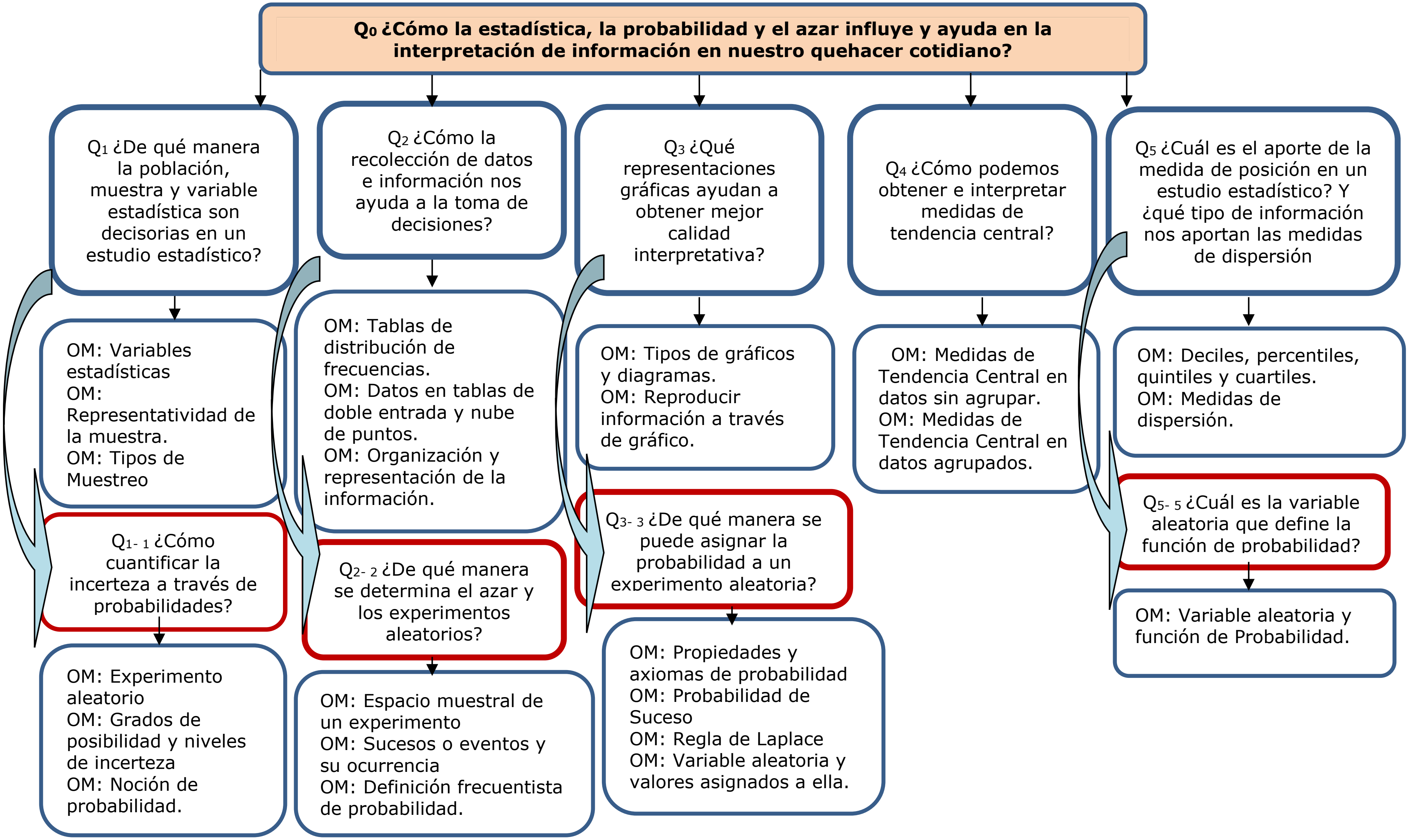


figura N° 3. Recorrido de estudio e Investigación

En la Figura N° 3 se observa en forma general el esquema que va desarrollando el dispositivo didáctico en base a la pregunta generatriz y que derivan en subpreguntas en donde cada una de ellas se subdivide en Organizaciones matemáticas que se realizan mediante actividades y tareas matemáticas dentro del trabajo de aula para cada sesión. Estas sesiones están organizadas en una o dos clases, según el desarrollo de la pregunta que guía a las organizaciones matemáticas. La pregunta generatriz que guiará a los estudiantes para alcanzar el resultado esperado trabaja en base a las subpreguntas Q1,Q2,Q3,Q4,Q5. y en base a los aprendizajes adquiridos que se demuestran en las respuestas de los estudiantes en base a una gran pregunta generatriz Q_0 en relación a Probabilidad y Estadística.

En la figura N° n°4 se muestra la gran pregunta generatriz

Q_0 : ¿Cómo la estadística, la probabilidad y el azar influye y ayuda en la interpretación de información en nuestro quehacer cotidiano?

Figura N° 4.Pregunta Generatriz

Luego en base a esta pregunta generatriz se desarrollan subpreguntas derivadas de ésta:

- Q1 : ¿De qué manera la Población, Muestra y variable estadística son decidoras en un estudio estadístico? , relacionada en el ámbito de la estadística con sus respectivas organizaciones matemáticas (0M) :
    - OM: Variables estadísticas
    - OM: Encuesta y procedimiento de recolección de datos
    - OM: Población y muestra en un estudio estadístico.

- Q1-1 ¿Cómo cuantificar la incerteza a través de probabilidades? , relacionada en el ámbito de la probabilidad con sus respectivas organizaciones matemáticas (0M) :
    - OM: Experimento aleatorio.
    - OM: Grados de posibilidad y niveles de incerteza.
    - OM: Noción de Probabilidad.

- Q2: ¿Cómo la Recolección de datos e información nos ayuda a interpretar en forma crítica la información? y sus respectivas organizaciones matemáticas:
    - OM: Tablas de distribución de frecuencias
    - OM: Organización de datos y representación de la información.

- Q2-2:¿De qué manera se determina el azar y los experimentos aleatorios? y sus organizaciones matemáticas:
    - OM: Espacio muestral de un experimento
    - OM: Sucesos o eventos y su ocurrencia.
    - OM: Definición frecuentista de probabilidad

- Q3:¿Qué Representaciones Gráficas ayudan a obtener mejor calidad interpretativa? Y sus organizaciones matemáticas:
    - OM: Tipos de gráficos y diagramas
    - OM: Reproducir información a través del gráfico.

- Q3-3: ¿De qué manera se puede Asignar la Probabilidad a un experimento aleatorio?
    - OM: Propiedades y axiomas de probabilidad
    - OM: Probabilidad del suceso
    - OM: Regla de Laplace.
    - OM:Variable aleatoria y valores asignados a ella.

- Q4: ¿Cómo podemos obtener e interpretar Medidas de Tendencia Central? Junto a su Organización Matemática que contempla:
    - OM: Medidas de Tendencia Central en datos sin agrupar.
    - OM: Medidas de Tendencia Central en datos agrupados.

- Q5: ¿Cuál es el aporte de las Medidas de Posición en un estudio estadístico? y ¿Qué tipo de información nos aportan las medidas de dispersión? y con su organización matemática respectiva:
    - OM: Percentiles, Deciles, Quintiles, Cuartiles.
    - OM: Medidas de dispersión.

- Q5-5:. ¿Cuál es la variable aleatoria que define la función de probabilidad? y su organización matemática:
    - OM: Variable aleatoria y función de probabilidad

La cuestión Q_0 declarada aquí es concebida en sentido fuerte, para ser estudiada y trabajada, ya que no se puede responder dando una simple información. Para ayudar a encontrar una respuesta, ésta debe estar basada en la construcción de la Organización Matemática, es decir, un conjunto de tareas, técnicas, definiciones, propiedades que permiten describir y justificar el trabajo realizado en el dispositivo didáctico. A partir de la cuestión generatriz inicial, se derivan cinco OM relacionadas fundamentadas para el estudio de la Probabilidad y Estadística.

Con la intención de realizar un trabajo más detallado se desglosó en sesiones más específicas con una secuencia de preguntas derivadas que muestran el detalle para activar y dar vida, funcionalidad y secuencia al REI en base a la Pregunta generatriz, que consideran la Organización Matemática (OM) con el conjunto de tareas, actividades, propiedades y definiciones que llevan a avanzar en el trabajo con el dispositivo didáctico.

El estudio de la pregunta generatriz Q_0 conduce a la formulación de "cuestiones derivadas" (Q1, Q2, Q3, Q4,Q5,Q_{1-1},Q_{2-2},Q_{3-3},Q_{4-4},Q_{5-5}) cada una de las cuáles involucra el estudio de tipos de tareas (t_i), que son las situaciones o actividades que realizaran los estudiantes con la aplicación del dispositivo. El estudio de dichas tareas proporciona una respuesta (Ri) que en conjunto, contribuyen a la elaboración de la respuesta R a Q_0.

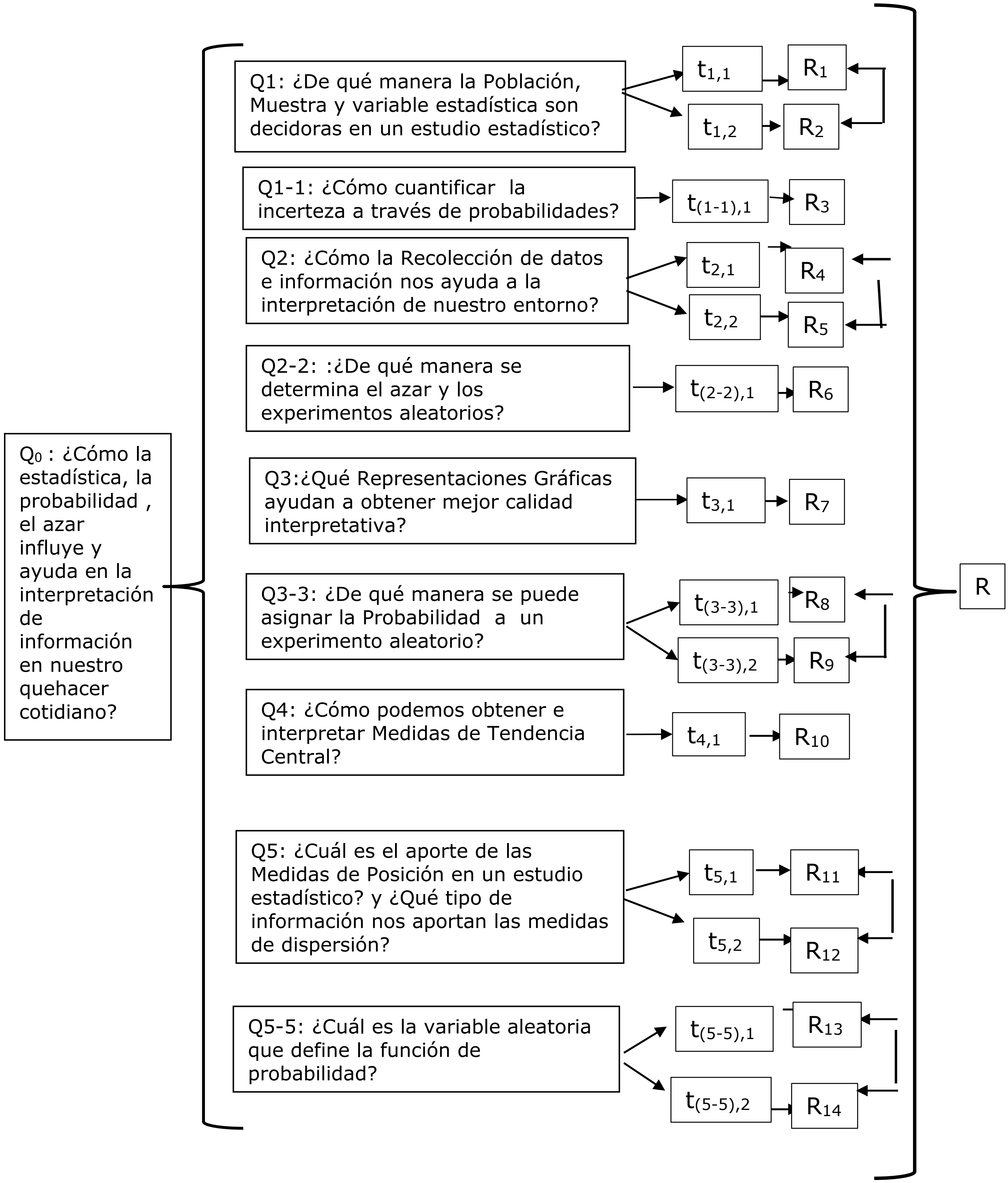


Figura N° 5, Esquema para el trabajo de aula con el dispositivo didáctico.

4.1. DESCRIPCIÓN DE LAS CLASES.

Clase 1, Etapa Inicial. Encuesta ¿Qué prefieren hacer tus compañeros en su tiempo libre?

Se presenta el Recorrido de Estudio e Investigación a los estudiantes, planteando la interrogante inicial Q_0 : **¿Cómo la estadística, la probabilidad , el azar influye y ayuda en la interpretación de información en nuestro quehacer cotidiano? ,**motivando al estudio de esta cuestión a partir de varias sesiones con el apoyo de un dispositivo didáctico en el cuál desarrollaran respuestas (Ri) a cada una de las preguntas derivadas (Qi) con el estudio de sus respectivas tareas (t_i)

Se presenta el siguiente esquema:

Q_0 : ¿Cómo la estadística, la probabilidad , el azar influye y ayuda en la interpretación de información en nuestro quehacer cotidiano?

Q1: ¿De qué manera la Población, Muestra y variable estadística son relevantes en un estudio estadístico?

t_1 (tarea1): Realicemos una encuesta. ¿Qué prefieren hacer tus compañeros en su tiempo libre?

Figura N° 6.Esquema con el inicio al trabajo con el dispositivo didáctico

Las organizaciones matemáticas consideradas para esta subpregunta generatriz son:

- OM: Variables estadísticas
- OM: Encuesta y procedimiento de recolección de datos
- OM: Población y muestra en un estudio estadístico.

La actividad inicial se corresponde con la Tarea N°1 (t_1), realicemos una encuesta con la pregunta; ¿Qué prefieren hacer tus compañeros en su tiempo libre?

Se motiva a escuchar posibles respuestas y a continuar con el desarrollo de ésta interrogante, que tiene que derivar en información importante y que las conclusiones de este estudio nos llevarán a tomar posibles decisiones.

Se inicia el trabajo pensando en la interrogante Q1: ¿De qué manera la Población, Muestra y variable estadística son relevantes en un estudio estadístico?

Al insertar el concepto de variable estadística y tipos de variable estadística se trabaja con la identificación de variables cualitativas y cuantitativas y cómo identificar cada una de ellas, de acuerdo a los conocimientos de los estudiantes. Luego, se plantea si una misma encuesta servirá para obtener datos cualitativos y cuantitativos, trabajando con la siguiente actividad de aula mediante una guía de trabajo que se realiza en grupos colaborativos formados en forma aleatoria y con ello se entrega el formato de la encuesta a trabajar como se muestra en la figura N°7.

I.- **El** ***primer paso*** *en una investigación estadística* consiste en diseñar la encuesta. En este caso, la encuesta constará de dos preguntas: "Escoger una actividad preferida" y "tiempo aproximado en horas semanales que dedicas a esa actividad preferida".

(1) Escoge una sola de las siguientes actividades qué prefieres hacer en tu tiempo libre:
(A) Jugar un deporte (fútbol, básquetbol, tenis, etcétera).
(B) Ver TV o utilizar la computadora.
(C) Pasear o conversar con amigos y amigas.
(D) Leer

II.- Escoge 10 compañeros en aula y **recoge los datos** de la encuesta. Este es ***el segundo paso*** *de una investigación estadística.*

III.- **Organiza los datos** , que es **el tercer paso** de una investigación estadística, en las siguientes tablas (una casilla por pregunta):

ACTIVIDAD PREFERIDA										
ENCUESTADO	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Preferencia										
JUGAR UN DEPORTE (A)										
T.V. o COMPUTADORA (B)										
CONVERSAR CON AMIGOS/(AS) (C)										
LEER (D)										
OTROS										

Figura N° 7.Realicemos una encuesta. Tablas para la variable cualitativa.

Siguiendo con el desarrollo de la encuesta "**¿Qué prefieren hacer tus compañeros en su tiempo libre?"** se solicita completar una tabla resumen con la cantidad de horas aproximada de dedicación semanal a la actividad preferida, siguiendo el formato de trabajo que se muestra en la figura N°8

.

NÚMERO DE HORAS APROXIMADA DEDICADAS POR SEMANA										
Encuestado	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
PREFERENCIA (A),(B),(C),(D),(E)										
Número de horas										

- TABLAS QUE CORRESPONDEN A VARIABLE CUANTITATIVA: NÚMERO DE HORAS.

NÚMERO DE HORAS Semanales		Número de personas que respondieron este número de horas.
0		
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		

RECUERDA: ***La actividad preferida*** y ***el número de horas de dedicación semanal*** son ejemplos de variables estadísticas. La primera es una variable categórica o cualitativa; la segunda, una variable *numérica cuantitativa*. Cuando tienen muchos datos, es necesario organizarlos y describirlos mediante tablas y gráficos, para luego poder analizarlos.

Figura N° 8. Trabajemos con variable cuantitativa

Esta actividad tuvo gran recepción de los estudiantes, los cuales partieron con mucho entusiasmo a encuestar a los compañeros más cercanos y luego se movilizaron a otros grupos de trabajo y realizan la encuesta presentada para luego ajustar la información obtenida en las tablas asignadas para ello, esta actividad se realizó en un bloque de noventa minutos
La mayoría de las encuestas desarrollas no presentaron inconvenientes, uno de los desarrollos de las encuestas es el que se presenta en la siguiente figura :

		ACTIVIDAD PREFERIDA									
ENCUESTADO		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
		✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
Preferencia											
JUGAR UN DEPORTE	(A)					✓					
T.V. o COMPUTADORA	(B)										
CONVERSAR CON AMIGOS/(AS)	(C)			✓			✓		✓	✓	
LEER	(D)	✓	✓		✓						✓
OTROS	(E)							✓			

Figura N° N° 9. Datos para el inicio del conteo para variable cualitativa actividad preferida.

La Figura N° 9 sobre inicio de la encuesta variable cualitativa nos muestra como los estudiantes marcan su actividad preferida.

Al realizar esta primera parte se observa que algunos estudiantes buscan estrategias para completar las tablas propuestas, como por ejemplo marcar el orden los encuestados y luego insistir en que la persona encuestada escoja sólo una actividad preferida y decida su opción de la manera más clara posible. En un principio algunos estudiantes marcaban de una preferencia por persona, pero luego en la interacción de unos estudiantes con otros reflexionaron con respecto a lo solicitado en la guía y las instrucciones entregadas en un principio y continuaron sin mayores problemas con una sola actividad preferida por estudiante.

Luego de completar la tabla inicial con el encuestado y la actividad preferida, se pasa a la siguiente interrogante ¿Cuál es el Número de horas aproximada dedicada por semana a tu actividad preferida?

Frente a esta interrogante se producen en algunos casos bloqueos, meditación y reflexión al pensar en cantidad de horas semanales aproximadas y nacen preguntas claves entre ellos, como por ejemplo, ¿Cuántas horas tiene un día ? ¿Realizo de noche también mis actividades preferidas?,¿Cuántas horas tiene una semana?

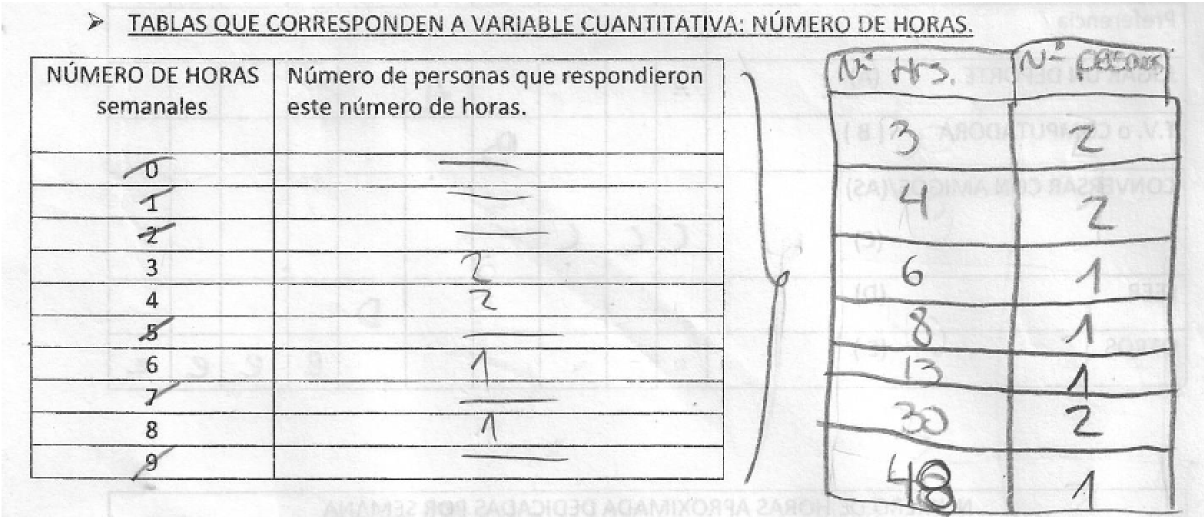
En este punto es donde nace la opción de estudiantes que están más de 9 horas en la semana, pendientes de realizar una actividad preferida, para esta necesidad construyen tablas adicionales.

NÚMERO DE HORAS APROXIMADA DEDICADAS POR SEMANA										
Encuestado	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
PREFERENCIA (A),(B),(C),(D),(E)	D	D	C	D	A	C	E	C	C	D
Número de horas	3	48	33	20	12	4	3	3	3	3

Figura N° 10.Conteo para la variable cuantitativa.

La Figura N°10 corresponde a la actividad inicial de la fabricación de la encuesta cuyo primeros datos eran cualitativos ¿cuál es tu actividad preferida? y la segunda partes los estudiantes completan datos cuantitativos ¿cuál es la cantidad de horas aproximada que dedicas por semana a tu actividad preferida?, que entrega información sobre la cantidad de horas que realizan o dedican a su actividad preferida. En este punto es donde nace la opción de estudiantes que están más de 9 horas en la semana, pendientes de realizar una actividad preferida, para esta necesidad construyen tablas adicionales, como se muestra en las siguientes figuras anexas.

Figuras con tablas anexas:



➢ TABLAS QUE CORRESPONDEN A VARIABLE CUANTITATIVA: NÚMERO DE HORAS.

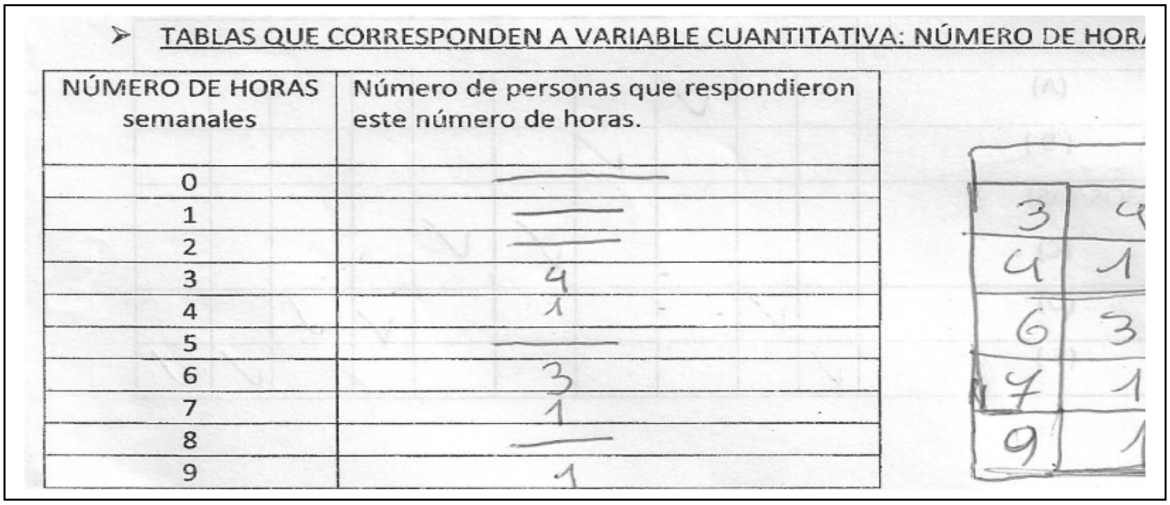
NÚMERO DE HORAS semanales	Número de personas que respondieron este número de horas.
~~0~~	—
~~1~~	—
~~2~~	—
3	2
4	2
~~5~~	—
6	1
~~7~~	—
8	1
~~9~~	—

N° Hrs.	N° Cesonas
3	2
4	2
6	1
8	1
13	1
30	2
48	1

Figura N° 11. Organización del conteo para la variable cuantitativa

En la Figura N° 11 se observa como el estudiante marca el conteo que corresponde a la variable cuantitativa y escribe numéricamente la cantidad de horas a la semana que realiza esta actividad, porque no le alcanzan las nueve horas, entregadas o consideradas en la tabla que solo incluye nueve horas semanales y un encuestado utiliza 48 horas semanales, dos encuestados utilizan 30 horas semanales y un encuestado 13 horas semanales , por lo cual se ve en la necesidad de trabajar un tabla anexa y fabrica una tabla con la cantidad de horas que necesita.

Otros estudiantes, por ejemplo, no tienen problema en trabajar con la tabla propuesta para nueve horas semanales y se ajustan al formato, pero de igual manera realizan una tabla anexa que resume el conteo.



➢ TABLAS QUE CORRESPONDEN A VARIABLE CUANTITATIVA: NÚMERO DE HOR

NÚMERO DE HORAS semanales	Número de personas que respondieron este número de horas.
0	—
1	—
2	—
3	4
4	1
5	—
6	3
7	1
8	—
9	1

3	4
4	1
6	3
7	1
9	1

Figura N° 12.Conteo de variable cuantitativa. Encuesta

Al finalizar la clase se solicita a los estudiantes entregar el material trabajado con la recopilación básica de los datos de la encuesta, para de ésta manera guardar la información para continuar trabajando en la clase siguiente.

Cabe mencionar que esta actividad los estudiantes respondieron en un tiempo aproximado de 90 minutos.

4.1.2 DESCRIPCIÓN DE LAS CLASES. Clase 2, Etapa Inicial. Encuesta y Tabulación de la información. Tablas de distribución de frecuencias.

En la clase 2 los estudiantes buscaran tabular la información de la variable cualitativa y la variable cuantitativa obtenida de una misma encuesta con sólo dos preguntas ¿Cuál es tu actividad preferida? y ¿Cuánto tiempo a la semana dedicas a ella?. Para ello se entrega a cada estudiante la información obtenida en la encuesta "que prefieren hacer tus compañeros en su tiempo libre" y se solicita a los estudiantes realizar la tabulación de los datos para poder tomar decisiones u opiniones con respectos a cuál es la actividad preferida en tiempo libre y la cantidad de horas que se dedica a ella y si ésta información nos ayuda a obtener información y opiniones informadas para tomar nuestras propias decisiones y además si podemos tomar conclusiones grupales sobre ésta información y sobre la muestra estadística es la apropiada para obtener información.

A los estudiantes se le recuerda el concepto de frecuencia absoluta y de frecuencia relativa, se entrega el material de la clase y se juntan en grupos colaborativos organizados en forma aleatoria con cada jefe de grupo como en la clase anterior, en donde de manera entusiasta continúan el proceso de tabulación agregando la frecuencia absoluta y la obtención de la frecuencia relativa con los datos obtenidos en la encuesta.

Además, de realizar tablas, se les denomina a éstas de manera formal "Tabla de distribución de frecuencias" en donde deben calcular y ordenar: frecuencia absoluta (fi), frecuencia acumulada (fa), frecuencia relativa (fr), frecuencia relativa porcentual (fr%) y frecuencia relativa acumulada (frac)

Se presenta el siguiente esquema de secuencia de nuestro trabajo con el dispositivo didáctico.

El esquema siguiente nos ordena y nos orienta en nuestro trabajo con preguntas, subpreguntas y tareas de aprendizaje ligadas a ellos como se muestra en la figura N° 13:

Q_0 : ¿Cómo la estadística, la probabilidad , el azar influye y ayuda en la interpretación de información en nuestro quehacer cotidiano?

⇓

Q2: ¿Cómo la recolección de datos e información nos ayuda a la interpretación crítica de manera resumida y confiable?

↓

$t_{2,1}$:Organicemos la información de nuestra encuesta en tablas de distribución de frecuencias.

$t_{2,2}$: Reconocer y calcular frecuencia absoluta, relativa y relativa porcentual.

Figura N° 13.Esquema de trabajo para la clase 2 con la subpregunta Q2

Las organizaciones matemáticas consideradas para esta subpregunta generatriz son:

- OM: Variables estadísticas
- OM: Encuesta y procedimiento de recolección de datos
- OM: Frecuencia absoluta, acumulada, relativa y porcentual. Tablas de Distribución de Frecuencias.

Las actividades de esta segunda clase de la Primera sesión, continúan tributando a la subpregunta generatriz "¿De qué manera la población, Muestra y variable estadística son decidoras en un estudio estadístico. En esta Tarea N°2(t_2) se propone ordenar la información en una tabla de distribución de frecuencias en donde se considera la variable, luego frecuencia absoluta, frecuencia relativa, frecuencia acumulada, frecuencia relativa acumulada y frecuencia porcentual. Para ello se recuerdan los conceptos de tabla de distribución de frecuencias y la forma de obtención de las frecuencias definidas anteriormente, organizando este cálculo en una primera instancia con el concepto al lado de la tabla y luego los cálculos en una sola tabla. Se realiza primeramente la tabla de distribución de frecuencias para la variable cualitativa con el cálculo de las frecuencias anteriormente nombradas, para luego realizar éstos cálculos con la variable cuantitativa, en la Figura N°14 se muestra la forma de trabajar propuesta en el dispositivo didáctico con la variable cuantitativa:

Las siguientes tablas agrupan los datos obtenidos en una encuesta. Complétalas:

- <u>TABLAS QUE CORRESPONDEN A VARIABLE CUALITATIVA: ACTIVIDAD PREFERIDA</u>

ACTIVIDAD PREFERIDA	N° de personas que prefieren esta actividad.
JUGAR UN DEPORTE	
TV o COMPUTADORA	
CONVERSAR CON AMIGOS/(AS)	
LEE	
OTROS	

En esta tabla completaste la frecuencia absoluta (f) que corresponde al número de veces que aparece un mismo valor de una variable en una muestra.

ACTIVIDAD PREFERIDA	Frecuencia relativa de personas que prefieren esta actividad. fr= $\frac{frecuencia\ absoluta}{Número\ total\ de\ datos}$
JUGAR UN DEPORTE	
TV o COMPUTADORA	
CONVERSAR CON AMIGOS/(AS)	
LEER	
OTROS	

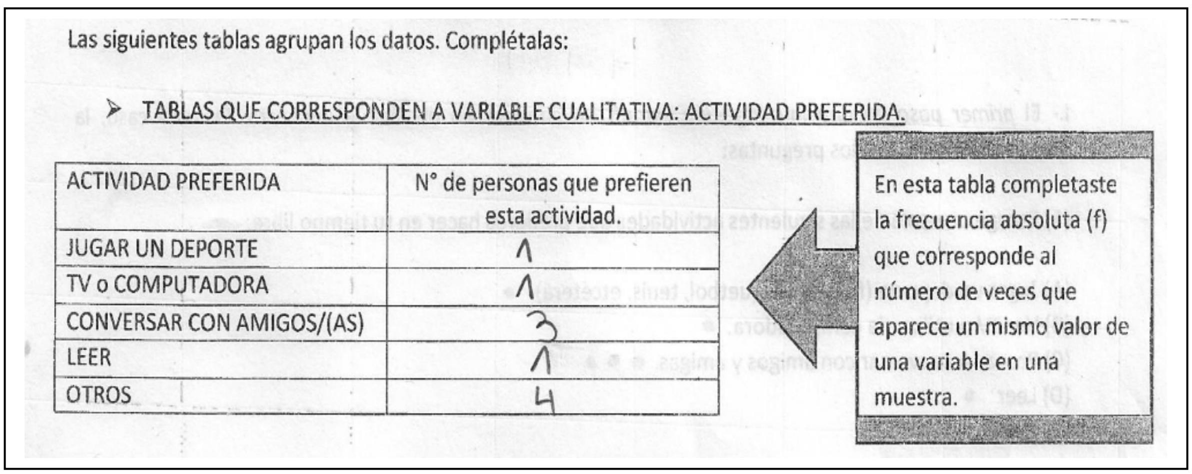
En esta tabla completaste la frecuencia relativa (fr) que es el número de veces que aparece un mismo valor de una variable en una muestra respecto del total de valores. Se calcula dividiendo la frecuencia absoluta por el tamaño de la muestra.

ACTIVIDAD PREFERIDA	Frecuencia acumulada(fa) de personas menores o iguales al valor considerado que prefieren esta actividad.
JUGAR UN DEPORTE	
TV o COMPUTADORA	
CONVERSAR CON AMIGOS/(AS)	
LEER	
OTROS	

La frecuencia acumulada(fa) es la suma de las **frecuencias** absolutas de todos los valores inferiores o iguales al valor considerado.

Figura N° 14.Tablas para organizar la información cuantitativa.

Al completar la organización de la información con la frecuencia absoluta y la frecuencia relativa se obtienen tablas como lo que se muestra en la Figura N° 15 :



Las siguientes tablas agrupan los datos. Complétalas:

➢ TABLAS QUE CORRESPONDEN A VARIABLE CUALITATIVA: ACTIVIDAD PREFERIDA.

ACTIVIDAD PREFERIDA	N° de personas que prefieren esta actividad.
JUGAR UN DEPORTE	1
TV o COMPUTADORA	1
CONVERSAR CON AMIGOS/(AS)	3
LEER	1
OTROS	4

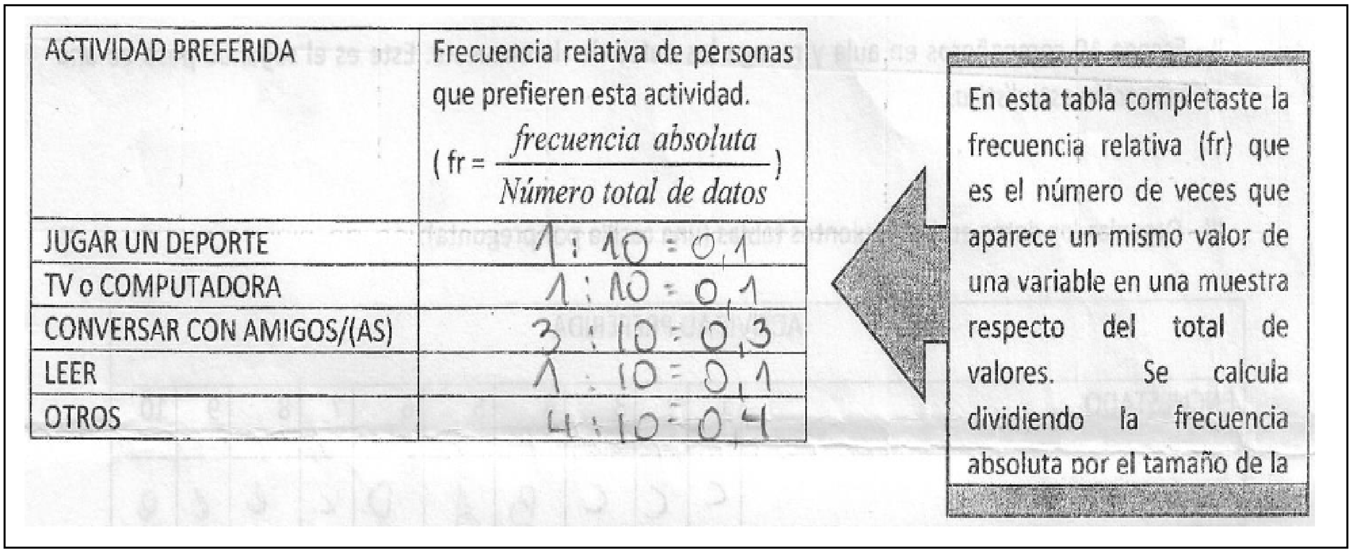
En esta tabla completaste la frecuencia absoluta (f) que corresponde al número de veces que aparece un mismo valor de una variable en una muestra.

Figura N° 15.Variable cualitativa y su respectiva frecuencia absoluta en la encuesta ¿cuál es tu actividad favorita?

.

Al llegar a solucionar esta tarea(t_i) el estudiante asocia el conteo realizado anteriormente con la obtención de la frecuencia absoluta(fa) como se aprecia en la Figura N° 15.

De manera similar el estudiante asocia el concepto de frecuencia relativa(fr) como el cociente entre la frecuencia absoluta y el número total de datos de la muestra y realiza los cálculos para su obtención lo que se ilustra en la figura N°16 .



ACTIVIDAD PREFERIDA	Frecuencia relativa de personas que prefieren esta actividad. (fr = $\frac{\textit{frecuencia absoluta}}{\textit{Número total de datos}}$)
JUGAR UN DEPORTE	1 : 10 = 0,1
TV o COMPUTADORA	1 : 10 = 0,1
CONVERSAR CON AMIGOS/(AS)	3 : 10 = 0,3
LEER	1 : 10 = 0,1
OTROS	4 : 10 = 0,4

En esta tabla completaste la frecuencia relativa (fr) que es el número de veces que aparece un mismo valor de una variable en una muestra respecto del total de valores. Se calcula dividiendo la frecuencia absoluta por el tamaño de la

Figura N° 16.Variable cualitativa con el cálculo de la frecuencia relativa en la encuesta

En la Figura N° 16, se observa como el estudiante realiza la comparación por cociente entre la frecuencia absoluta y el número total de datos para después completar la tabla de distribución de frecuencias.

Los estudiantes mediante preguntas analizan como la información obtenida datos, que se transforman en numerales y que estos numerales entregan información válida para tomar conclusiones sobre cuáles son las actividades preferidas que realizan nuestros compañeros. Luego, para que la información sea más detallada y completa se le pide trabajar ahora con los datos cuantitativos de la encuesta que se recolectaron en base a la pregunta:" ¿Cuánto tiempo aproximado dedicas a la semana dedicas a realizar tu actividad preferida?".

Luego de tener esos datos con el conteo se realiza la construcción de la tabla de distribución de frecuencias y se calcula la frecuencia acumulada (fa), la frecuencia relativa acumulada (fra), la frecuencia relativa porcentual (fr%) y la frecuencia relativa acumulada porcentual (fra%), todo esto de la variable cuantitativa "Número de horas de dedicación semanal a la actividad preferida "como se observa en la Figura N° 17.

EJERCICIO. Realiza una tabla con la variable cuantitativa: Número de horas de dedicación semanal a la actividad preferida , completando frecuencia absoluta (f), frecuencia acumulada (fa), frecuencia relativa(fr),frecuencia relativa porcentual (fr %) , frecuencia relativa acumulada (fra), frecuencia relativa acumulada porcentual (fra%) .

Figura N° 17. Tabla de distribución de frecuencias

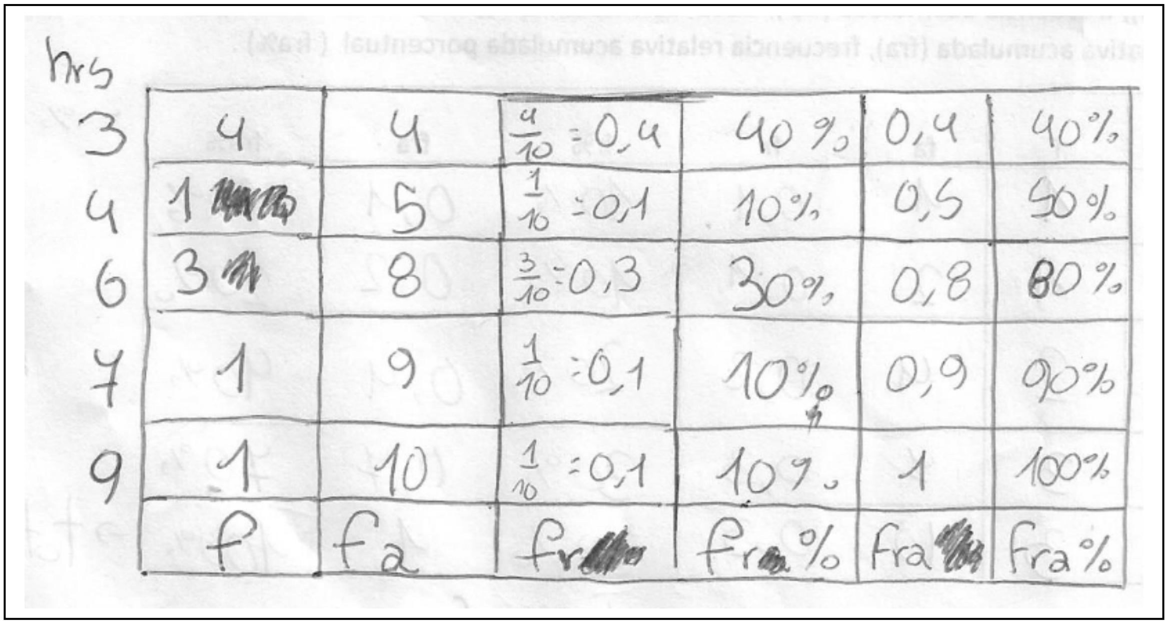
El estudiante analiza la tarea (t_i) y se ayuda con las conexiones con las Organización Matemática que corresponden a la pregunta Q1 y además recuerda cómo se realizó en la tarea anterior el cálculo de las frecuencias para lograr éxito en esta nueva tarea, como se observa en la figura N°18. Luego de realizar todas estas conexiones completa la tabla de distribución de frecuencias, obteniendo trabajos como los que se muestran a continuación en la Figura N° 18

Variable **Actividad Preferida**	f	fa	fr	fr%	fra	fra%
Jugar un deporte	2	2	$\frac{2}{10} \to \frac{1}{5} \to 0,2$	0,2 · 100 20 %	0,2	20%
TV o Computadora	0	~~0~~ 2	$\frac{0}{10} \to \cancel{0} \to 0$	0 · 100 0%	0,2	20%
Conversar con amigos(as)	5	7	$\frac{5}{10}$ - 0,5	0,5 · 100 50%	0,7	70%
Leer	0	~~0~~,7	$\frac{0}{10} \to \cancel{0} \to 0$	0 · 100 0%	0,7	70%
Otros	3	10	$\frac{3}{10} \to 0,3$	0,4 · 100 30%	1	100%

Figura N° 18.Estudiante completa tabla de distribución de frecuencias

En la figura se observa de qué manera el estudiante fue relacionando mediante flechas el cálculo de las frecuencias en cada casilla al igual que otro estudiante que también buscó la fórmula más apropiada para completar la tabla de distribución de frecuencias que se observa en la Figura N° 18.

Tabla de distribución de frecuencias para la variable cuantitativa ”Número de horas”



hrs						
3	4	4	$\frac{4}{10}=0,4$	40%	0,4	40%
4	1	5	$\frac{1}{10}=0,1$	10%	0,5	50%
6	3	8	$\frac{3}{10}=0,3$	30%	0,8	80%
7	1	9	$\frac{1}{10}=0,1$	10%	0,9	90%
9	1	10	$\frac{1}{10}=0,1$	10%	1	100%
	f	fa	fr	fra%	Fra	Fra%

Figura N° 19. Tablas de distribución de frecuencias

En la Figura N° 19 se observa como el estudiante completa las tablas expresando los cocientes en forma de fracción, además estas tablas se completan sin ayuda de calculadoras u objetos tecnológicos y entre ellos mismos, los estudiantes, recuerdan operatoria de división y cálculo de porcentaje con consultas a la profesora que guía su el trabajo con las tablas en la variable cualitativa y cuantitativa.

4.1.3. DESCRIPCIÓN DE LAS CLASES. Clase 3. EXPERIMENTO ALEATORIO, GRADOS DE POSIBILIDAD, NIVELES DE INCERTEZA, INTRODUCCIÓN AL CÁLCULO DE PROBABILIDAD, MEDIANTE CÁLCULO DE FRECUENCIAS.

Para realizar la clase 3 debemos conectarnos con el ámbito de la probabilidad y la subpregunta Q_{1-1} ¿Cómo cuantificar la incerteza a través de las probabilidades?, para ello se trabajará en función de organizaciones matemáticas (OM) fundamentales en el inicio de cualquier estudio en el ámbito de la probabilidad. Las organizaciones matemáticas consideradas para esta subpregunta generatriz son:

- OM: Experimento aleatorio.
- OM: Grados de posibilidad y niveles de incerteza.
- OM: Noción de Probabilidad.

- ❖ OM: Resultados asociados a un experimento aleatorio.
- ❖ OM: Espacio Muestral, Evento o suceso y su ocurrencia.

A los estudiantes se les conecta con el esquema del Recorrido de Estudio e Investigación (REI) mediante una proyección con data en pizarrón en donde se muestra la figura N° 20:

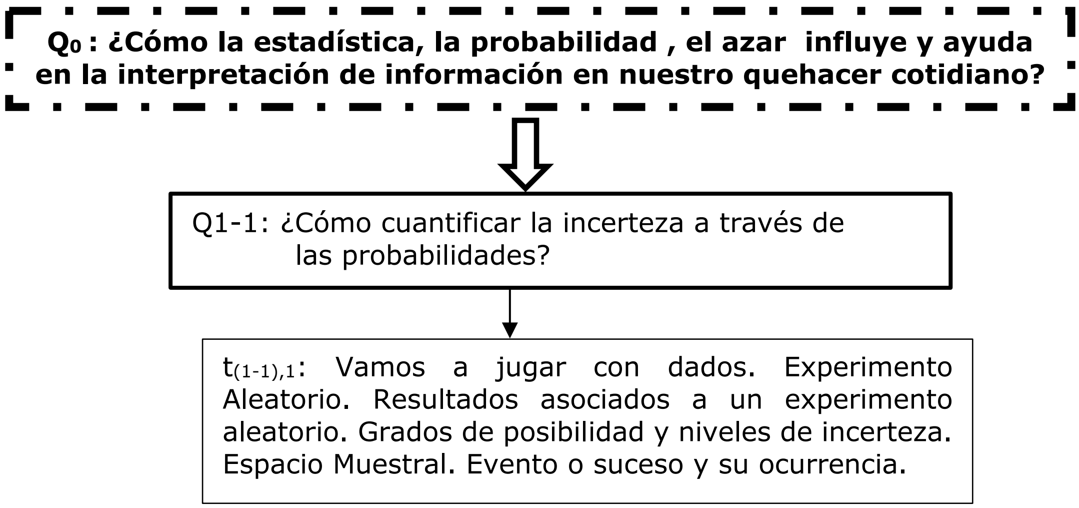


Figura N° 20.Esquema dispositivo didáctico. Probabilidad

Se recuerdan algunos conceptos de probabilidad y se habla del azar, exponiendo situaciones en donde se evidencian situaciones ligadas al azar como por ejemplo el lanzamiento de una moneda, el lanzamiento de un dado, el juego de la ruleta y otros en los cuales es imposible predecir quien será el ganador del juego, por lo cual nos encontramos frente a una situación de incerteza. Además, se expone que tampoco podemos anticiparnos a las preferencias que tendrán las personas que participan en el juego y que para conocerlas debemos obtener una muestra, efectuar las preguntas pertinentes y registrar las repuestas y las apuestas. Todo este registro se debe realizar como parte de un proceso llamado *"experimento aleatorio"* que corresponde a cualquier procedimiento o situación que produce un resultado que no es predecible, esto es, depende del azar.

Según lo anterior, podemos identificar diferentes *grados de posibilidad* de que ocurra cierto resultado y éstos resultados lo podemos catalogar desde "*Imposible*" hasta "*Seguro*", con un grado central "*posible*" que pueden ser considerados un valor absoluto*,* como se muestra en la Figura N° 21; sin embargo, entre éstos grados existen condiciones intermedias con un rango difícil de delimitar. Cada uno de estos grados de posibilidad implica diferentes niveles de incerteza. En efecto, la certeza es máxima en los extremos de la escala, esto significa que si catalogamos nuestro experimento o situación dada como Imposible, estamos seguros que ella no ocurrirá, por el contrario, si la calificamos de Segura, estamos seguros de que ella ocurrirá. En ambos casos tenemos completa certeza. Ahora, si calificamos el experimento o situación dada como Posible, estaremos ante un grado máximo de incerteza, en donde no podemos inclinarnos ni hacia la ocurrencia ni hacia la no ocurrencia de la situación que nos interesa.

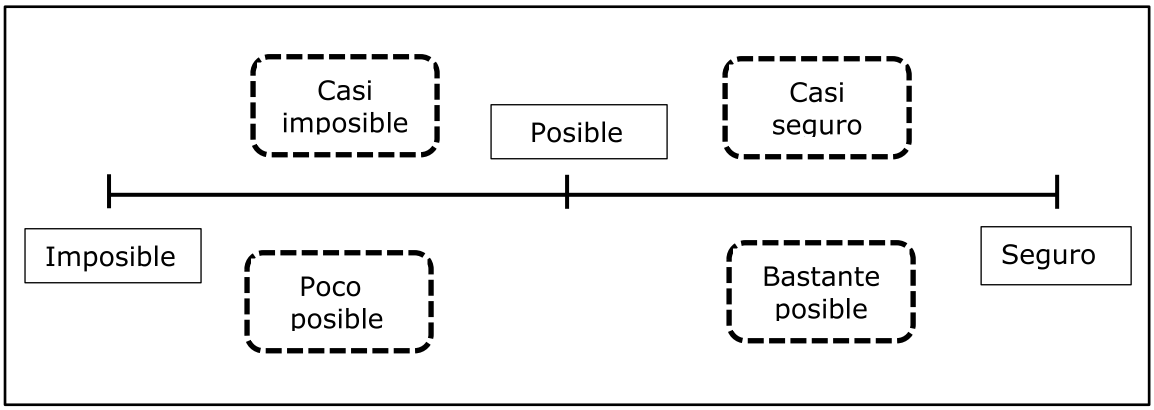


Figura N° 21.Grados de posibilidad que ocurra cierto experimento o situación dada. Fuente.Refip matemática.Datos y Azar

Como se visualiza en la figura N° 21 los grados de posibilidad constituyen una escala cualitativa de las oportunidades de que ocurra algún experimento o situación y sus categorías van desde Imposible a Seguro y entre ellos cada grado de posibilidad implica un diferente nivel de incerteza. De esta manera podemos denominar Experimento Aleatorio a cualquier procedimiento o situación que produce un resultado que no es predecible de antemano y que nos entrega un cierto nivel de incerteza.

Ahora bien, si agregamos la noción de probabilidad de ocurrencia de una situación, ésta corresponderá a un valor entre 0 y 1, que también la podemos expresar en forma porcentual como 0% y 100% de modo que cada situación catalogada como Imposible tendrá una posibilidad de ocurrencia "0" y, por el contrario, en el otro extremo una situación catalogada como Segura tendrá una probabilidad de ocurrencia "1". Además, en la medida en que una situación tiene mayor probabilidad de ocurrir, su probabilidad de ocurrencia se acercará a "1". Ahora si la situación es catalogada como Posible, su probabilidad de ocurrencia será de 0,5, esto es, que es tan igualmente posible como imposible que ocurra la situación propuesta. Si el valor es menor a 0,5 podemos asumir que es cercano al extremo izquierdo, como se ilustra en la Figura N° 22, en donde tanto la escala de posibilidad como de probabilidad podríamos decir que es Casi imposible que ocurra la situación dada. De acuerdo a esto podemos decir que la Probabilidad corresponde a una medida cuantitativa de las posibilidades de que ocurra una situación y sus valores están comprendidos entre "0" y "1", como se observa en la Figura N° 22, donde se compara la posibilidad de ocurrencia de un resultado con la probabilidad de ocurrencia del mismo resultado.

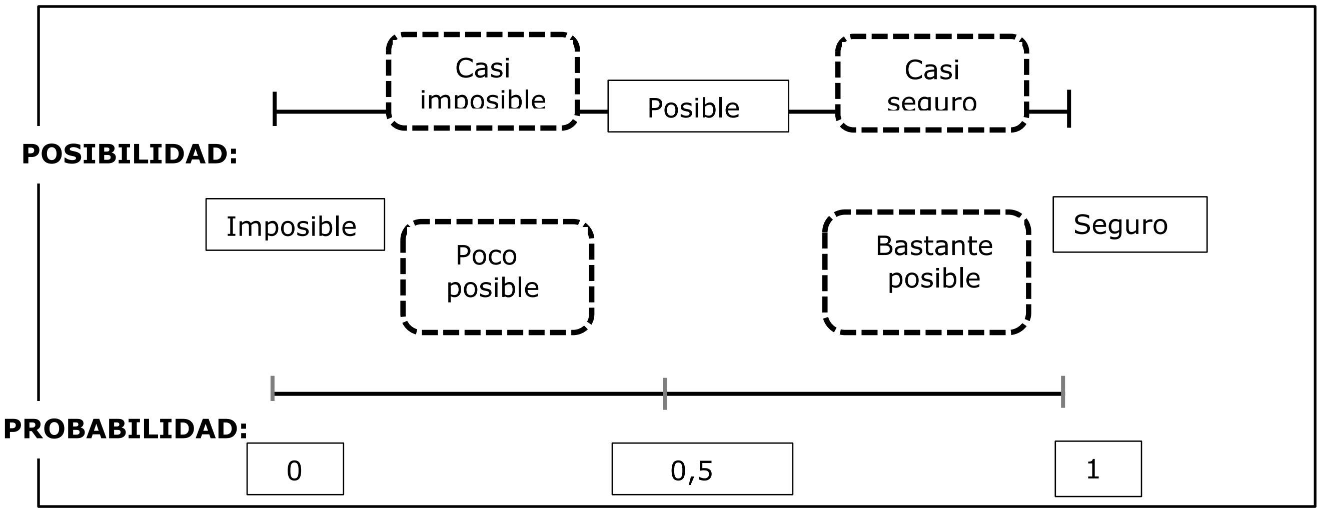
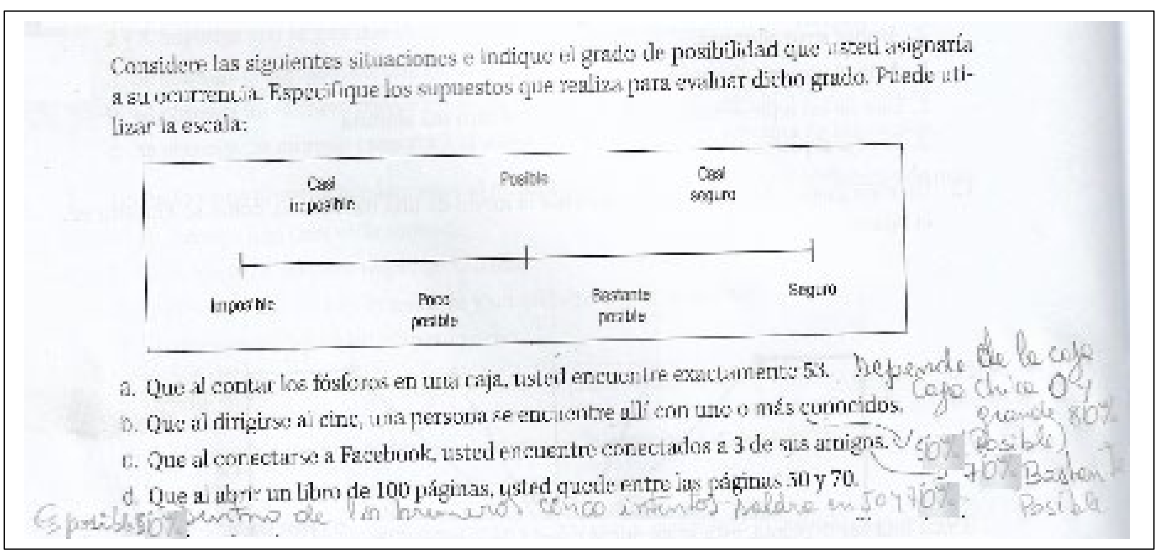


Figura N° 22.Correspondencia entre los diferentes grados de posibilidad de ocurrencia de un resultado con la probabilidad de ocurrencia del mismo resultado. Fuente.Refip matemática. Datos y Azar

Luego se propone a los estudiantes una actividad para comparar, discutir, conjeturar posibles resultados de algunos experimentos aleatorios como se muestran a continuación en la Figura N° 23:



Considere las siguientes situaciones e indique el grado de posibilidad que usted asignaría a su ocurrencia. Especifique los supuestos que realiza para evaluar dicho grado. Puede utilizar la escala:

Casi imposible — Posible — Casi seguro

Imposible — Poco posible — Bastante posible — Seguro

a. Que al contar los fósforos en una caja, usted encuentre exactamente 53. Depende de la caja. Caja chica 0%, grande 80%
b. Que al dirigirse al cine, una persona se encuentre allí con uno o más conocidos. 10% Posible
c. Que al conectarse a Facebook, usted encuentre conectados a 3 de sus amigos. 70% Bastante posible
d. Que al abrir un libro de 100 páginas, usted quede entre las páginas 50 y 70.

Figura N° 23.Resultados aproximados asociados a un experimento aleatorio.

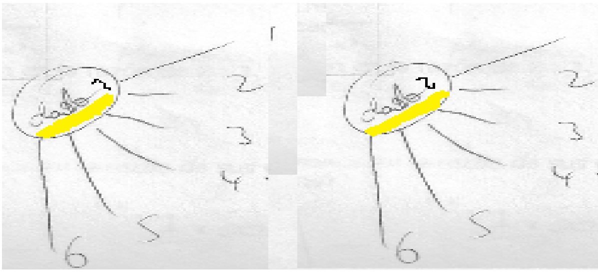
Esta actividad fue bastante comentada por los estudiantes y comparten experiencias y comentarios sobre las cajas de fósforos y que tipo de cajas de fósforos se pueden encontrar en los supermercados, el uso de los encendedores para prender la cocina, lo peligroso que son los encendedores con componentes químicos en su interior y que grado de posibilidad tendrá tener un accidente ligado a quemaduras con este tipo de encendedores. Luego comentan sobre las oportunidades en las cuáles se encuentran con personas conocidas al ir al cine o al mall. Lo mismo ocurre con las redes sociales en donde es bastante recurrente encontrar gente conectada. Y lo más increíble para ellos la ocurrencia de tomar un libro de 100 páginas aproximadamente y abrir este una cierta cantidad de veces y ver en que páginas se encuentra y efectivamente existe una posibilidad de ocurrencia para abrir este libro entre la página 50 y 70.

Para continuar con el estudio en estas temáticas se llevan a la sala algunos elementos adicionales como juego de dados, cartulinas marcadas con colores y puntajes para motivar el trabajo en aula en el ámbito de los grados de posibilidad de ocurrencia de un resultado y la probabilidad de ocurrencia del mismo resultado frente a una situación dada siguiendo el esquema de trabajo propuesto por el dispositivo.

Continuando con el esquema de trabajo, se comienza de acuerdo a ello con la tarea 1 (t_1), trabajando el experimento aleatorio lanzamiento de dados. En el lanzamiento de un dado, no se tiene certeza si el resultado será 1, 2, 3, 4, 5 o 6, sin embargo, podemos identificar posibles resultados y reconocer éstos como *"Espacio muestral" (Ω)* que corresponde al conjunto de todos los posibles resultados en un experimento aleatorio.

Luego, se desafía a los estudiantes a determinar y escribir el espacio muestral que corresponde al lanzamiento de dos dados, bajo la pregunta ¿Cómo escribir el espacio muestral del lanzamiento de dos dados?, tras algunos intentos de escribir el espacio muestral, como por ejemplo el que muestra la Figura N° 24, se decide mostrar una tabla organizada en filas y columnas para que los estudiantes en forma de pares ordenados escriban los posibles resultados que pertenecen al espacio muestral "lanzamiento de dos dados" .

Primeros intentos de escribir el Espacio Muestral (Ω) lanzamiento de dos dados.



Primeros intentos de escribir el Espacio Muestral (Ω) lanzamiento de dos dados.

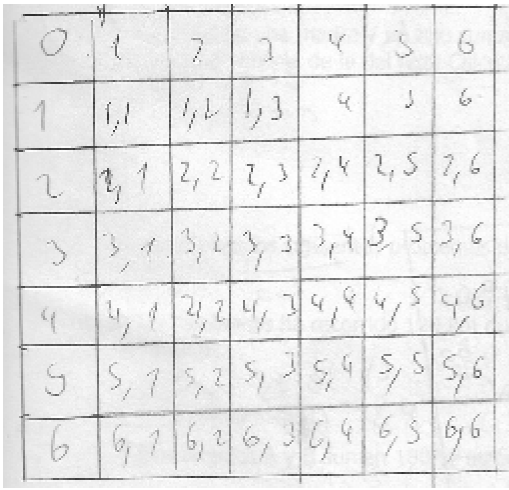
<u>Acuerdo</u>: Escribir Ω lanzamiento de dos dados en forma de pares ordenados en una tabla de doble entrada con filas y columnas.

- Todos los casos posibles en el lanzamiento de dos dados, es decir , el **<u>ESPACIO MUESTRAL (Ω)</u>** del experimento, que podemos escribir en la siguiente tabla en forma de pares ordenados:

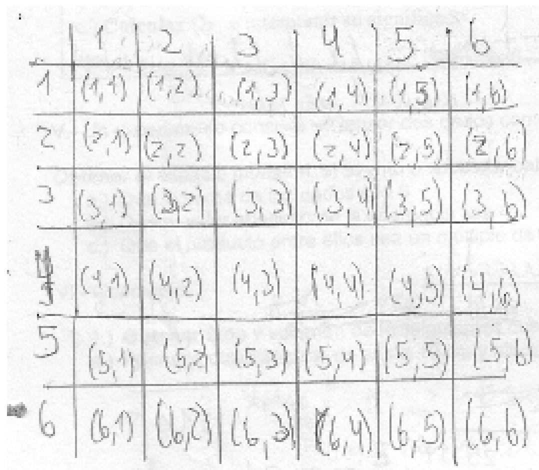
Dado 1 / Dado2	1	2	3	4	5	6	
1	(1,1)						
2							
3							
4							
5							
6							
					Total de casos		

Figura N° 24.Determinación del espacio muestral correspondiente al lanzamiento de dos dados

Ahora que los estudiantes manejan y escriben el espacio muestral del lanzamiento de dos dados con tablas como las que se muestran a continuación en la Figura N° 25:



0	1	2	3	4	5	6
1	1,1	1,2	1,3	4	5	6
2	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6
3	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6
4	4,1	4,2	4,3	4,4	4,5	4,6
5	5,1	5,2	5,3	5,4	5,5	5,6
6	6,1	6,2	6,3	6,4	6,5	6,6



	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

Tabla1: Notación sin par ordenado.
"No utiliza paréntesis, para representar los resultados al lanzar 2 dados"

Tabla2: Notación mediante uso de par ordenado.
"Utiliza paréntesis para demarcar el par ordenado, para representar los resultados al lanzar 2 dados"

Figura N° 25.Determinación del Espacio Muestral realizada por dos estudiantes.

4.1.4 DESCRIPCIÓN DE LAS CLASES. Clase 4. EXPERIMENTO ALEATORIO, ESPACIO MUESTRAL.SUCESOS O EVENTOS Y INTRODUCCIÓN AL CÁLCULO DE PROBABILIDAD, MEDIANTE CÁLCULO DE FRECUENCIAS. DEFINICIÓN FRECUENTISTA DE PROBABILIDAD.

Para iniciar la clase se recuerda el trabajo con frecuencias absoluta, frecuencia relativa, frecuencia relativa porcentual y tablas de distribución de frecuencias y se indica que se utilizará para trabajar en la definición frecuentista de probabilidad siguiendo el esquema del Recorrido de Estudio e Investigación REI, como se observa en la figura N° 26:

Q_0 : ¿Cómo la estadística, la probabilidad , el azar influye y ayuda en la interpretación de información en nuestro quehacer cotidiano?

⇩

Q_{2-2}: ¿De qué manera se determina el azar y los experimentos aleatorios?

↓

$t_{(2-2),1}$:Vamos a jugar con dados. Experimento Aleatorio. Espacio Muestral. Evento o suceso y su ocurrencia.
Tabla de distribución de frecuencias.
Definición frecuentista de probabilidad

Figura N° 26.Esquema.Dispositivo didáctico. Definición frecuentista de probabilidad

Las respectivas organizaciones matemáticas que corresponden a esta etapa son:

- OM: Experimento Aleatorio
- OM: Espacio muestral de un experimento.
- OM: Sucesos o eventos y su ocurrencia
- OM: Frecuencia absoluta, acumulada, relativa y porcentual. Tablas de Distribución de Frecuencias.
- OM: Definición frecuentista de probabilidad

Luego de realizado el trabajo de reconocimiento del experimento aleatorio "Lanzamiento de dos dados al aire" y del espacio muestral Ω ya conocido por los estudiantes al jugar con dos dados numerados del 1 al 6, se propone realizar un juego en parejas para analizar la suma de los dígitos que se obtienen en ambas caras superiores después de realizado el lanzamiento y se les pregunta que será más posible o más probable obtener la "suma de dígitos igual a dos", "suma de dígitos igual a tres", "suma de dígitos igual a cuatro" y así sucesivamente hasta la "suma de dígitos igual a 12" al jugar lanzando a la vez dos dados al aire . Además, de entregar por escrito las reglas del juego, se les entrega a cada grupo un set compuesto por un tablero numerado con filas y columnas, diez fichas de color (cinco rojas y cinco azules) de las cuales escoge, roja o azul, cada integrante y por supuesto dos dados numerados del 1 al 6. También se les entrega una lámina con preguntas para responder una vez realizada la experiencia. Se les solicita a los estudiantes responder estas preguntas para luego poder comparar con los demás compañeros.

En la Figura N° 27 se muestra, las indicaciones del juego y además una lámina de preguntas con las interrogantes que se producen al jugar y realizar un análisis de las posibilidades de apostar a una suma u otra para llegar a la Meta.

UNIVERSIDAD CATÓLICA
DE LA SANTÍSIMA CONCEPCIÓN.
FACULTAD DE EDUCACIÓN

GUÍA DE TRABAJO
ACTIVIDAD DE AULA
¿VAMOS A JUGAR CON DADOS?

●REGLAS DEL JUEGO

1.El juego es para dos personas.

2.Se entrega un tablero con once filas numeradas del 2 al 12 y 11 columnas, la última de las cuales está marcada con la palabra META), 10 fichas de dos colores distintos rojo y azul (5 de cada color) y dos dados (numerados del 1 al 6).

3.Alternadamente, cada uno de los contrincantes, escoge un número comprendido entre 2 y 12 (posibles resultados en la suma de un par de dados), colocando una ficha en la casilla correspondiente. Una vez distribuidos 10 de los 11 números, se empieza a jugar.

4.Por turno, lanzan los dados cada uno de los contrincantes. Si la suma de los dados es uno de los números escogidos poravanzar el lanzador, éste desplaza la ficha correspondiente hacia delante una casilla.

5.Si la suma de los dados es el número que no ha sido escogido por ninguno de los dos adversarios, el jugador del turno escoge una de sus fichas (la que quiera) y la mueve hacia delante una casilla.

6.Si la suma de los dados es un número del adversario, las fichas quedan como están.

7.Gana el jugador que consigue llevar una de sus fichas hacia la meta.

UNIVERSIDAD CATÓLICA
DE LA SANTÍSIMA CONCEPCIÓN.
FACULTAD DE EDUCACIÓN

Lámina de preguntas.

●INTERROGANTES QUE SE PRODUCEN AL JUGAR.

(a)¿Qué números escogerá como preferencia? ________________.

(b)¿Qué números no escogerá? ______.

(c)Si tuviera que escoger entre el 3 y el 11, ¿cuál tomaría?_________.

(d)Si tuviera que escoger entre el 5 y el 9, ¿cuál tomaría?________.

(e)¿Qué números prefiere: "grandes" o "pequeños"?___________.

(f)¿Da igual los números que escojan? ___________.

(g)¿Todo es cuestión de suerte?________.

(h) Si se juegan 10 partidas, ¿es razonable pensar que ganará una partida cada número elegido? ____________. ¿Porqué? ________________ ____ _______

(i) Si se juegan 100 partidas, ¿se debe esperar que, más o menos, gane 10 partidas cada número elegido?___________.¿Por qué?_____________ ____

Figura N° 27.Indicaciones del juego con dados y preguntas relativas al juego

En la Figura N° 27 y Figura N° 28, se muestran tableros que los estudiantes completaron con "tic" (√) o círculo (●) en la medida que van avanzando con la ficha escogida sea roja o azul y los movimientos que se realizan cuando la suma permite avanzar para llegar a la meta. También se muestra el análisis de resultados que los estudiantes realizan después de jugar 10 partidas, en donde los estudiantes marcan con una "equis" (X) los números no escogidos y con la inicial de su nombre el número escogido y de esa manera resumir los intentos por ganar una partida, las partidas ganadas y las empatadas.

2	√										
3	●										M
4	●										E
5	√	√	√	√	√	√	√	√	√	√	T
6	●	●	●	●	●	●	●				A
7	√	√	√	√							
8	√										M
9	●										E
10	●	●									T
11											A
12	√										

Figura N° 28.Tablero de juegoa para dos personas utilizando 5 fichas por persona. Tics representa fichas de un competidor y círculo indica ficha de otro competidor

En la Figura N° 29, se muestra el resumen después de jugar 10 partidas en donde los estudiantes marcan con una equis "X" la suma que no fue escogida y la suma escogida por cada participante con la inicial de su nombre como una forma alternativa a lo solicitado inicialmente cuando se le pidió ubicar un "tic" (√). En la última columna escriben el resultado final obtenido, en el caso de ganar escriben el nombre de la ganadora o ganador :

Partida	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	Gana	
1	X	X	X	X	F	√	√	F	√	X	F	Empate	(6 y 7)
2	X	X	X	√	X	X	√	F	X	X	X	Vale	(8)
3	X	√	X	√	F	X	√	F	√	X	X	Empate	(8 y 9)
4	X	X	F	X	X	√	X	X	√	X	X	Vale	(7)
5	X	X	F	√	X	X	√	F	X	X	X	Empate	(8 y 9)
6	X	X	X	√	X	√	X	F	√	X	X	Vale	(7)
7	√	X	F	√	X	√	X	F	X	X	X	Empate	(7 y 9)
8	X	X	F	√	F	X	√	F	X	X	X	Flo	(6)
9	X	X	X	X	F	√	X	X	√	X	X	Vale	(7)
10	√	√	X	√	F	√	X	F	X	X	X	Vale	(7)

Figura N° 29.Resumen de 10 partidas de juego con dados referidas a obtener la suma de los dígitos obtenidas en un dado de 6 caras numeradas del uno al seis.

Después de realizada la etapa de 10 partidas de juego los estudiantes responden las siguientes preguntas:

Al observar y analizar la actividad realizada anteriormente, es posible tomar algunas decisiones respecto a la elección de los números, **se puede suponer que, si las condiciones del juego no varían;**

(a)¿Qué ocurrirá con los números "centrales" ?______________________

____

(b)¿Los jugadores escogerán con preferencia estos números centrales y dejarán sin seleccionar los números extremos (como el 2 y el 12)?____________

____

(c)¿Las elecciones y respuestas realizadas coinciden con las que has respondido al inicio de la actividad?__________________________________

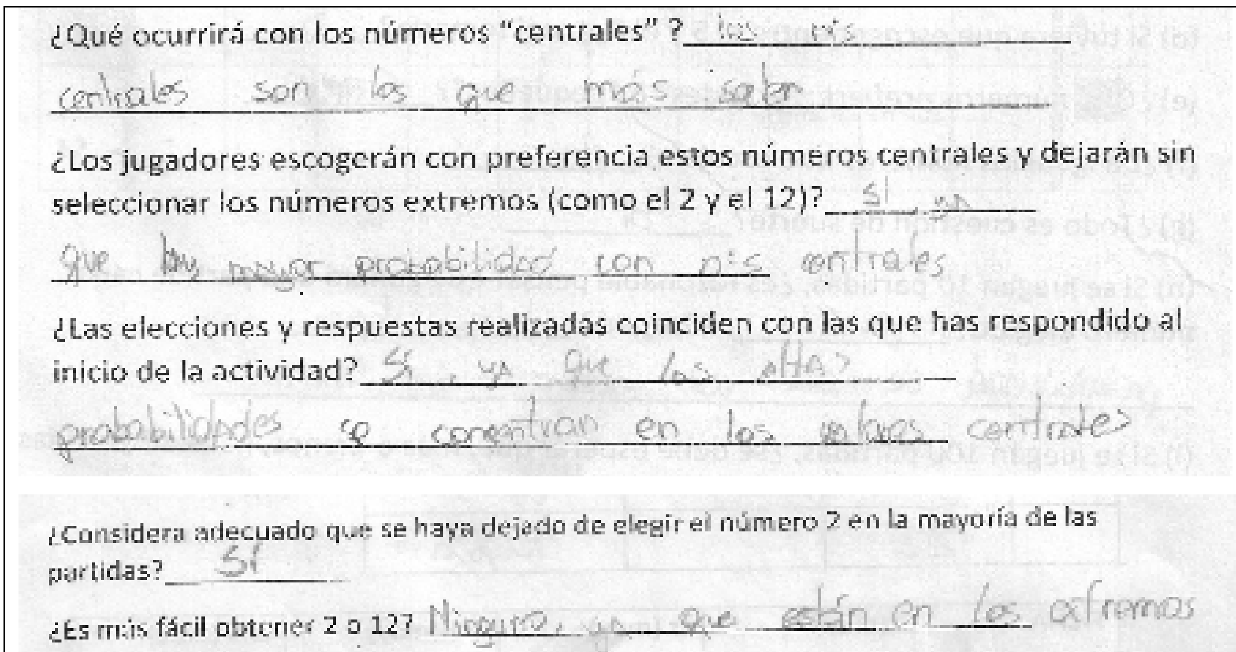
____

(d)¿Considera adecuado que se haya dejado de elegir el número 2 en la mayoría de las partidas?____________

(e)¿Es más fácil obtener 2 o 12?____

Figura N° 30.Preguntas para analizar los resultados obtenidos en el juego.

Los estudiantes se dan cuenta sobre la regularidad en la cual se obtienen los números centrales y responden a las interrogantes entregadas como se muestra en la Figura N° 31



¿Qué ocurrirá con los números "centrales" ? los más centrales son los que más salen

¿Los jugadores escogerán con preferencia estos números centrales y dejarán sin seleccionar los números extremos (como el 2 y el 12)? Sí, ya que hay mayor probabilidad con n°s centrales

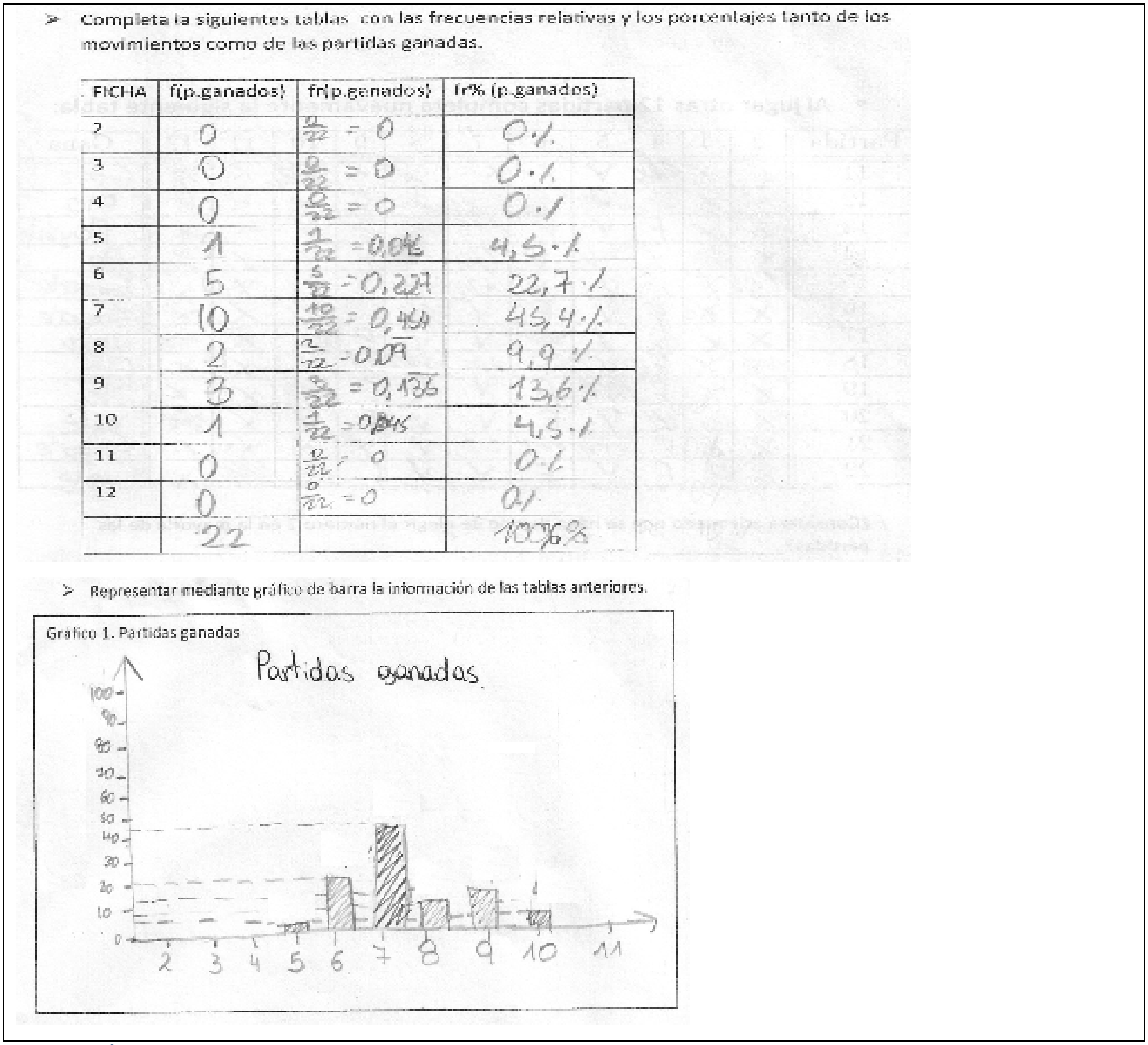
¿Las elecciones y respuestas realizadas coinciden con las que has respondido al inicio de la actividad? Sí, ya que las altas probabilidades se concentran en los valores centrales

¿Considera adecuado que se haya dejado de elegir el número 2 en la mayoría de las partidas? Sí

¿Es más fácil obtener 2 o 12? Ninguno, ya que están en los extremos

Figura N° 31.Respuestas de los estudiantes después de haber jugado 10 partidas, en las cuales dan a conocer la ocurrencia de la suma de los números centrales

Además, se solicita organizar una tabla de distribución de frecuencias con los datos de las partidas en donde deben considerar la frecuencia absoluta de los partidos ganados como también la frecuencia relativa y relativa porcentual de los mismos. En la Figura N° 32 se muestra de que manera los estudiantes entregan una Tabla de Distribución de Frecuencias y además la construcción de un gráfico de barras que representa la suma escogida y los partidos ganados apostando a la suma escogida en el juego de lanzamiento de dos dados.



➢ Completa la siguientes tablas con las frecuencias relativas y los porcentajes tanto de los movimientos como de las partidas ganadas.

FICHA	f(p.ganados)	fr(p.ganados)	fr% (p.ganados)
2	0	0/22 = 0	0 %
3	0	0/22 = 0	0 %
4	0	0/22 = 0	0 %
5	1	1/22 = 0,045	4,5 %
6	5	5/22 = 0,227	22,7 %
7	10	10/22 = 0,454	45,4 %
8	2	2/22 = 0,09	9,9 %
9	3	3/22 = 0,136	13,6 %
10	1	1/22 = 0,045	4,5 %
11	0	0/22 = 0	0 %
12	0	0/22 = 0	0 %
	22		100 %

➢ Representar mediante gráfico de barra la información de las tablas anteriores.

Figura N° 32.Tabla de distribución de frecuencias y representación gráfica de los partidas ganadas realizado por los estudiantes

Los estudiantes una vez organizada la información observan en forma estadística el porcentaje obtenido en los números centrales, luego se entrega información en una tabla sobre la cantidad de movimientos que se pueden realizar al tener una 10 partidas que son contadas ya sea con medios tecnológicos o personas interesadas en la información que puede entregar este detalle y se les pide que organicen en una tabla de distribución de frecuencias y grafique la información sobre los movimientos de las fichas obteniendo los resultados que se muestran a continuación en la Figura N° 33 relacionada con los movimientos de fichas en el caso hipotético de jugadores que realizan el juego como se muestra a continuación:

➢ Completa la siguientes tablas con las frecuencias relativas y los porcentajes tanto de los movimientos como de las partidas ganadas.

FICHA	f(mov)	fr (mov)	fr%(mov)
2	7	$\frac{7}{120}$ = 0,058	5,8 %
3	8	$\frac{8}{120}$ = 0,066	6,6 %
4	4	$\frac{4}{120}$ = 0,033	3,3 %
5	13	$\frac{13}{120}$ = 0,108	10,8 %
6	15	$\frac{15}{120}$ = 0,125	12,5 %
7	20	$\frac{20}{120}$ = 0,166	16,6 %
8	15	$\frac{15}{120}$ = 0,125	12,5 %
9	12	$\frac{12}{120}$ = 0,10	10 %
10	10	$\frac{10}{120}$ = 0,083	8,3 %
11	10	$\frac{10}{120}$ = 0,083	8,3 %
12	6	$\frac{6}{120}$ = 0,05	5 %
	120		99,7 %

➢ Representar mediante gráfico de barra la información de las tablas anteriores.

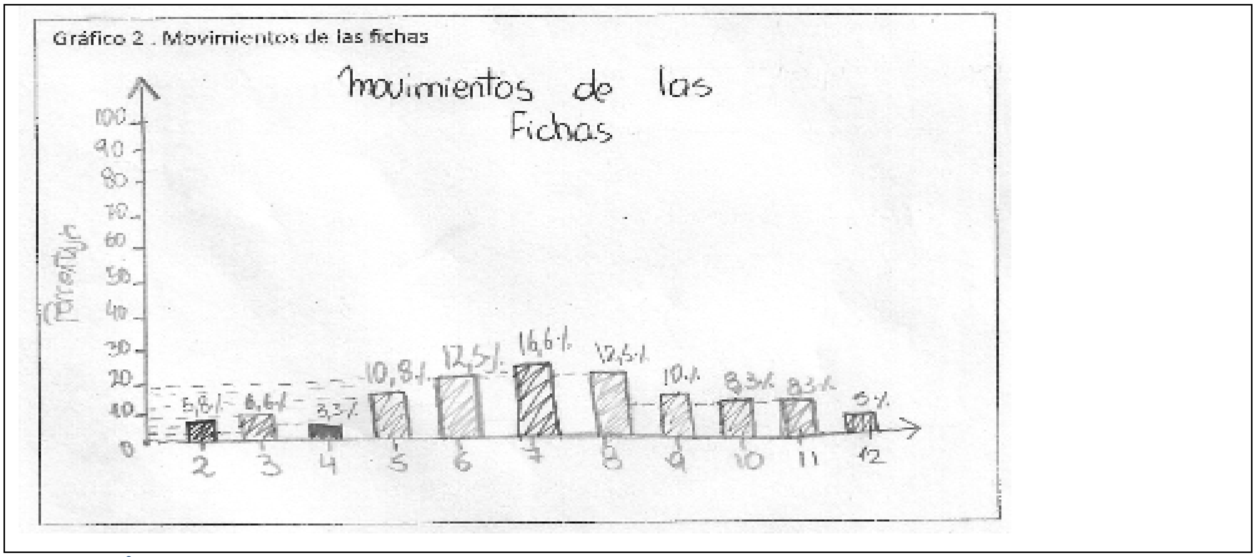


Figura N° 33.Tabla de distribución de frecuencias correspondiente a la cantidad de movimiento de las fichas, con su representación mediante gráfico de barras.

La información sobre los movimientos de las fichas es un asunto que llama la atención de los estudiantes por el grado de especificidad y rigurosidad del cálculo y los jugadores que se pueden ver enfrentados en un juego de varias partidas y como el análisis de esto puede implicar resultados que presentan información relevante en el cálculo numérico y la asociación con la gráfica respectiva. Se realiza un gráfico de barras para representar la información, en el cuál se observan algunos errores en la escala de medidas a los ejes coordenados. Se conversa sobre la forma adecuada y se les indica a los estudiantes una tabla con los movimientos ya contados y calculados para poder graficar correctamente, como muestra la Figura N° 34, porque se tiene claro que por condiciones de tiempo no podemos detenernos mucho en este conteo. La tabla mostrada a los estudiantes se muestra en la Figura N° 34

- <u>ORGANIZACIÓN DE LOS DATOS EN TABLA DE DISTRIBUCIÓN DE FRECUENCIAS</u>

Para organizar los datos obtenidos para las 22 partidas realizar una tabla de distribución de frecuencias y responde las siguientes preguntas:
¿Cuántas partidas ha ganado cada una de las fichas?_________________
¿Cuántos movimientos corresponden a cada una de las fichas?
Por ejemplo, esta tabla corresponde a la cantidad de movimientos para ganar la partida. Observa y luego gráfica.

Ficha	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	Total
Mov.	14	56	89	132	149	180	149	122	99	51	33	1074
Ganadas	0	0	1	4	3	10	3	0	1	0	0	22

El número de movimientos realizados corresponde a la frecuencia absoluta. Corresponde al número de veces que ha salido el 2, 3, 4,…O bien, número de veces que ha ganado la ficha 2, 3, 4,…

Figura N° 34.Datos entregados a los estudiantes sobre una situación hipotética de movimientos de fichas en 22 partidas jugadas.

Luego se solicita a los estudiantes continuar con los gráficos de la información obtenida para avanzar de manera visual en la interpretación de los datos, y además pensando en una gran cantidad de resultados, como método de verificación, para la obtención de probabilidad desde un método frecuentista se solicita realizar el juego hasta completar 22 partidas, como se muestra en la Figura N° 30:

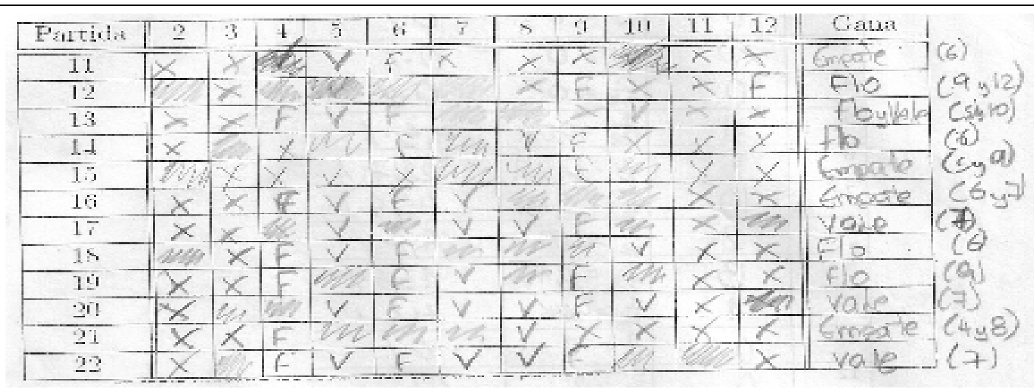
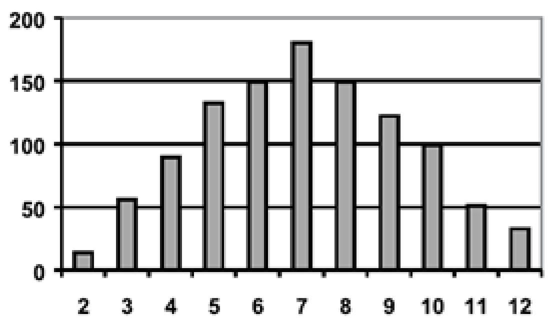


Figura N° 35.Tabla con 12 partidas adicionales, para mejorar tabulación de la gráfica

También, al final de la tarea se comparten resultados con los compañeros y se muestran gráficas preparadas como las que se muestran a continuación en la Figura N° 36, que permite visualizar la gráfica para las partidas ganadas y la gráfica para los movimientos de las fichas. Los estudiantes comparan las gráficas obtenidas ajustan o revisan los datos, con la tabulación y la representación, para luego dar finalización a la tarea asignada.

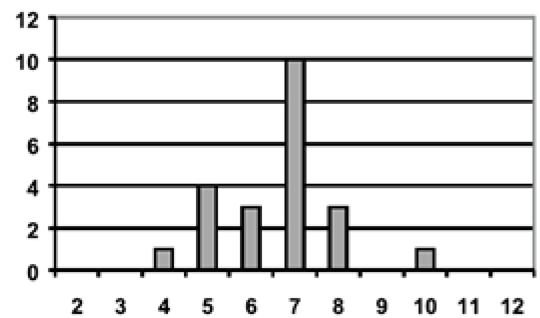
- VISUALIZACIÓN DE LOS DATOS.

Movimiento de las fichas



GRÁFICA N°1

Partidas Ganada



GRÁFICA N°2

Ficha	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	Total
Mov.	14	56	89	132	149	180	149	122	99	51	33	1074
Ganadas	0	0	1	4	3	10	3	0	1	0	0	22

Figura N° 36.Visualización de los resultados entregado por la profesora.

Los estudiantes al realizar esta tarea observan y comparten experiencias sobre la ocurrencia de repetir un número suficiente de veces un experimento, de manera independiente y en las mismas condiciones, las frecuencias relativas de ocurrencia de una situación dada se estabilizan, tendiendo o acercándose cada vez más a cierto valor.
Según la definición frecuentista, este valor corresponde a la probabilidad de ocurrencia de dicho resultado.

4.1.5. DESCRIPCIÓN DE LAS CLASES. Clase 5. EXPERIMENTO ALEATORIO.ESPACIO MUESTRAL.EVENTO O SUCESO.ASIGNACIÓN DE PROBABILIDADES MEDIANTE REGLA DE LAPLACE.

Continuando con el trabajo con el dispositivo didáctico y en base a la pregunta generatriz y las sub-preguntas, de acuerdo al esquema trazado para continuar con la tarea y actividades de esta sesión que se continua trabajando siguiendo el esquema del REI :

Q_0 : ¿Cómo la estadística, la probabilidad , el azar influye y ayuda en la interpretación de información en nuestro quehacer cotidiano?

Q3-3: ¿De qué manera se puede asignar probabilidad a un experimento aleatorio?

$t_{(3-3),1}$: Juguemos con dados. Experimento aleatorio. Evento o suceso y su ocurrencia. Espacio muestral.

$t_{(3-3),2}$: Cálculo de probabilidades y problemas con probabilidad.

……..Figura N° 37.Esquema dispositivo didáctico.Probabilidad

Las respectivas organizaciones matemáticas que corresponden a esta etapa son:

- OM: Experimento Aleatorio
- OM: Espacio muestral de un experimento.
- OM: Sucesos o eventos y su ocurrencia
- OM: Regla de Laplace.
- OM: Propiedades y axiomas de probabilidad Regla de Laplace

Una vez obtenido en la sesión anterior el cálculo de probabilidad mediante la definición frecuentista de probabilidad se reflexiona y registran en carteles preparados por los estudiantes las siguientes propiedades:

- Una probabilidad corresponde a un valor entre 0 y 1
- La probabilidad del espacio muestral es 1
- La probabilidad de que ocurra 1 de 2 sucesos, que no pueden ocurrir simultáneamente, corresponde a la suma de las probabilidades de ocurrencia de los dos sucesos por separado.(Mutuamente excluyente).
- La probabilidad de que ocurra un suceso puede obtenerse restando a 1 la probabilidad de que ocurra su complemento.

Si agregamos a esto el supuesto de equiprobabilidad, es decir, que las probabilidades de cada uno de los resultados son iguales. Consideremos el experimento de lanzar un dado y registrar el número observado en su cara superior y sus resultados posibles 1,2, 3, 4, 5, o 6, podemos afirmar que todos los resultados son igualmente probables, puesto que al estar el dado equilibrado, no hay motivo para pensar que uno de ellos va a ocurrir más frecuentemente que los otros.

En efecto, si anotamos como "p" la probabilidad de obtener cada uno de los resultados de un dado, la primera afirmación dice que la probabilidad de ocurrencia de uno de ellos es:

$$p+p+p+p+p+p= 6p$$

La segunda afirmación dice que esta misma probabilidad debe ser igual a 1. Luego se cumple que: $6p =1$, es decir, $p = \frac{1}{6}$

En general, podemos decir que si los resultados del experimento aleatorio son equiprobables, la probabilidad de ocurrencia de cada uno de ellos corresponde a

$$\frac{1}{\textit{número de resultados posibles}}$$

Ahora bien, si al jugar con el dado tradicional de seis caras, nos interesa la probabilidad de que salga un número par 2 , 4 ó 6 y cada uno de éstos números tiene una probabilidad $\frac{1}{6}$ de ocurrir. Dado que una pareja de ellos no puede ocurrir al mismo tiempo, la probabilidad que salga 2, 4 ó 6 es la suma de cada uno de estos tres resultados por separado, es decir, corresponde a:

$$\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{3}{6}=0{,}5$$

De este modo en el numerador obtenemos el número de resultados que son favorables al suceso, mientras que en denominador obtenemos el número de resultados en el espacio muestral completo. En forma resumida , podemos decir que si los resultados de un espacio muestral son equiprobable, la probabilidad de ocurrencia de un suceso cualquiera asociado a dicho espacio muestral corresponde a :

$$\frac{\textit{número de resultados favorables al suceso}}{\textit{número de resultados posibles}}$$

Lo anterior se conoce como Regla de Laplace, este cálculo de probabilidad se reconoce también como el cálculo de probabilidad teórica de un evento A que utiliza la expresión:

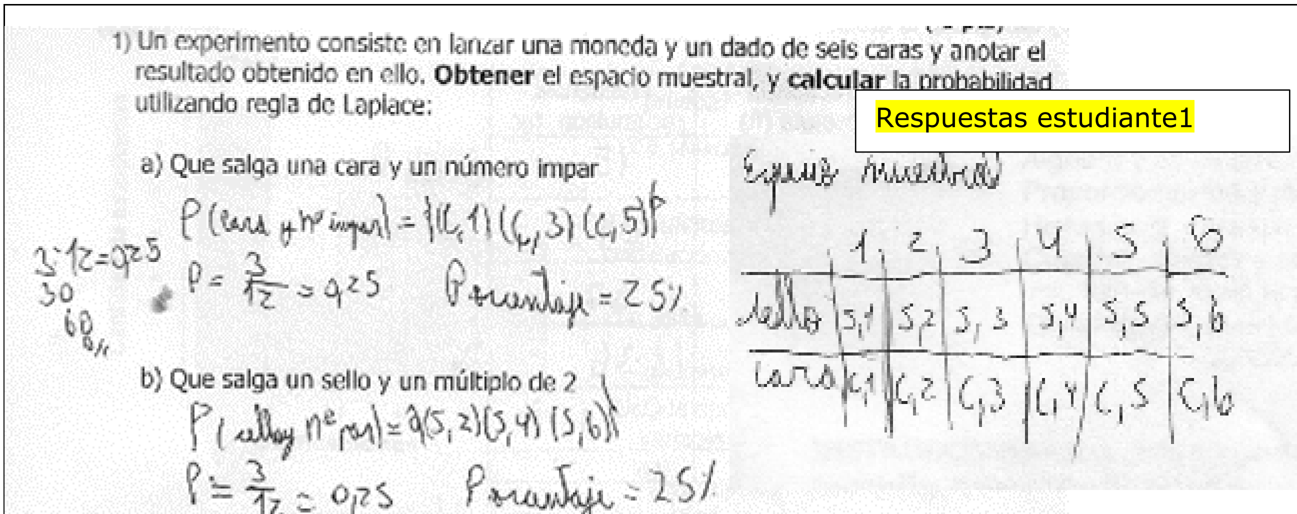
$$\mathrm{P(A)}=\frac{\textit{número casos favorables}}{\textit{número de casos posibles}}$$

La tarea consiste en plantear la forma de calcular probabilidades ligadas al espacio muestral obtenido, y en base a éste determinar el valor numérico correspondiente a un evento o suceso que ofrece una descripción de la **probabilidad** que adopta ciertos valores. Para trabajar con los estudiantes en estos conceptos se continúan planteando actividades ligadas a Q 1-1 ¿ Cómo cuantificar la incerteza a través de las probabilidades?.

En la Figura N° 38 se muestra ejemplos de posibles variable aleatorias, ligadas a un espacio muestral y al cálculo de la probabilidad de ellas mediante regla de Laplace, para recordar los conceptos de espacio muestral, evento o suceso y cálculo de probabilidad que se obtiene de ellos. Los estudiantes recuerdan entre ellos el proceso de cálculo de probabilidad aplicando de forma directa la regla de Laplace en cada una de las situaciones propuestas:

Regla de Laplace: P(evento o suceso) = $\dfrac{\textit{número de casos favorables}}{\textit{número de casos posibles}}$

La clase se inicia tomando el experimento de lanzar un dado tradicional de seis caras, numeradas del 1 al 6 y una moneda en donde claramente se reconoce cara y sello. El dado y la moneda se lanzan al mismo tiempo y se pide determinar espacio muestral del lanzamiento de un dados y la moneda y determinar o reconocer el evento o suceso y en base a esto calcular probabilidad mediante Regla de Laplace como se observa en la Figura N°38-A



Respuestas estudiante1

--

Figura 38- A. Respuesta de los estudiantes del cálculo de probabilidad ---------------------

--- Respuestas estudiante 2

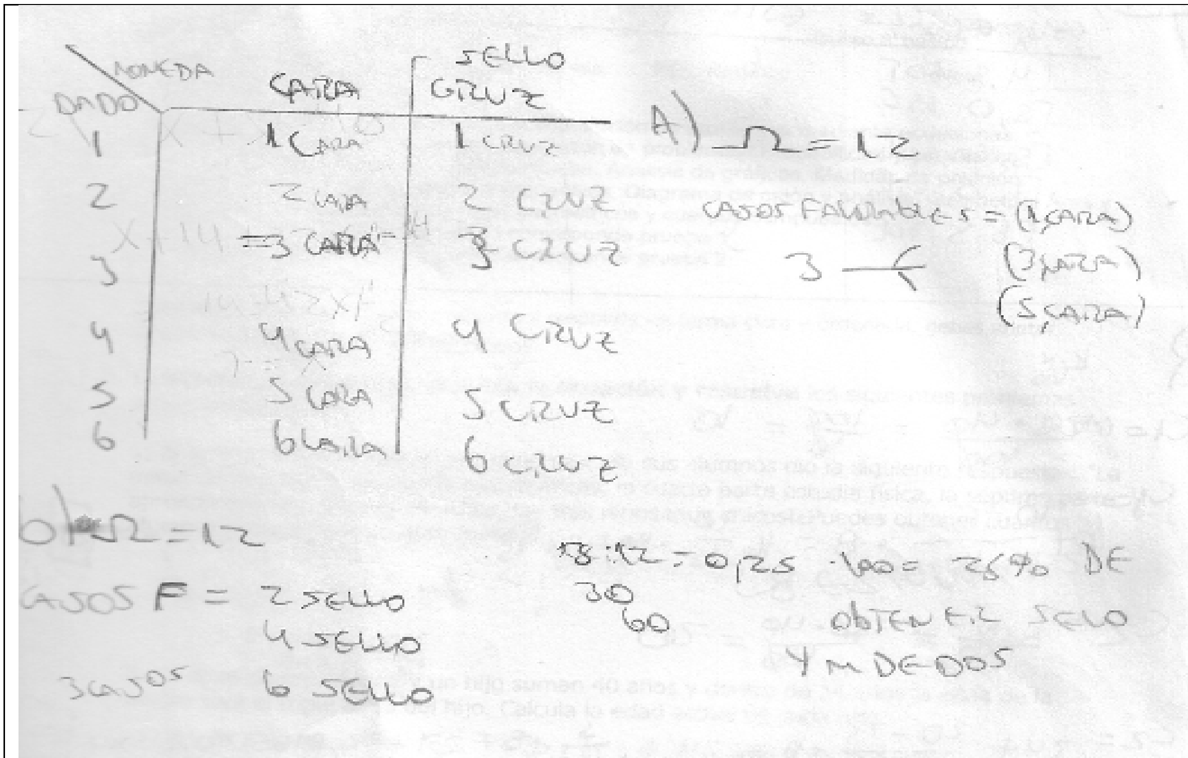
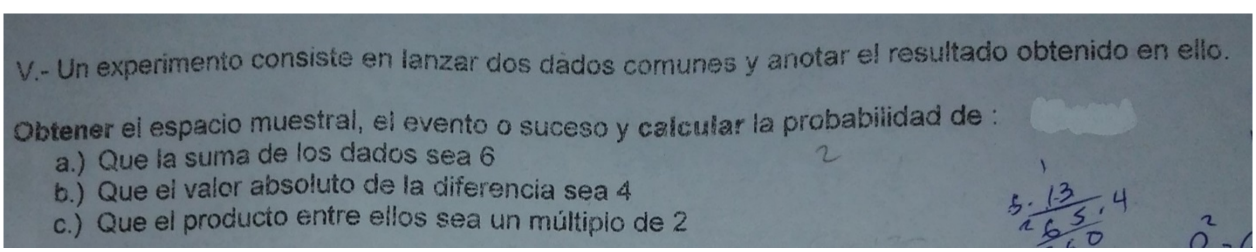


Figura N° 38.Experimento aleatorio. Lanzamiento de un dado tradicional de seis caras y una moneda

Luego, se vuelve al trabajo con dos dados tradicionales y su respectivo espacio muestral "Ω" de treinta y seis casos posibles y se solicita el cálculo de distintos eventos o sucesos, considerando que un evento o suceso es un subconjunto del espacio muestral que cumple con las condiciones del experimento aleatorio que se realiza. Un resultado es "favorable" a un suceso o evento cuando observar este resultado implica la ocurrencia del suceso o evento.


V.- Un experimento consiste en lanzar dos dados comunes y anotar el resultado obtenido en ello.

Obtener el espacio muestral, el evento o suceso y **calcular** la probabilidad de :

a.) Que la suma de los dados sea 6

b.) Que el valor absoluto de la diferencia sea 4

c.) Que el producto entre ellos sea un múltiplo de 2

Figura N° 39.Ejemplos de evento o suceso en el cálculo de probabilidades

Continuando con las actividades con dados se plantean distintos tipos de eventos o sucesos como muestra la figura N° 39, en los cuales los estudiantes navegan en su tabla de ordenamiento de posibles resultados escritos en forma de par ordenado que conforman el espacio muestral y asumen que cada uno de esos eventos o sucesos son un subconjunto del Espacio Muestral y marcan en su tabla con lápices de colores o bien encerrando en una cuerda lo solicitado, para luego realizar el conteo de datos para luego aplicar de manera directa la Regla de Laplace, como se muestra a continuación en la Figura N° 40:

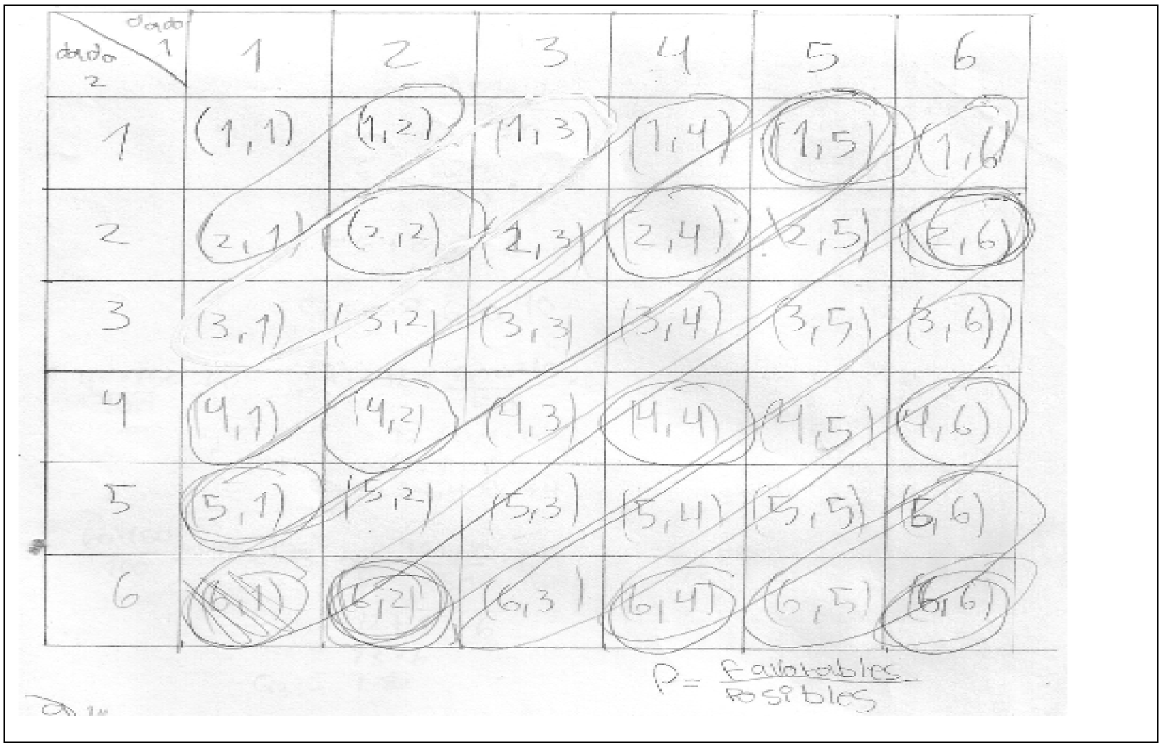


Figura N° 40.Marca de eventos o sucesos como subconjunto del espacio muestral.

Se presenta distintas situaciones que corresponden a los eventos o sucesos en donde los estudiantes calculan con ayuda del Espacio Muestral Ω desarrollado en la tabla de doble entrada que detalla los treinta y seis casos posibles del experimento aleatorio "lanzar en forma simúltanea dos dados ". En la tabla se escriben los números obtenidos en la cara superior de ambos dados, en forma de par ordenado y luego marcan en ella los subconjuntos solicitados para lugar aplicar Regla de Laplace. Se le solicita por ejemplo las siguientes actividades en donde los estudiantes reconocen el evento o suceso y calculan la probabilidad:

<u>Actividad 1</u>: obtener la probabilidad que la suma de los números obtenidos en el lanzamiento de dos dados sea 6.

Actividad 2: obtener la probabilidad que el valor absoluto de la diferencia de los números obtenidos en el lanzamiento de dos dados sea 4

Actividad 3 : obtener la probabilidad que el producto de los números obtenidos en el lanzamiento de dos dados sea un múltiplo de dos.

En la Figura N° 41 y 42 se muestra evidencia del procedimiento realizado por los estudiantes para culminar con la tarea asignada, en donde se observa las notas realizadas, las marcas y formas de destacar en el Espacio Muestral escrito con anterioridad ,junto a ello los cálculos obtenidos con la aplicación directa de la regla de Laplace.

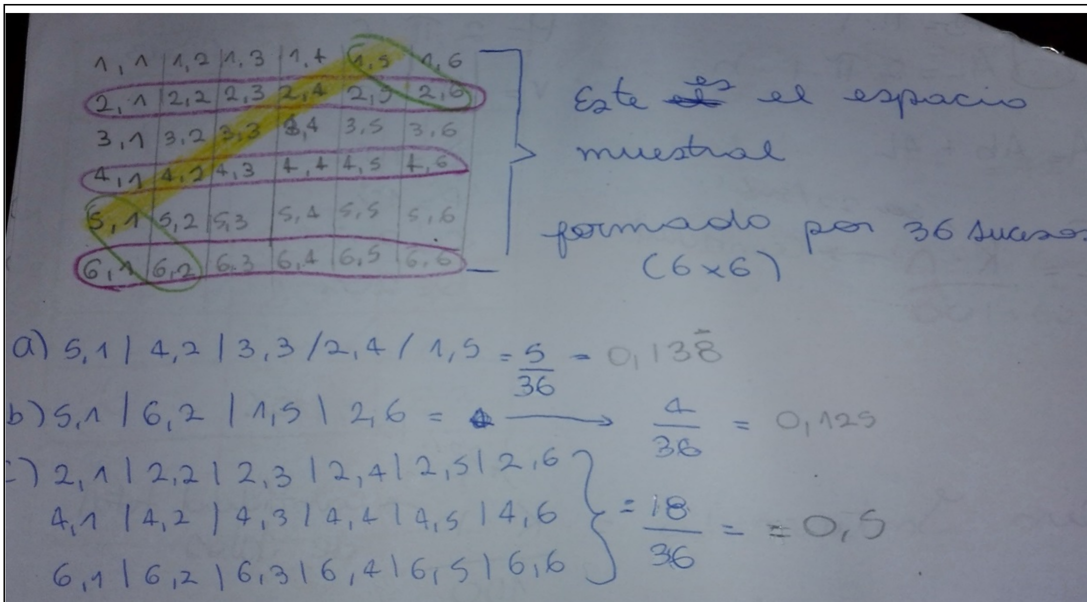


Figura N° 41.ESTUDIANTE 1 con el desarrollo del Espacio Muestral, evento o suceso y cálculo de Probabilidad

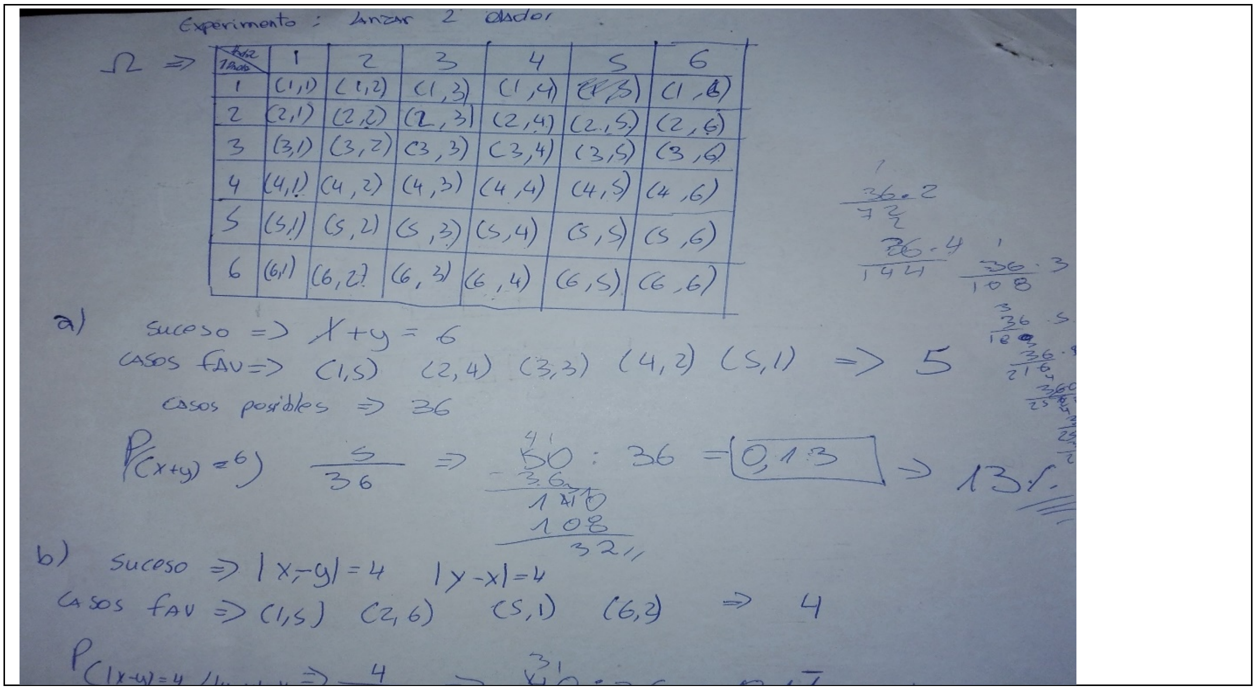


Figura N° 42.ESTUDIANTE 2 con el desarrollo del espacio muestral, evento o suceso y cálculo de la probabilidad.

4.1.6.DESCRIPCIÓN DE LAS CLASES. Clase 6. EXPERIMENTO ALEATORIO. ESPACIO MUESTRAL. EVENTO O SUCESO Y SU OCURRENCIA. VARIABLE ALEATORIA. VALORES ASIGNADOS A LA VARIABLE ALEATORIA.

Luego de realizado el trabajo con los dos dados se propone conectar los conceptos de experimento aleatorio, espacio muestral, evento o suceso con el concepto de variable aleatoria al realizar el juego de “Pepito paga doble”. Se propone a los estudiantes el Juego de Pepito paga doble, para ello se entrega un set que contiene el Juego de Pepito paga doble y dos dados como se muestra en la Figura N° 43:

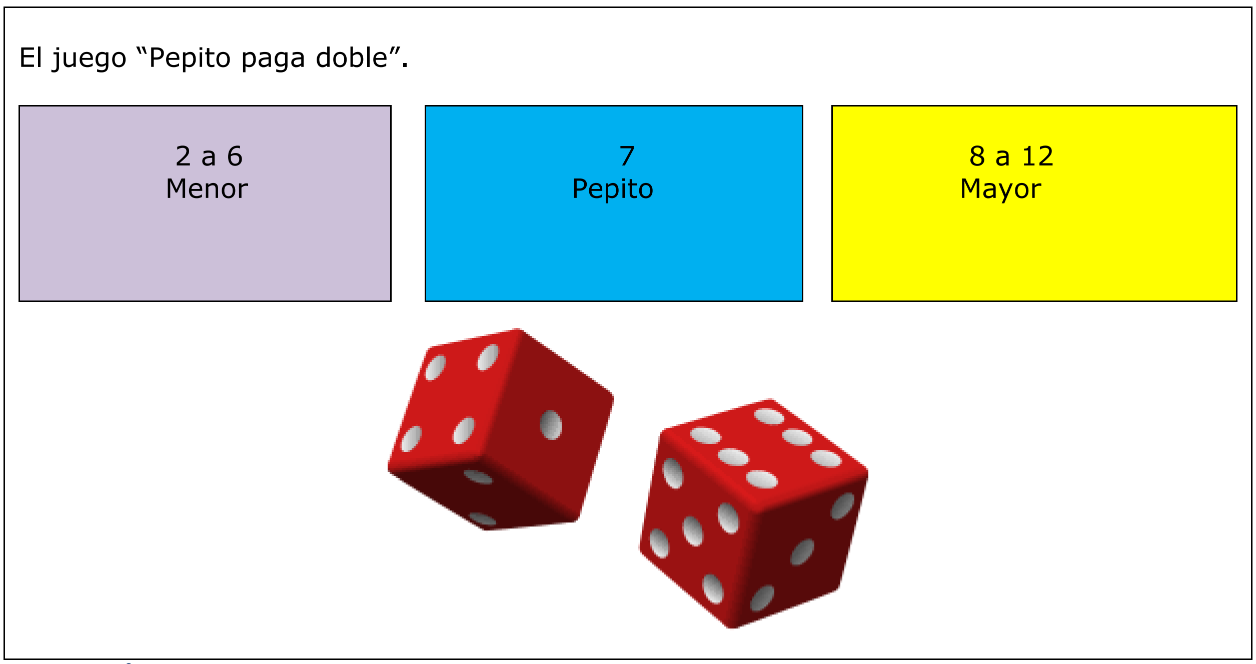


Figura N° 43.”Set del Juego Pepito paga doble"

Se inicia la clase realizando la conexión con probabilidad, en base a las OM dando énfasis en la tarea (t1) y actividades ligadas al trabajo en experimento aleatorio y variable aleatoria.

Las actividades a realizar en esta sexta sesión, continúan con el esquema de la pregunta generatriz ”Como la estadística, la probabilidad, el azar influye y ayuda en la interpretación de información en nuestro quehacer cotidiano” y en esta clase se busca el encuentro con probabilidad, azar y la incertidumbre en base a la subpregunta generatriz ¿De qué manera se puede asignar Probabilidad a un experimento aleatorio? Como se muestra en la figura N° 44 la intención es conectar con los conceptos trabajados que son ya parte del quehacer y del lenguaje de los estudiantes con la introducción del concepto de variable aleatoria y los valores asignados a ésta:

Q_0 : ¿Cómo la estadística, la probabilidad , el azar influye y ayuda en la interpretación de información en nuestro quehacer cotidiano?

Q5-5: ¿ Cuál es la variable aleatoria que define la función de probabilidad ?

$t_{(5\text{-}5),1}$: Juguemos con dados."Pepito gana doble" Experimento aleatorio. Evento o suceso y su ocurrencia. Espacio muestral. Asignación de Probabilidades.

$t_{(5\text{-}5),2}$:Introducción a variable aleatoria. Asignación de valores a la variable aleatoria.

Figura N° 44.Esquema dispositivo didáctico. Probabilidad

Las respectivas organizaciones matemáticas que corresponden a esta etapa son:

- OM: Experimento Aleatorio
- OM: Espacio muestral de un experimento.
- OM: Probabilidad de un evento o suceso.
- OM: Variable Aleatoria.
- 0M: Valores asignados a la variable aleatoria
- OM:Introducción a la Función de Probabilidad

A los estudiantes se les propone la tarea1"$t_{(5\text{-}5),1}$",para dar inicio al trabajo con la sub-.pregunta Q5-5 ¿ Cuál es la variable aleatoria que define la función de probabilidad ?. Esta tarea consiste en tomar un tablero de color y un par de dados para realizar el Juego " Pepito paga doble", los estudiantes se reunirán en los grupos previamente formados y realizaran el juego dentro del mismo grupo de dos en dos estudiantes, las instrucciones del juego se ilustran a continuación en la figura N° 45:

UNIVERSIDAD CATÓLICA
DE LA SANTÍSIMA CONCEPCIÓN.
FACULTAD DE EDUCACIÓN

GUÍA DE TRABAJO
ACTIVIDAD DE AULA
¿VAMOS A JUGAR CON DADOS?
INTRODUCCIÓN A VARIABLE ALEATORIA

El juego "Pepito paga doble".

Consiste en un tablero dividido en tres partes como se muestra en la figura N°:

2 a 6 Menor	7 Pepito	8 a 12 Mayor

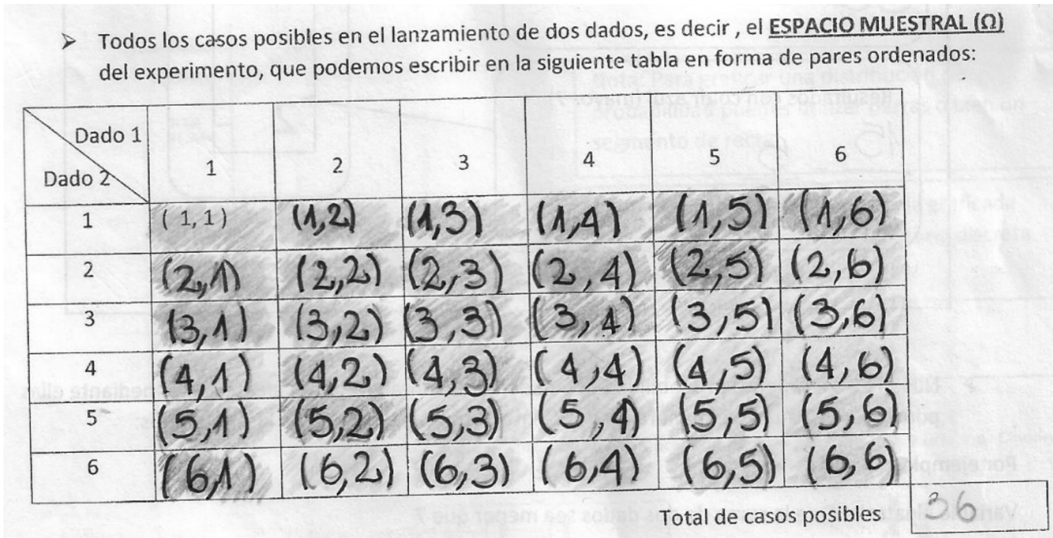
Se pide a los jugadores que apuesten al resultado que saldrá al sumar los números que se obtienen al lanzar dos dados, y los jugadores ponen sus apuestas en los distintos sectores del tablero.
Si sale un número de 2 a 6, quienes apostaron menor reciben un monto igual al apostado;
Si sale un número de 8 a12 apostaron mayor también reciben un monto igual al apostado;
Si sale 7 (Pepito), los que apostaron allí reciben el doble de lo apostado.

¿Cuál será la probabilidad de ganar en cada caso?

Para responder debemos recordar ¿Qué es un experimento aleatorio?¿Cuál es el espacio muestral? ¿Cómo se determina el evento o suceso? ¿Cómo calcular probabilidad?

Figura N° 45.Instrucciones entregadas para realizar el Juego de "Pepito paga doble"

Después de planteada la interrogante, los estudiantes conjeturan sobre los posibles resultados y realizan sus apuestas, para luego recordar que este juego es un experimento aleatorio en el cual su resultado no es predecible de antemano. Luego se entrega una tabla donde los estudiantes completan en forma de par ordenado los posibles resultados que pueden obtener al lanzar los dados como se muestra en la figura N° 46:



➢ Todos los casos posibles en el lanzamiento de dos dados, es decir , el **ESPACIO MUESTRAL (Ω)** del experimento, que podemos escribir en la siguiente tabla en forma de pares ordenados:

Dado 2 \ Dado 1	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

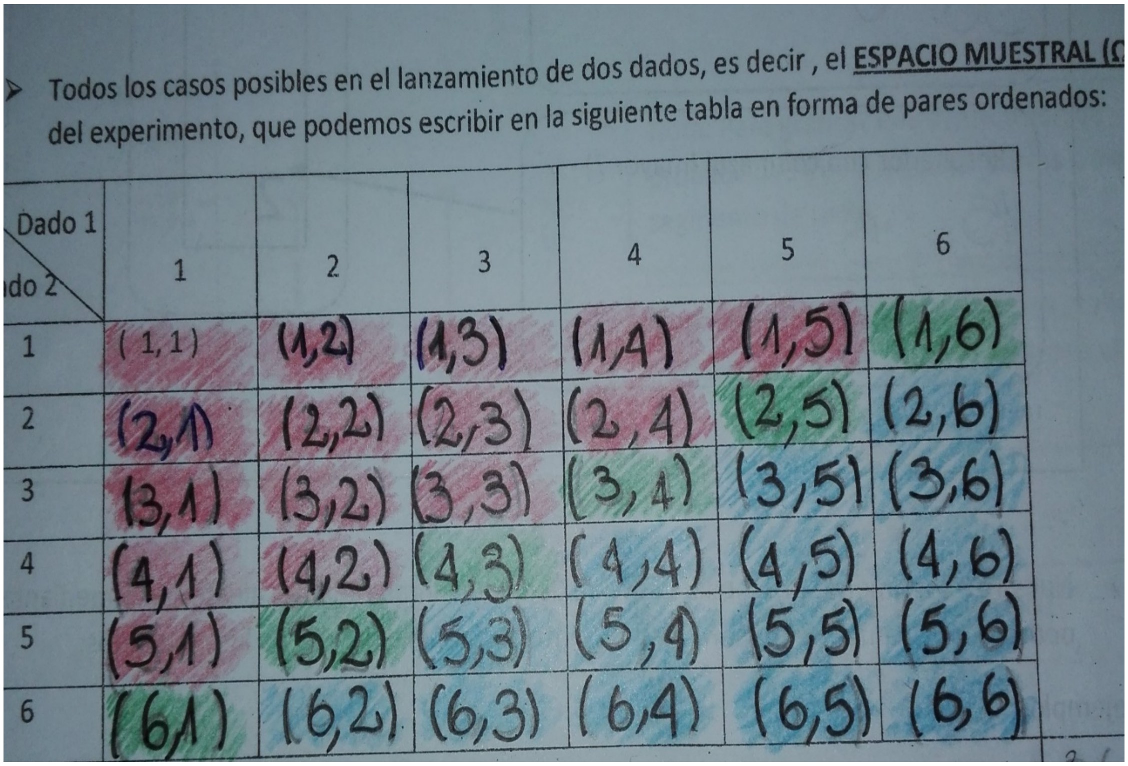
Total de casos posibles 36

Figura N° 46.Espacio muestral dos dados

En el juego de “Pepito paga Doble” lo que nos interesa es saber la suma de los valores obtenidos en los dados, concretamente, si el número obtenido es menor que 7, igual a 7 o mayor que 7. Para ello se solicita a los estudiantes que utilicen colores de la siguiente manera:

- Marcar con rojo aquellas casillas en las cuáles se cumpla que la suma sea menor que 7.
- Marcar con verde las casillas en las cuáles se cumpla que la suma sea igual a 7.
- Marcar con azul aquellas casillas en las cuáles se cumpla que la suma sea mayor que 7.

En la figura N° 47 muestra como los estudiantes después de completar en una tabla los posibles resultados marcan con color la tabla construida obteniendo los resultados que se ilustran a continuación:



➢ Todos los casos posibles en el lanzamiento de dos dados, es decir , el **ESPACIO MUESTRAL (** del experimento, que podemos escribir en la siguiente tabla en forma de pares ordenados:

Dado 1 / ...do 2	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

Figura N° 47 Utilizar color para demarcar posibles resultados de interés

Luego de reconocido el espacio muestral se realizan sucesivas interrogantes referidas a los resultados que deseamos obtener en el juego "Pepito paga doble" y se comienza a generar el concepto de variable aleatoria. Después de planteada la interrogante, los estudiantes conjeturan sobre los posibles resultados y realizan sus apuestas, para luego recordar que este juego es un experimento aleatorio en el cual su resultado no es predecible de antemano. Luego se entrega una tabla donde los estudiantes se le solicitan tres sub-tareas de la forma $t^{j}_{(5-5),1}$ que complemetaran el trabajo para alcanzar las técnicas necesarias que posee el estudiante o bien las técnicas institucionalizadas para obtener respuestas que favorezcan la construcción de una respuesta para Q_0 con apoyo de las sub-preguntas con sus respectivas respuestas de la forma Q^{j}_{i} .

Con $t^{1}_{(5-5),1}$, $t^{2}_{(5-5),1}$, $t^{3}_{(5-5),1}$ se busca poner a prueba las técnicas que posee el estudiante o las técnicas institucionalizadas que favorezcan las respuestas para la sub-interrogante Q5-5 que tributa a la construcción de una respuesta a Q_0, de acuerdo a las siguientes instrucciones entregadas a los grupos de trabajo conformados con anterioridad:

$t^{1}_{(5-5),1}$: Completar la tabla con los posibles resultados al realizar el lanzamiento dos dados y escribir éstos en forma de par ordenado.

$t^{2}_{(5-5),1}$: Determinar y pintar de acuerdo a las siguientes consignas obtenidas por acuerdo grupal para demarcar la suma de los valores obtenidos en los dados, concretamente, si el número obtenido es menor que 7, igual a 7 o mayor que 7.

- Marcar con rojo aquellas casillas en las cuáles se cumpla que la suma sea menor que 7.
- Marcar con verde las casillas en las cuáles se cumpla que la suma sea igual a 7.
- Marcar con azul aquellas casillas en las cuáles se cumpla que la suma sea mayor que 7.

$t^{3}_{(5-5),1}$: Calcular la probabilidad que corresponde a que la suma de los dos dados sea menor que 7, igual a 7 y mayor que 7.

Al resumir esta información del lanzamiento de dos dados en forma de par ordenado y los posibles resultados que pueden obtener al lanzar los dados se obtienen tablas como se muestra en la Figura N° 49:

	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

Espacio muestral y demarcación con colores del recorrido de la v.aleatoria

Figura N° 48 Reconoce espacio muestral y demarca la variable aleatoria

Con los resultados de la suma de dos dados obtenidos de la tarea asignada $t^{3}_{(5-5),1}$ se construye en pizarrón y cuaderno los cálculos de la probabilidad mediante Regla de Laplace y la interpretación de éstos cálculos los cuales se muestran de manera resumida :

Resultados con color rojo (menor a 7)

$$P(menor\ a\ 7) = \frac{15}{36} = \frac{5}{12}$$

Hay 15 casos que dan un número menor de 7, de 36 casos totales

Resultados con color verde (igual a 7)

$$P(igual\ a\ 7) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

Hay 6 casos que dan exactamente 7, de 36 casos de 36 casos totales.

Resultados con color azul (mayor a 7)

$$P(mayor\ a\ 7) = \frac{15}{36} = \frac{5}{12}$$

Hay 15 casos que dan un número menor de 7, de 36 casos totales.

En numerosas ocasiones podemos estar más interesados en un resumen numérico, asociado al experimento aleatorio que pretendemos estudiar, que en la estructura probabilística asociada al espacio muestral de dicho experimento. Así el objetivo en este tema es introducir una herramienta para cuantificar los resultados de un experimento aleatorio, para ello definimos una función del espacio muestral Ω en $\Re$ que será desarrollada con actividades que determinan la tarea asignada en $t_{(5-5),2}$ que consiste en trabajar las OM relacionadas con la introducción a variable aleatoria y la asignación de valores a la variable aleatoria. De esta manera la OM de esta sesión se encuentra representada por el tipo de tareas $t_{(5-5),2}$ que se compone de dos sub-tareas de la forma $t^{j}_{(5-5),2}$ que comparten ciertas características, que presentan leves diferencias que nos llevan a distinguirlas:

$t^{1}_{(5-5),2}$: Reconocer una Variable Aleatoria, su definición y los valores asignados a ella.

$t^{2}_{(5-5),2}$: Determinar la Función de Probabilidad que asigna probabilidades a los valores de la Variable Aleatoria.

Para trabajar esta sesión, en particular el estudio de tareas que compone a las OM con sus respectivas sub-tareas $t^{1}_{(5-5),2}$ y $t^{2}_{(5-5),2}$ basada en la definición de Variable Aleatoria *X* como la función que, a cada suceso del espacio muestral (Ω) asociado a un experimento aleatorio, le asignamos um único número Real:

$$X: \Omega \rightarrow \Re$$

El conjunto de las imágenes de la variable aleatoria se llama recorrido y contiene todos los valores posibles de la variable y lo denotaremos por R_x.

Para dar respuesta a la sub-pregunta $Q_{5\text{-}5}$*:. ¿Cuál es la variable aleatoria que define la función de probabilidad?* y reencontrarnos con las OM necesarias los estudiantes construyen en cuaderno y pizarrón de forma esquemática el Espacio Muestral y los valores asignados a la variable aleatoria que se ilustran en la Figura N°50:

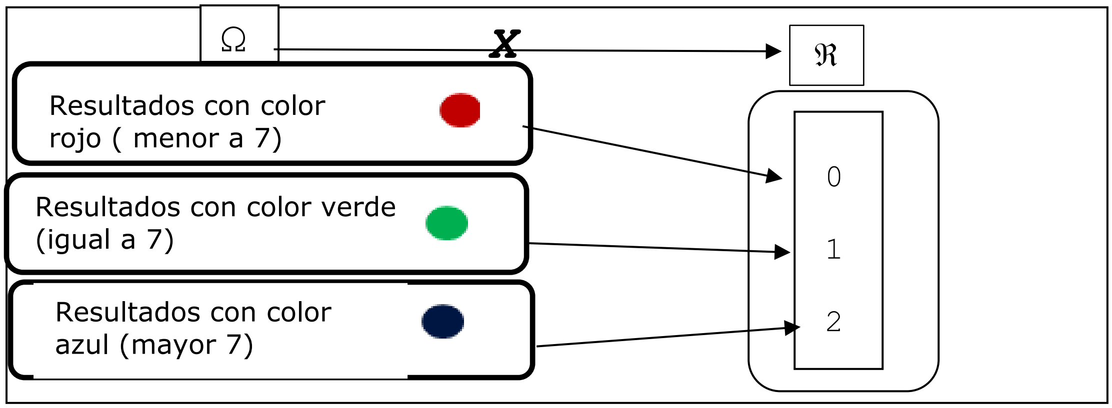


Figura N° 49.Variable aleatoria con la asignación de valores.

Concretamente en este juego "Pepito paga doble", si el número obtenido es menor que 7, igual a 7 o mayor que 7. Para ello podemos asignar valores, en este caso 0 a que salga menor, 1 a Pepito y 2 al mayor. De esta manera definimos el conjunto R_X como el recorrido o rango de la variable aleatoria *X*, como el conjunto de todos los posibles valores que puede tomar *X*. En la Figura N°51 se observa como los estudiantes reconocen el espacio muestral la variable aleatoria y los valores asignados a ésta como el recorrido R_x.

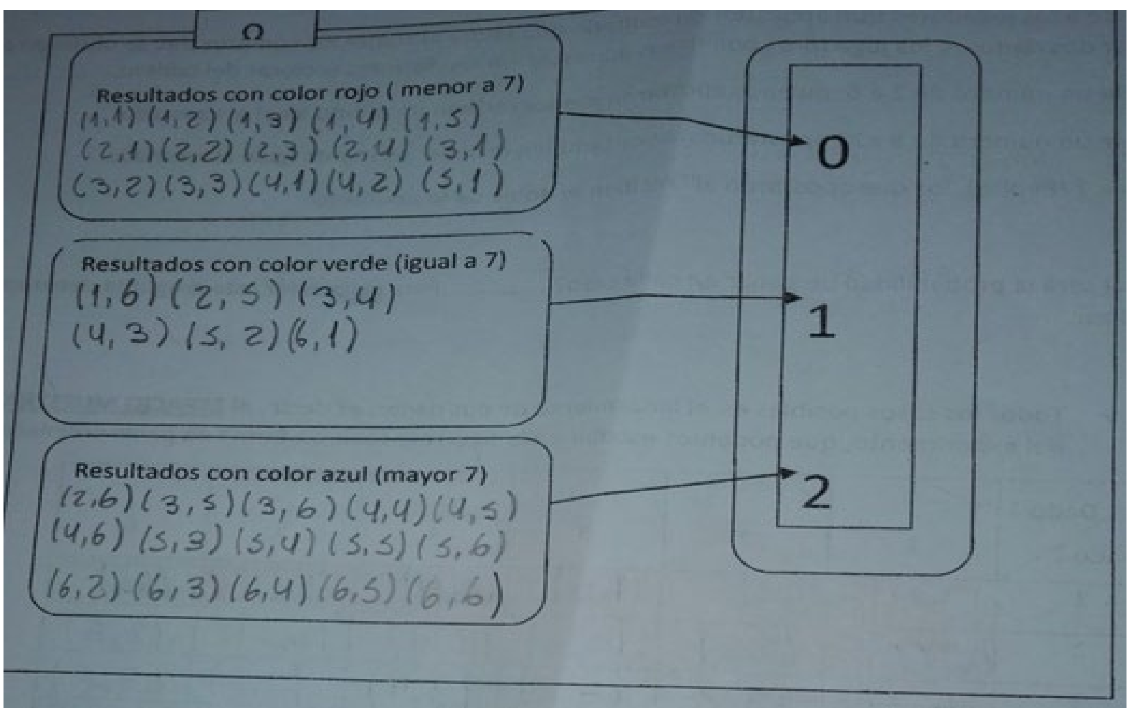


Figura N° 50. Variable aleatoria y asignación de valores

Para concluir la tarea $t^{1}_{(5-5),2}$ debemos clarificar los resultados de este **EXPERIMENTO de probabilidad "lanzamiento de dos dados"** y sus resultados representados por los colores rojo, verde y azul y observar detenidamente nuestro espacio muestral para realizar la correspondencia entre el espacio muestral y los valores assignados a la variable aleatoria, los cuales se pueden representar de la siguiente manera:

Ω = {(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (3,1), (3,2), (3,3), (4,1), (4,2), (5,1), (1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1), (2,6), (3,5), (3,6), (4,4), (4,5), (4,6), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6)}

Luego nuestra variable aleatoria *X* y los valores asignados a ella lo podemos representar:

- X((1,1))=0, X((1,2))=0, X((1,3))=0, X((1,4))=0, X((1,5))=0, X((2,1))=0, X((2,2))=0, X((2,3))=0, X((2,4))=0, X((3,1))=0, X((3,2))=0, X((3,3))=0, X((4,1))=0, X((4,2))=0, X((5,1))=0
- X((1,6))=1, X((2,5))=1, X((3,4))=1, X((4,3))=1, X((5,2))=1, X((6,1))=1
- X((2,6))=2, X((3,5))=2, X((3,6))=2, X((4,4))=2, X((4,5))=2, X((4,6))=2 , X((5,3))=2 , X((5,4))=2, X((5,5)=2, X((5,6))=2, X((6,2))=2, X((6,3))=2, X((6,4))=2, X((6,5))=2, X((6,6))=2

Por tanto el Recorrido o Rango de la variable aleatoria es:

$$X: \Omega \rightarrow \Re \quad , \quad R_x = \{ 0,1,2 \}$$

En la tarea $t^{2}_{(5-5),2}$, se debe realizar la articulación entre variable aleatoria, valor asignado a la variable aleatoria y función de probabilidad.

Una función de probabilidad realiza la correspondencia entre cada valor del recorrido de la variable aleatoria R_x con la probabilidad de ocurrencia, esto es, al ser *X* una variable aleatoria se define y denota la función de probabilidad de la variable aleatoria *X* mediante la siguiente la siguiente expresión: $f(x) : \Re \rightarrow [0,1]$

$$f(x) = P(X=x), \ \forall x \in R_x$$

Los estudiantes realizan por tanto los cálculos de la probabilidad asociada al experimento aleatorio del lanzamiento de dos dados en el juego de "Pepito paga doble" y obtienen los siguientes resultados:

- La probabilidad de ganar apostando a menor es $\frac{5}{12}$, es decir P(x=0)= $\frac{5}{12}$

- La probabilidad de ganar apostando a Pepito es $\frac{1}{6}$, es decir P(x=1)= $\frac{1}{6}$
- La probabilidad de ganar apostando a mayor es $\frac{5}{12}$, es decir P(x=2)= $\frac{5}{12}$

Luego, completan el siguiente esquema como se muestra en la Figura N°52 después de que los estudiantes conjeturan y calculan en sus grupos de trabajo la probabilidad de ocurrencia de apostar a "menor", a "Pepito" o apostando a "mayor" y relacionan com la variable aleatoria y valor asignado a ésta:

Con esta última actividad para compartir reflexiones y resultados de manera grupal en forma de asamblea participativa dirigida por un interlocutor que en este caso es la profesora, finaliza la tarea $t^{2}_{(5-5),2}$. Finalmente se puede obtener una respuesta para $Q_{5\text{-}5}$ elaborada a partir de R^{1}_{1}, R^{1}_{2} conectando los resultados obtenidos en $t^{1}_{(5-5),2}$ y $t^{2}_{(5-5),2}$.

Frente a este desafío de articulación de nuevos conceptos los estudiantes llegan a algunas conclusiones como la que se muestra en la figura N° 52:

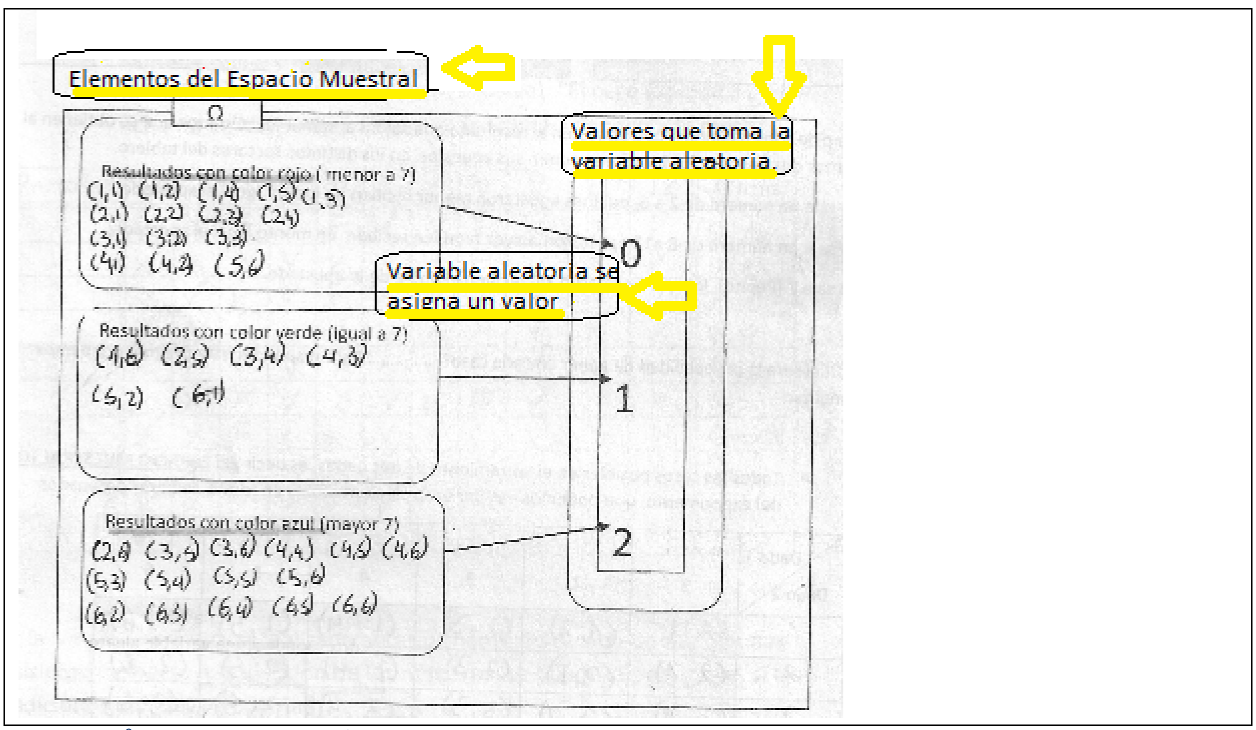


Figura N° 51.Articulación de conceptos para llegar a conceptualizar variable aleatoria.

De esta manera podemos escribir:

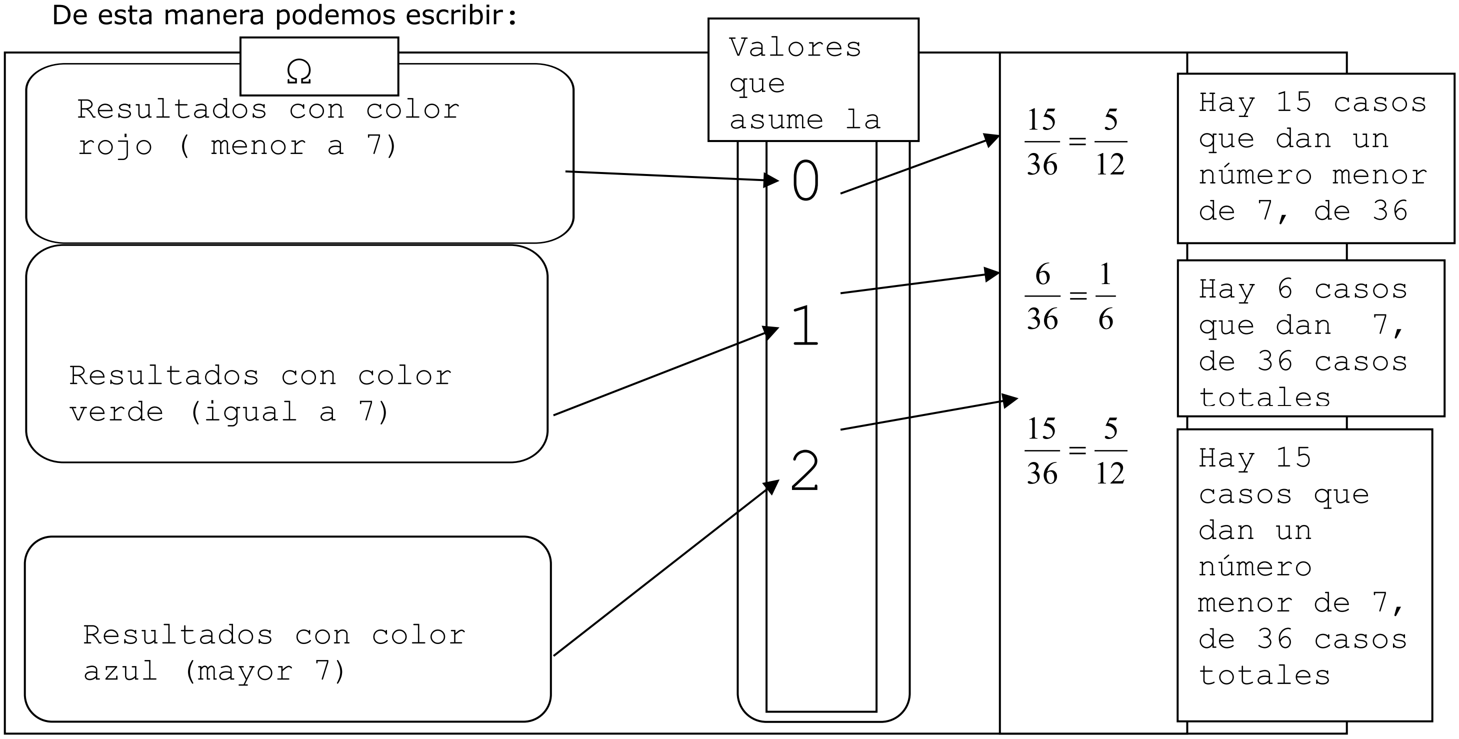


Figura N° 52. Articulación variable aleatoria con la correspondencia del valor de la variable y la distribución de probabilidad que le corresponde.

- Luego podemos afirmar, como indica la figura N° 52, que:
  - La probabilidad de ganar apostando a menor es $\frac{5}{12}$, es decir P(x=0)= $\frac{5}{12}$
  - La probabilidad de ganar apostando a Pepito es $\frac{1}{6}$, es decir P(x=1)= $\frac{1}{6}$
  - La probabilidad de ganar apostando a mayor es $\frac{5}{12}$, es decir P(x=2)= $\frac{5}{12}$

Estas conclusiones se logran después de que los estudiantes calculan en sus grupos de trabajo la probabilidad de ocurrencia de apostar a “menor”, a “Pepito” o apostando a “mayor” mediante cálculo directo con Regla de Laplace, como se muestra en la figura N° 53:

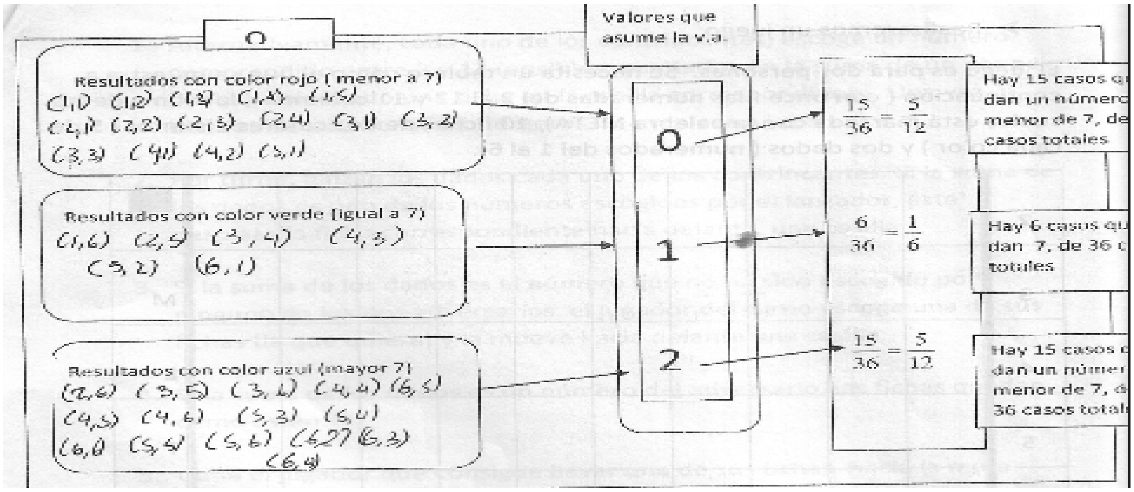


Figura N° 53.Asignación de valores a la variable aleatoria con su correspondencia en la distribución de la probabilidad

Luego de realizado el trabajo con los dos dados se propone conectar los conceptos de experimento aleatorio, espacio muestral y variable aleatoria al realizar un juego con tres monedas y se muestra una última actividad para compartir reflexiones y resultados de manera grupal en forma de asamblea participativa dirigida por un interlocutor que en este caso es la profesora :

Actividad 4 : Juan lanza en varia ocasiones tres monedas al aire y se dedica a anotar cuantas caras va obteniendo. ¿cuál es el experimento aleatorio?¿ cómo queda determinada la variable aleatoria? Y ¿cuál es el espacio muestral?

Luego de obtenidas las respuestas se muestra es siguiente esquema, que ilustra el experimento aleatorio “lanzar tres monedas al aire” junto a la variable aleatoria X=”cantidad de caras que se obtienen” y con ellos los valores que toma la variable como se ilustra en la siguiente figura N° 54, en donde discuten y realizan algunos diagrama de árbol y comparan con el trabajo con dados.

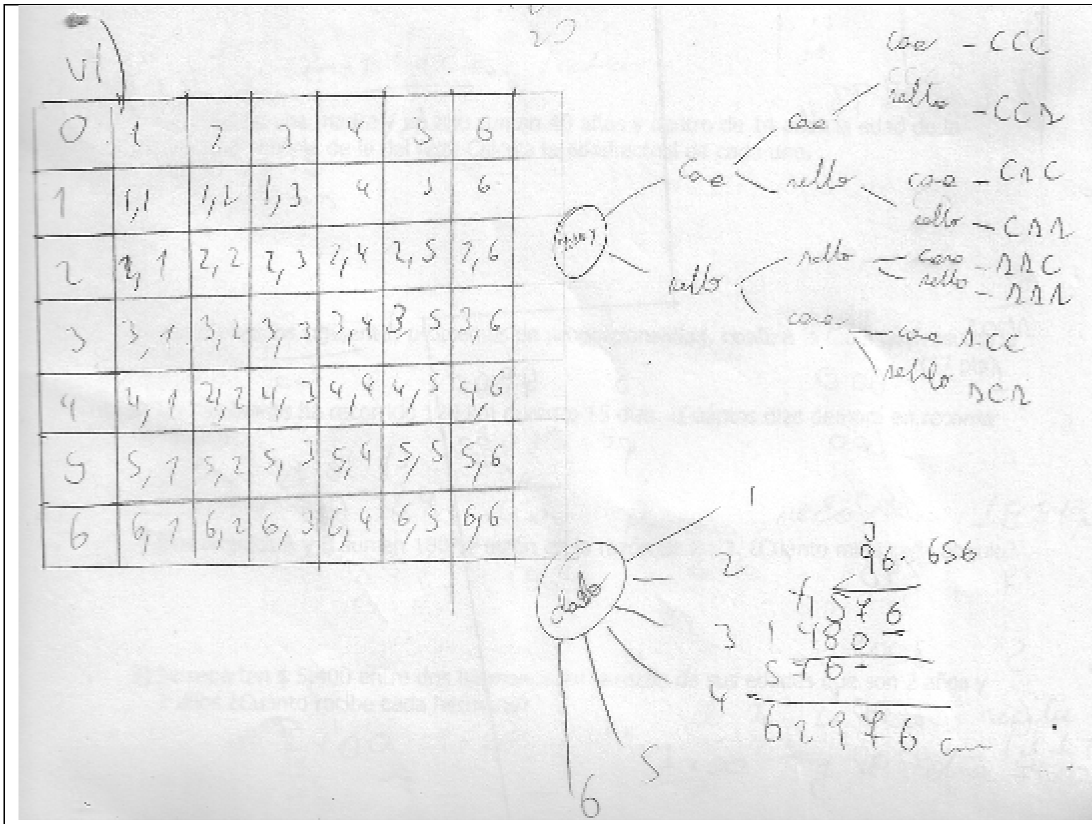


Figura N° 54.Organización del espacio muestral mediante tabla y diagramas de árbol. Lanzamiento de monedas y juego de dados.

Luego de realizados algunos esquemas se pide asignar valores a la variable aleatoria en nuestro experimento probabilidad "lanzar tres monedas al aire" se puede definir distintas variables aleatorias y mediante ellas podremos visualizar de manera más eficiente el comportamiento de los resultados, como por ejemplo:

Variable aleatoria: En las tres monedas no se obtenga cara. Obtener cero caras

Variable aleatoria: En las tres monedas una sola sea de ellas obtenga cara. Obtener una cara.

Variable aleatoria: En las tres monedas dos de ellas se obtenga cara. Obtener dos caras.

Variable aleatoria: En las tres monedas las tres obtengan cara. Obtener tres caras.

Luego la variable asume los siguientes valores:

- El valor "0" al lanzar tres monedas al aire y obtener cero caras o bien no obtener caras.
- El valor "1" al lanzar tres monedas al aire y obtener una cara
- El valor "2" al lanzar tres monedas al aire y obtener dos caras
- El valor "3" al lanzar tres monedas al aire y obtener tres caras o bien todas caras.

Se realiza un esquema colaborativo en el pizarrón con estudiantes de cada grupo y se completa en pizarrón con material preparado por la profesora el esquema que se ilustra en la figura N° 55, en donde con óvalos de color y flechas se enlazan los valores asignados a la variable, como se muestra a continuación:

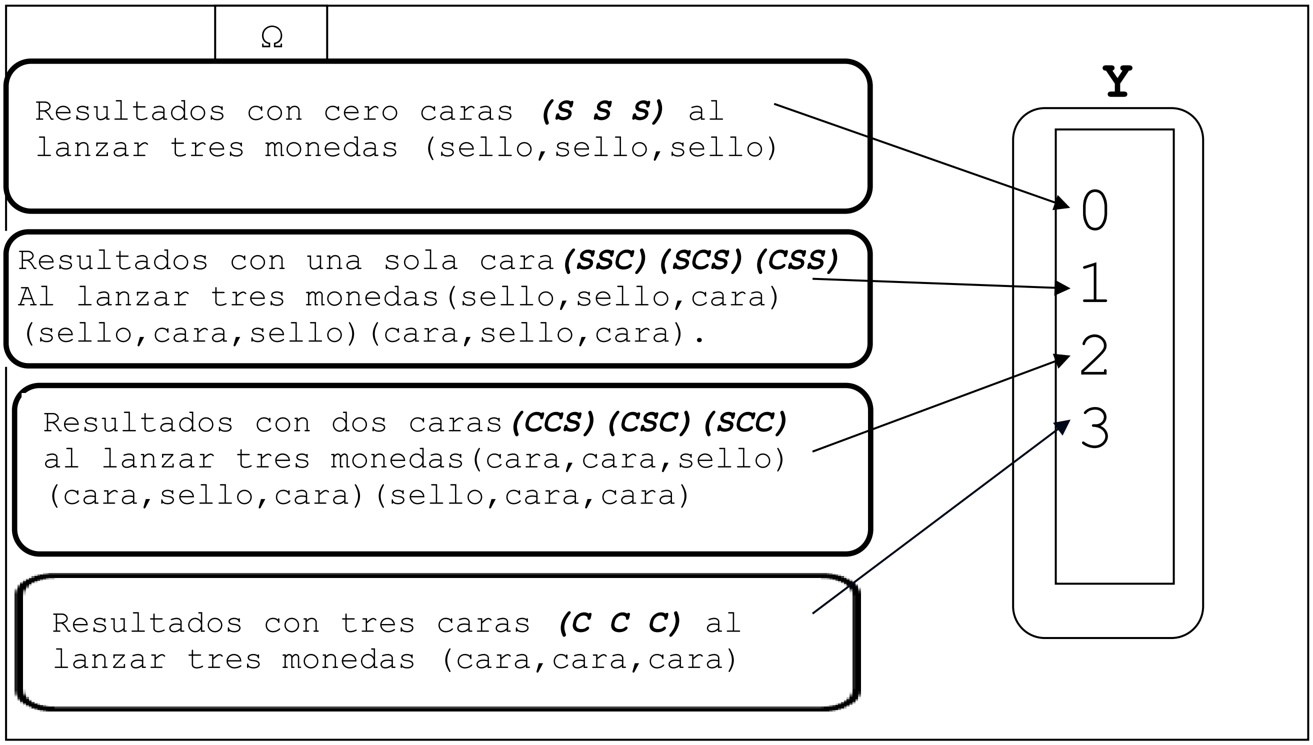


Figura N° 55.Asignación de valores para la variable aleatoria.

Los elementos del espacio muestral al lanzar 3 monedas al aire tributan a la variable aleatoria para luego asignar un valor a la variable aleatoria, que en este caso se observa en base a colores según la posición en la que cae la moneda:

La primera moneda se representa de color azul, la segunda moneda de color verde, y la tercera moneda se representa de color amarillo, de esta manera tenemos:

<u>VARIABLE ALEATORIA</u>: Obtener cara en el lanzamiento de tres monedas

1°lanzamiento: (C C C) le corresponde el valor "3"
2°lanzamiento: (C C S) le corresponde el valor "2"
3°lanzamiento: (C S C) le corresponde el valor "2"
4°lanzamiento: (S C C) le corresponde el valor "2"
5°lanzamiento: (S S C) le corresponde el valor "1"
6°lanzamiento: (S C S) le corresponde el valor "1"
7°lanzamiento: (C S S) le corresponde el valor "1"
8°lanzamiento: (S S S) le corresponde el valor "0"

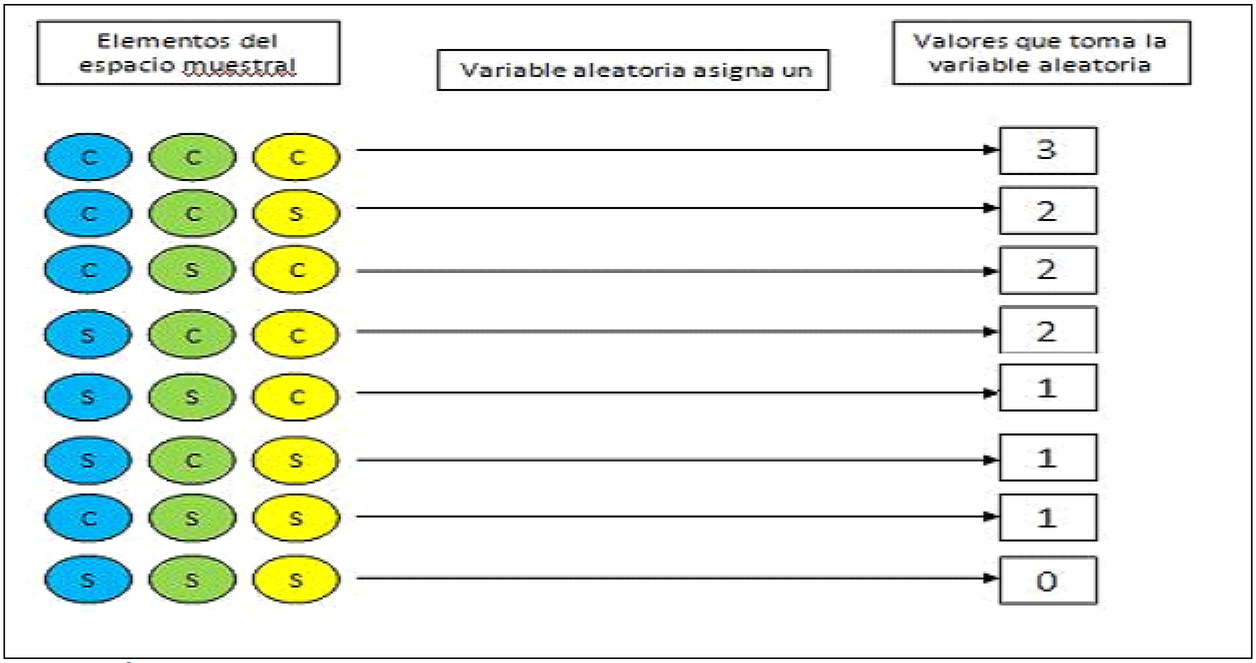


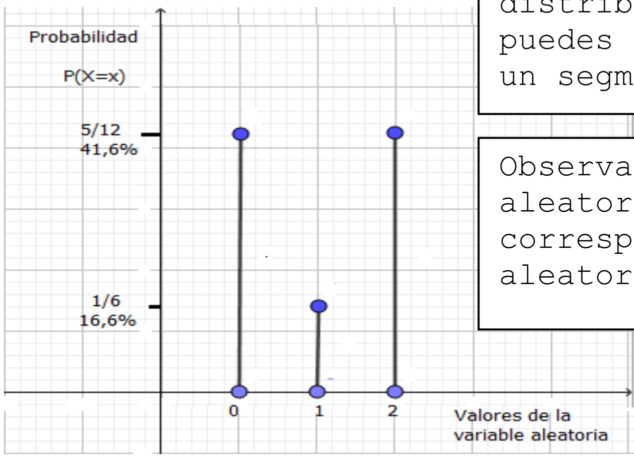
Figura N° 56.Exprimento aleatorio "lanzamiento de tres monedas al aire" con el desarrollo de la variable aleatoria y los valores que se le asignan a ésta.
FUENTE.EDUCAR CHILE.Fichas Temáticas.

Para terminar con la clase que corresponde a la sesión 6 se comenta a los estudiantes los tipos de variables aleatorias que son discretas y continuas y se define cada una de ellas para después preguntar ¿Cuál es el tipo de variable aleatoria trabajada en la clase de hoy?

- **Las variables aleatorias pueden ser discretas o continuas:**
  - Discretas: el conjunto de posibles valores es numerable. Suelen estar asociadas a experimentos en que se mide el número de veces que sucede algo.
  - Continuas: el conjunto de posibles valores es no numerable. Puede tomar todos los valores de un intervalo. Son el resultado de medir.

Los estudiantes relacionan lo trabajado y llegan al acuerdo que los experimentos aleatorios trabajados en la clase corresponden a variables aleatorias discretas y cuáles son las gráficas que representan este tipo de comportamiento.

Se realiza entre todos en pizarrón la gráfica que representa el trabajo con la variable aleatoria en el juego "Pepito gana doble".



Nota: Para graficar una distribución de probabilidad puedes utilizar barras o bien un segmento de recta.

Observación: La variable aleatoria graficada corresponde a una variable aleatoria discreta.

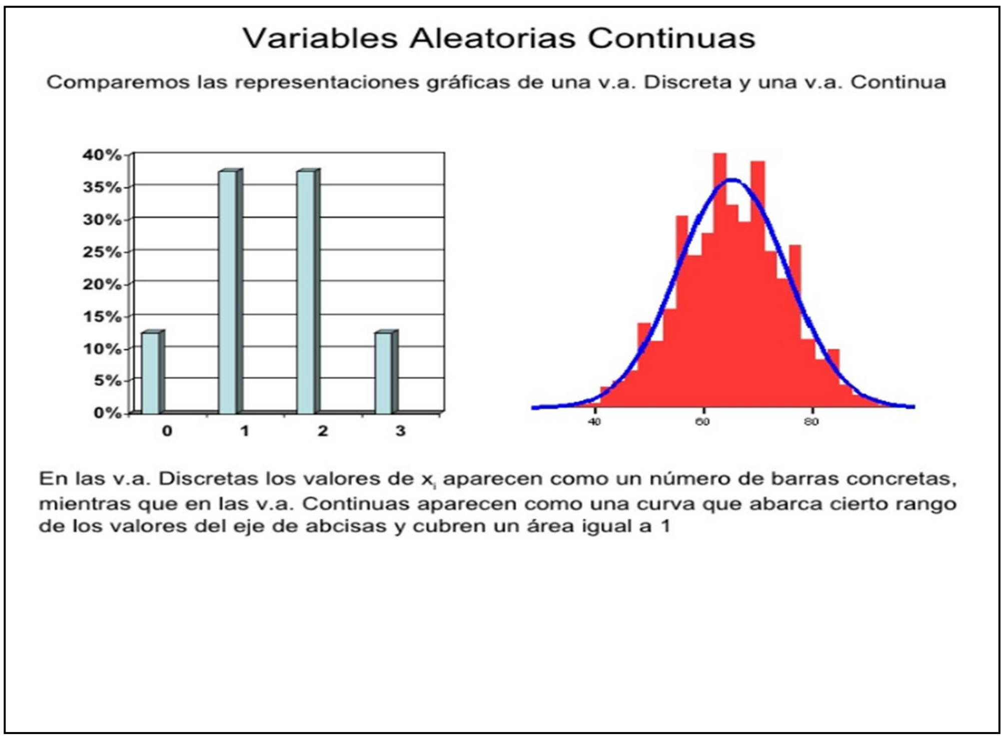


Figura N° 57.Gráfica de distribución de probabilidad para variable discreta y continua.

4.1.7 DESCRIPCIÓN DE LAS CLASES. Clase 7. TIPOS DE GRÁFICOS Y DIAGRAMAS. Interpretación y construcción de gráficos

En esta sesión, que corresponde a la clase 7 se retoma el trabajo con estadística y se continua trabajando con el dispositivo siguiendo el esquema de la gran pregunta generatriz :"¿Cómo la estadística, la probabilidad, el azar influye en nuestro quehacer cotidiano?", para ello se continúa en base al siguiente esquema:

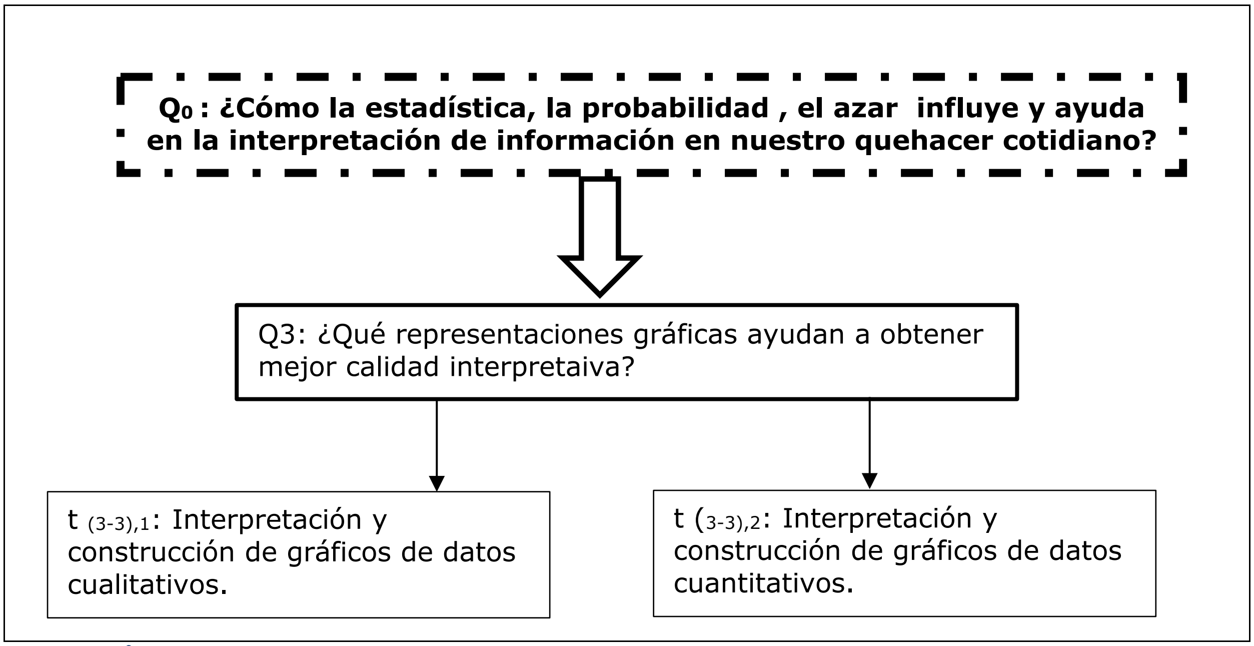


Figura N° 58. Esquema pregunta generatriz y subpregunta relacionada con la estadística para clase n°7.

Las respectivas organizaciones matemáticas que corresponden a esta etapa son:

- OM: Tipos de gráficos y diagramas
- OM: Reproducir información a través del gráfico.

En la clase número 7, continúa el trabajo en grupos colaborativos previamente designados y se motiva el trabajo en representaciones gráficas como una parte importante del trabajo en estadística, debido a que organiza y presenta visualmente los datos de un estudio estadístico. También se recuerda que en el trabajo con probabilidad tiene bastante conexión con la estadística en especial la forma de cálculo de la probabilidad mediante la definición frecuentista de probabilidad en donde indica que si repetimos muchas veces (tendiendo al infinito) un mismo experimento aleatorio, la frecuencia de que suceda un cierto evento tiende a ser una constante, esto significa que mediante la estadística se resume la información y con los cálculos que entrega la frecuencia relativa con respecto a un evento nos permite verificar la Ley de los grandes números. También se recuerda que en la clase anterior se grafican los resultados de una variable aleatoria con segmentos verticales al eje X. Se comenta también a los estudiantes que la estadística y la probabilidad son áreas de estudio que se colaboran entre sí para alcanzar grandes constructos.

En esta clase los estudiantes guiados por su profesora recuerdan los tipos de gráficos que han desarrollado en cursos anteriores o también gráficos que reconocen por su conexión con otras áreas como por ejemplo el área de las ciencias. Para ello completan en un cartel bastante grande en pizarrón con los nombres de los tipos de gráficos y al tipo de variable estadística que corresponden. El cartel o papelógrafo que completan los estudiantes sigue la secuencia, organización o esquema relacionado con gráficos estadísticos como muestra la figura N° 59:

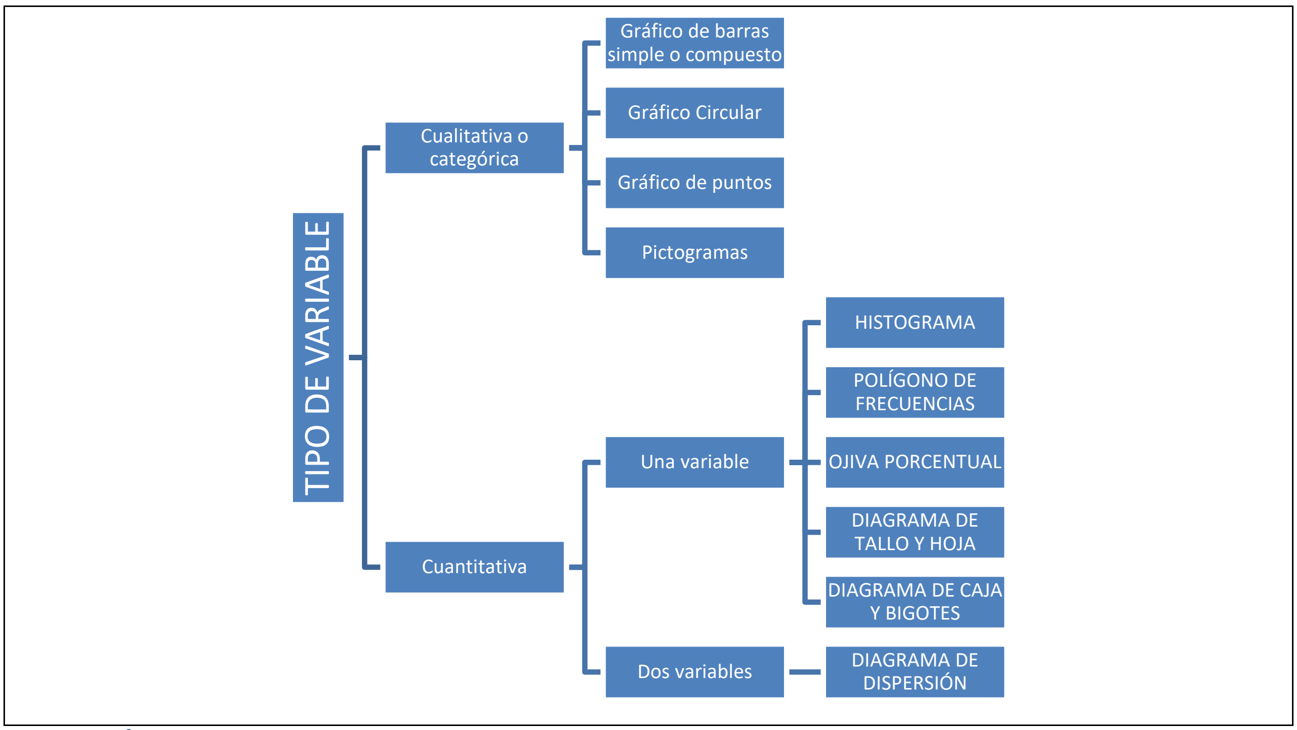
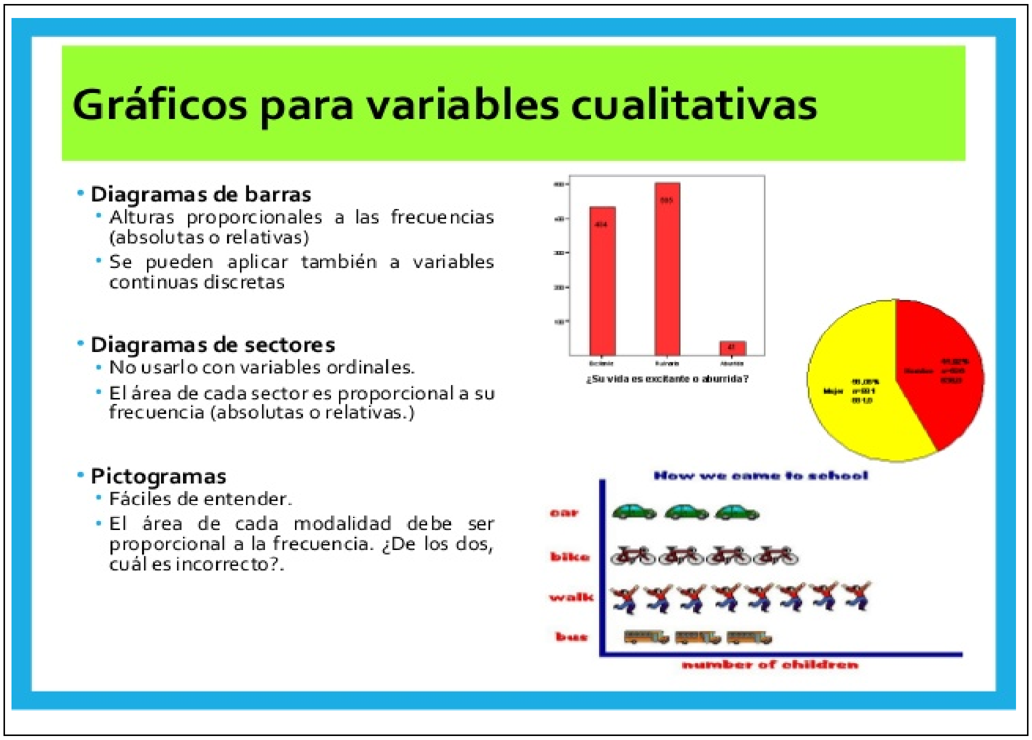


Figura N° 59.Esquema realizado en forma colaborativa con los estudiantes con carteles en pizarrón previamente preparados para pegar y formar el esquema.

Los estudiantes dicen recordar con claridad algunos tipos de gráficos por lo cual se distribuye la Tarea 1 de ésta sesión "t $_{(3\text{-}3),1}$" en forma de actividades para partir primeramente con los gráficos que representan variables cualitativas. Para ello se recuerdan algunas de estas representaciones gráficas con sus características principales de manera breve para acordar y recordar el lenguaje de la interpretación y las formas adecuadas de construcción para evitar graves problemas de interpretación de gráficos por estar construidos de manera descuidada o bien por no respetar los rangos correspondientes entregan información distorsionada de la realidad a estudiar. En la figura N° 60 se muestran los “tips” o recuerdos de los tipos de gráficos mostrados a los estudiantes:



………………. *Figura N° 60.Tipos de gráficos para variable cualitativa.*

En base al recuerdo de los estudiantes con respecto a los tipos de gráficas, su construcción e interpretación de éstas se propone la primera actividad:

Actividad 1: Dado un gráfico de barras, construir con la información entregada una tabla de distribución de frecuencia y luego expresar esta información en un gráfico circular o diagrama de sectores.

Frente a éste desafío algunos estudiantes responden y realizan las actividad sin mayores contratiempos. Debido a la cantidad de estudiantes que no respondieron de manera acertada se retoma la construcción del diagrama o gráfico circular. En la figura N° 61 se observa el trabajo de algunos estudiantes en la construcción de la tabla de distribución de frecuencias y en la construcción del gráfico circular con el cálculo de la región angular de la circunferencia y el porcentaje que le corresponde a cada región.

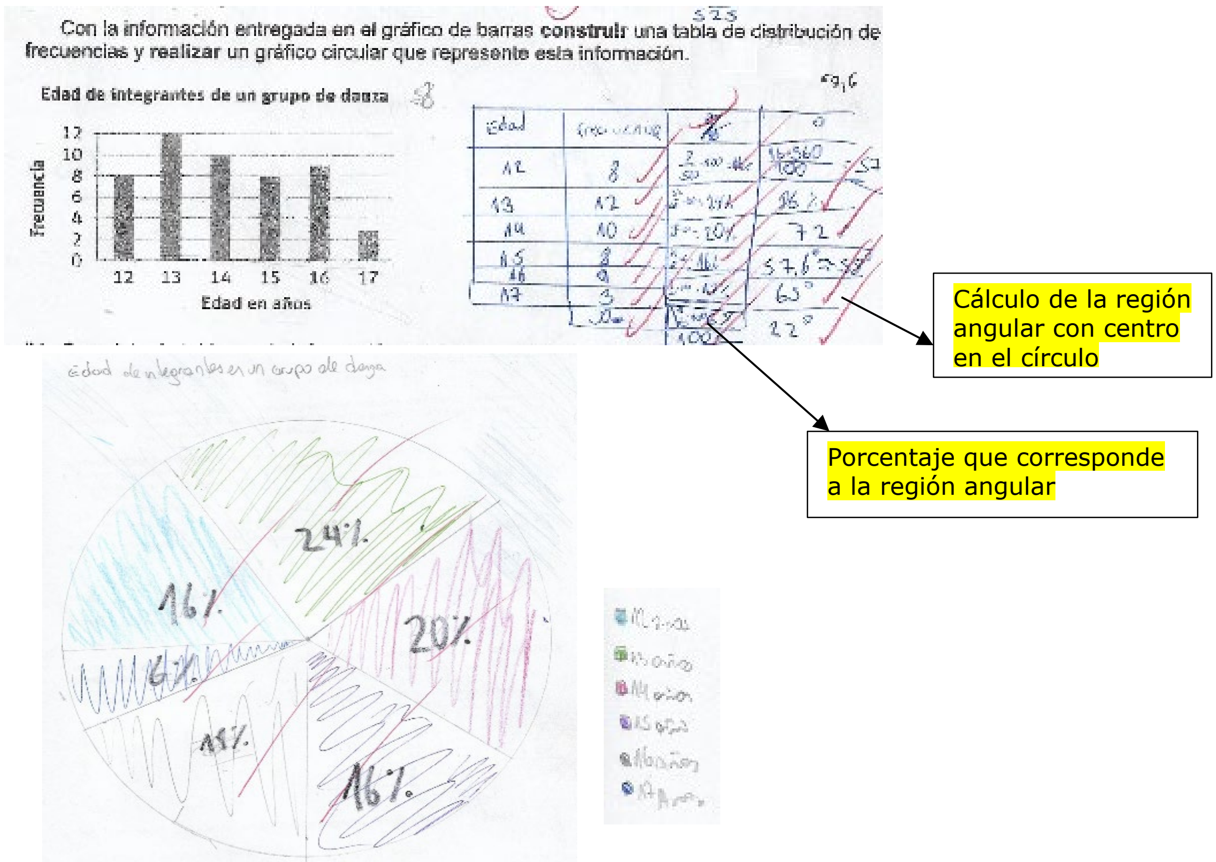


Figura N° 61.Interpretación gráfico de barras con la construcción de una tabla de distribución de frecuencias y el gráfico circular que representa esta misma información.

Frente a la cantidad importante de estudiantes que no logran la construcción del gráfico circular se propone una actividad para construir un gráfico circular con una secuencia de cálculos necesarios para obtener mayor exactitud y que el gráfico represente de manera confiable la información que entregada. En la figura N° 62 se muestra la información y la actividad solicitada a los estudiantes para comprender y realizar la construcción del gráfico circular:

CONSTRUCCIÓN GRÁFICO CIRCULAR

Un **diagrama de sectores** se puede utilizar para todo tipo de *variables*, pero se usa frecuentemente para las **variables cualitativas.**
Los **datos** se representan en un **círculo**, de modo que el **ángulo** de cada **sector** es **proporcional** a la **frecuencia absoluta** correspondiente.

Para obtener el ángulo que corresponde a cada sector tenemos la siguiente expresión:

$$\alpha = \frac{360^{\circ}}{N} \bullet f_i$$

Apliquemos en el siguiente ejemplo:

USO DE LOS MEDIOS DE TRANSPORTE

Variable estadística	Bus escolar	Automóvil	Bus urbano	Bicicleta	Total
Frecuencia absoluta (Nº de alumnos)	80	30	50	40	200

Observa cómo se elabora un gráfico circular con los datos de la tabla.

1° Se reparten los 360º del círculo en partes proporcionales, para lo cual planteamos las siguientes proporciones en cada caso:

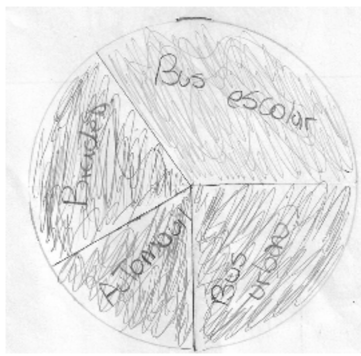
Número de alumnos	Grados sexagesimales

200 —— 360º 80 —— xº	$x = \frac{80 \times 360°}{200} = 144°$	Bus escolar
200 —— 360 30 —— xº	$x = \frac{30 \times 360°}{200} = 54°$	Automóvil
200 —— 360 50 —— xº	$x = \frac{50 \times 360°}{200} = 90°$	Bus urbano
200 —— 360 40 —— xº	$x = \frac{40 \times 360°}{200} = 72°$	Bicicleta

Estas medidas permitirán dividir el círculo en sectores que representarán a cada variable

Con estos datos construye un gráfico circular dividiendo el círculo en las regiones anteriormente calculadas. No olvidar ubicar una leyenda del gráfico con los colores utilizados para cada categoría.

Gráfico circular.



Construcción por parte del estudiante

Figura N° 62.Actividad de refuerzo para construcción de gráfico circular.

Además de la construcción de éste gráfico circular se solicita la construcción de un gráfico circular dados los porcentajes correspondientes a cada categoría, frente a esta actividad los estudiantes reaccionan de manera práctica conectando de manera rápida con la región angular que le corresponde a cada porcentaje para determinar la región considerada como se observa en la figura N° 63:

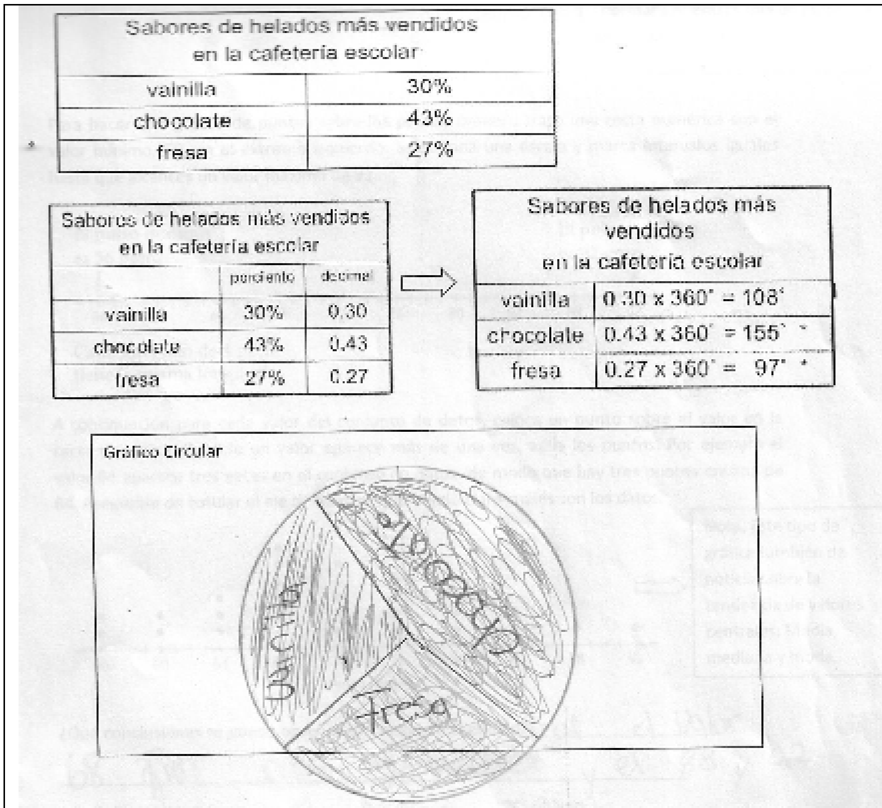


Figura N° 63.Construcción de gráfico circular por los estudiantes

Continuando con la actividad 1 se propone hacer el trabajo contrario, esto significa, dado el gráfico circular con sus porcentajes respectivos a cada región, determinar la cantidad de datos que corresponde a cada región representada. Frente a este desafío los estudiantes realizan varios métodos para llegar a la respuesta, como por ejemplo utilizar proporciones, o bien esquema mediante línea recta con subdivisiones como una fracción o bien subdividir el círculo en sectores más pequeños, que sean múltiplos de los porcentajes asignados. En la figura N° 64 se observan algunos de los trabajos realizados por los estudiantes para encontrar las cantidades solicitadas. El primer estudiante utiliza método de proporciones, el segundo estudiante subdivisiones del área circular con un divisor común para cada porcentaje y el tercer estudiante realiza comparaciones con una línea recta par relacionarlo con el concepto de fracción. Todos éstos estudiantes llegan a la respuesta correcta y cooperan en la retroalimentación del ejercicio realizado en forma colaborativa dentro del trabajo propuesto con el dispositivo didáctico. La secuencia de trabajo utilizado se observa en la figura N° 64:

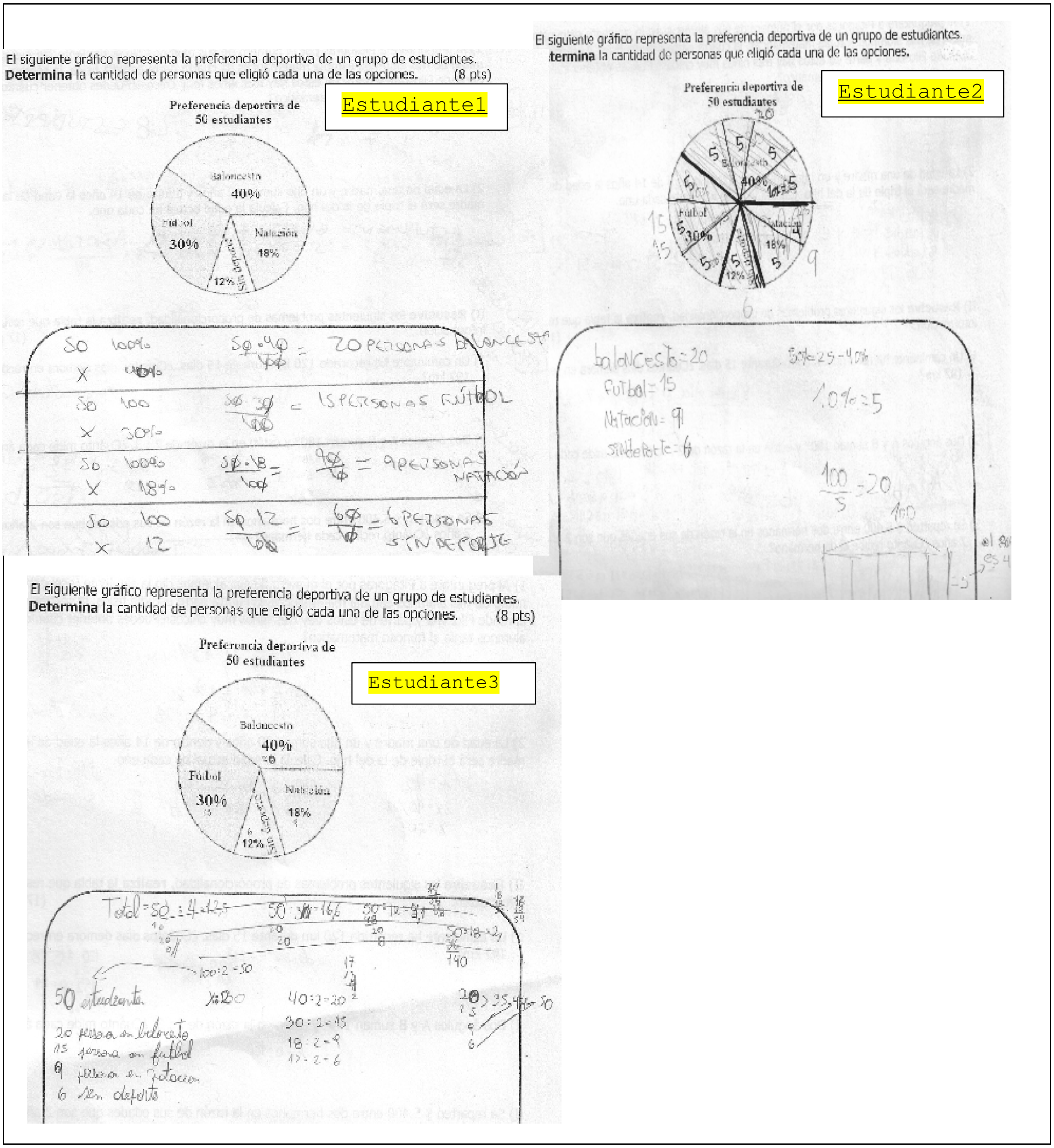


Figura N° 64.Comparación de respuestas para la interpretación de un gráfico circular.

<u>Actividad 2</u>. Esta actividad está enfocada al trabajo con el gráfico de puntos su construcción e interpretación para variables cualitativas. Se propone al estudiante un par de actividades que completan con facilidad después de recordar el método para realizar este tipo de gráfico. Para iniciar con la actividad se desarrolla mediante la secuencia detallada en la figura N° 65:

Gráfico de puntos.

El gráfico de puntos se utiliza para representar datos cualitativos como cuantitativos discretos. A continuación tomaremos información sobre el pulso (pulsaciones por minuto) de un grupo de estudiantes:

Este conjunto de datos refleja los pulsos, expresados en pulsaciones por minuto(ppm), de un grupo de 30 estudiantes:

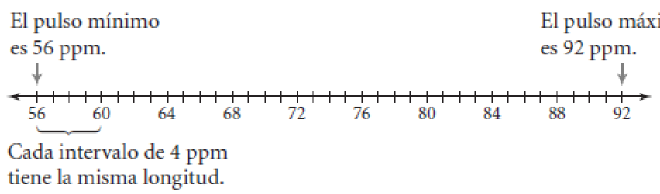
68	60	76	68	64	80	72	76	92	68	56	72	68	60	84
72	56	88	76	80	68	80	84	64	80	72	64	68	76	72

Obtener:

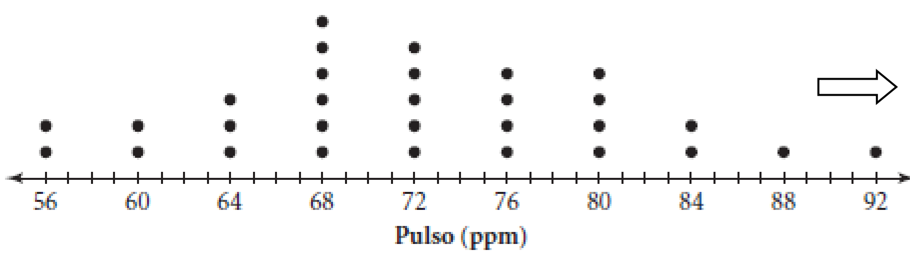
Valor mínimo:____________ Valor Máximo:____________

El valor mínimo y el máximo describen la dispersión de los datos. Por ejemplo, podrías decir:"los pulsos se encuentran entre 56 y 92 ppm". Sobre la base de estos datos solamente. Parece que un pulso de 80 ppm sería "normal", mientras que un pulso de 36 ppm sería demasiado bajo.

Para hacer una gráfica de puntos sobre los pulsos, primero traza una recta numérica con el valor mínimo, 56, en el extremo izquierdo. Selecciona una escala y marca intervalos iguales hasta que alcances un valor máximo de 92.



A continuación para cada valor del conjunto de datos, coloca un punto sobre el valor en la recta numérica. Cuando un valor aparece más de una vez, apila los puntos. Por ejemplo el valor 64 aparece tres veces en el conjunto de datos, de modo que hay tres puntos encima de 64. Asegúrate de rotular el eje de manera que quede claro cuáles son los datos.



Nota. Este tipo de gráfica también da noticia sobre la tendencia de valores centrales: Media, mediana y moda.

¿Qué conclusiones se puede obtener con respecto al gráfico?_______________

Figura N° 65.Propuesta de actividad para la construcción de un gráfico de puntos.

Este ejercicio tuvo gran aceptación de los estudiantes quienes se informaron y comentaron sobre los rangos de pulsaciones normales y entre ellos se tomaron y midieron la cantidad de pulsaciones por minuto. Algunos comentaron de experiencias personales y formas de cálculo en 15 segundos para obtener las pulsaciones de una persona de manera práctica. Algunas de las respuestas dadas a ésta rápida actividad son presentadas en la figura N° 59, donde los estudiantes respondieron de forma ágil sin mayores contratiempos para terminar y comentar la actividad que encontraron bastante útil y práctica. Además construyeron un gráfico de puntos con información de interés.

En la figura N° 66 se observa el desarrollo de los estudiantes frente la actividad 2 que corresponde a la tarea t $_{(3\text{-}3),1}$ propuesta:

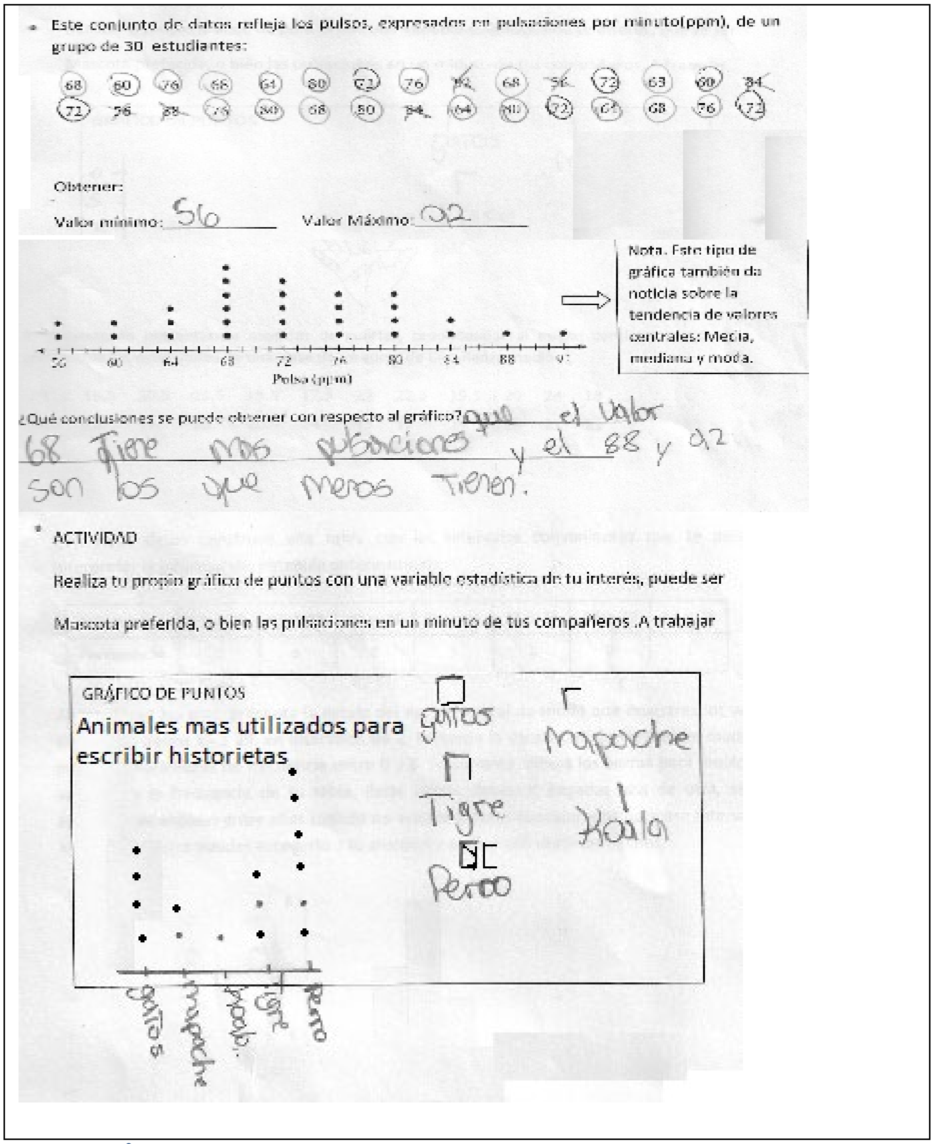


Figura N° 66.Respuestas de los estudiantes en el gráfico de puntos.

Actividad3.

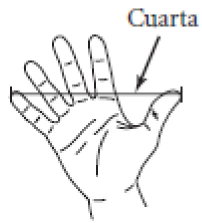
Luego se propone una nueva actividad para revisar las gráficas para variable estadística continua que corresponden a tarea "t $_{(3\text{-}3),2}$". Se inicia el estudio de las gráficas con el Histograma que es un gráfico que se utiliza para trabajar con datos cuantitativos continuos con intervalos, para ello los estudiantes recuerdan que este gráfico se realiza con barras, pero no recuerdan que las barras van pegadas una al lado de la otra y cuál es la interpretación de éste tipo de gráfico. Además no recuerdan algunas nociones básicas como el ancho de barra, el cuál debe tener un ancho del mismo tamaño para todas las barras, el cuál debe ser determinado con anterioridad para ubicar los puntos respectivos en el Eje Horizontal, en donde se ubicará la base con el ancho respectivo de cada barra. En la figura N° 67 se resume la información entregada a los estudiantes para poder iniciar la actividad propuesta en base a la medición de las cuartas de la mano , en donde se obtendrán datos para organizarlos en una tabla de distribución y luego realizar el Histograma.

HISTOGRAMA.

Un histograma es un gráfico que se utiliza para trabajar con datos cuantitativos continuos con intervalos, observa y encontrarás las características de este tipo de gráficas:

<u>Investigación : Cuartas</u>

Una cuarta es la distancia que va desde la punta de tu dedo pulgar hasta la punta de tu dedo meñique cuando extiendes la mano completamente.



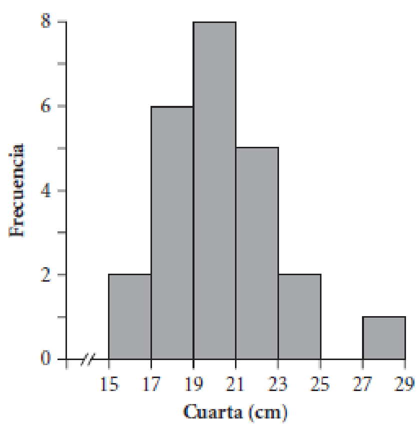
A continuación presentamos medidas de cuartas, redondeadas al medio centímetro más cercano, de los estudiantes de una clase de un curso de Enseñanza media.

19	18.5	20.5	21.5	18.5	17.5	22	22.5	19.5	20	24	18
16.5	28	19	20	20.5	24	15	17	19	18	21	21

Con estos datos construye una tabla con los intervalos convenientes que te permitan interpretar la información obtenida anteriormente:

Intervalo	15 a 17	17 a 19	19 a 21	21 a 23	23 a 25	25 a 27	27 a 29
Frecuencia	2	6	8	5	2	0	1

Ahora dibuja los ejes, presenta la escala del eje horizontal de modo que muestres los valores de cuartas desde 15 a 29, en intervalos de 2. Presenta la escala del eje vertical de modo que muestres los valores de frecuencia entre 0 y 8. Finalmente, dibuja las barras para mostrar los valores de la frecuencia de tu tabla. Estas barras deben ir pegadas una de otra, solo se apreciará un espacio entre ellas cuando no existen valores considerados para ese intervalo. El ancho de la barra puedes escogerlo a tu elección y probar con distintos anchos.



ACTIVIDAD. Mide las cuartas de tus compañeros de curso y fabrica un Histograma

Figura N° 67.Gráfica de variable cuantitativa. Histograma

Los estudiantes se motivan con el concepto de cuarta y de inmediato proceden a medir las cuartas de sus compañeros de grupo. Los estudiantes más cercanos miden con rapidez y comienzan a aproximar esta medida al valor numérica más cercano al instrumente de medida que poseen que es una huincha tradicional de metro. Algunos estudiantes se rien un poco, comparten y comparan la medida de su cuarta. En la figura N° 68 se muestra el trabajo de un grupo. Se debe considerar que no se midió gran cantidad de estudiantes en un solo gráfico porque de ésta manera se logra aprovechar mejor los tiempos de trabajo de aula y las mediciones se realizan sólo con los estudiantes más cercanos al trabajo grupal. De ésta manera se observa una variedad en la formar de graficar el histograma, como por ejemplo al escoger el ancho de la barra o bien el alto que alcanza ésta.

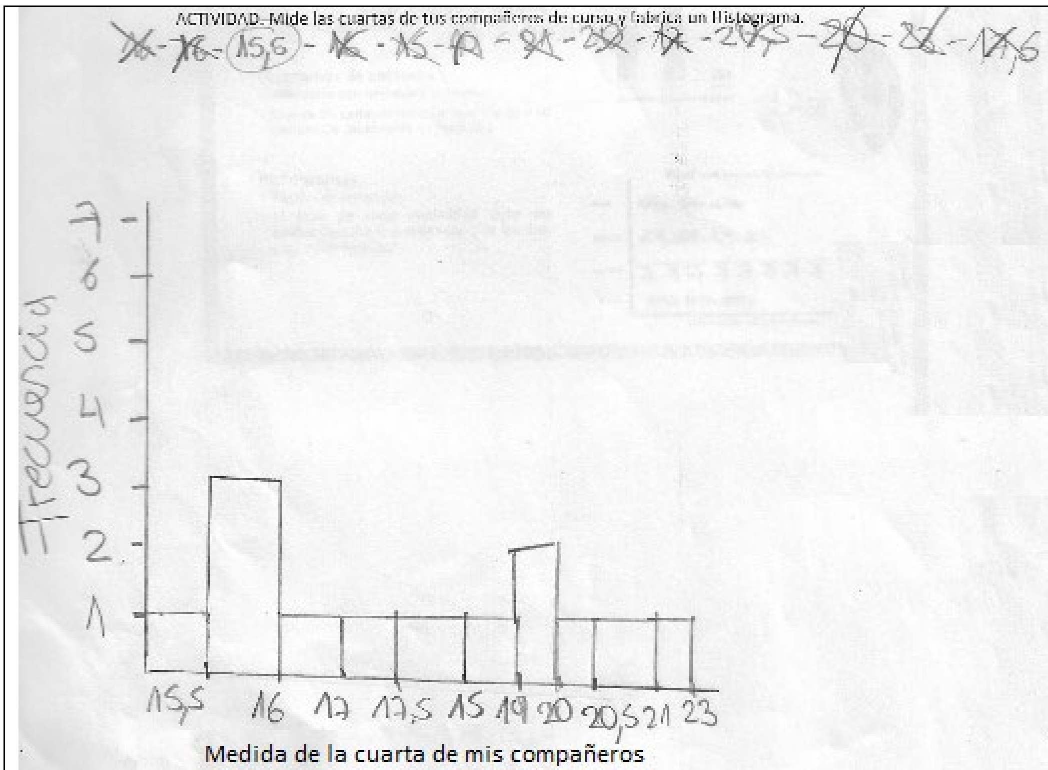


Figura N° 68.Histograma de frecuencias construido con la medida de las cuartas de mis compañeros

4.1.8.DESCRIPCIÓN DE LAS CLASES. Clase 8. TIPOS DE GRÁFICOS Y DIAGRAMAS. Interpretación y construcción de gráficos

En la séptima sesión o clase 8, se continua el trabajo con la subpregunta "Q3:¿Qué representaciones gráficas ayudan a obtener mejor calidad interpretativa?" recordando las actividades realizadas en la clase anterior los tipos de gráficos realizados y para qué tipo de datos son frecuentemente utilizados. Se conecta la clase con el trabajo con el dispositivo didáctico y con la tarea que se observa en la figura N° 69:

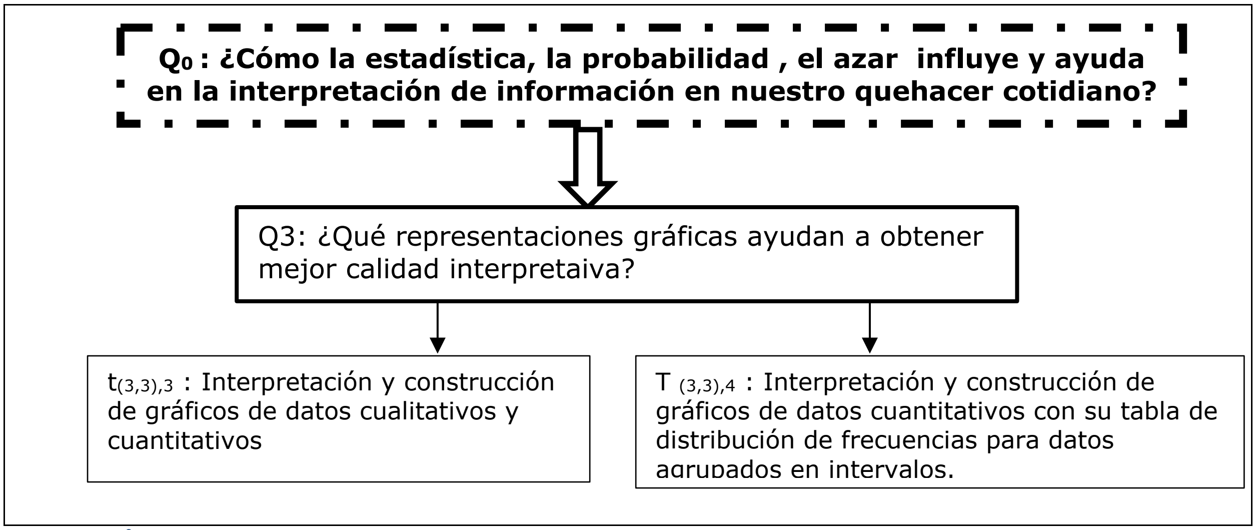


Figura N° 69.Representaciones gráficas estadísticas

Las respectivas organizaciones matemáticas que corresponden a esta etapa son:

- OM: Tipos de Gráficos y diagramas
- OM: Reproducir información a través del gráfico.

Se propone a los estudiantes continuar el trabajo con el "histograma", para trabajar en forma paralela el "polígono de frecuencias" y junto a las tablas de distribución de frecuencias con intervalos y el cálculo de la frecuencia acumulada, frecuencia relativa, frecuencia relativa porcentual y agregamos a esta tabla la marca de clase, concepto que corresponde a la semisuma del valor inferior y valor superior de un intervalo o clase y se denota X_i que también se le reconoce como el promedio de los extremos de cada intervalo:

$$X_i = \frac{\text{Límite inferior} + \text{Límite Superior}}{2}$$

HISTOGRAMAS DE FRECUENCIAS PARA DATOS AGRUPADOS

Un histograma o histograma de frecuencias es la representación gráfica correspondiente a una variable cuantitativa continua con intervalos. En el eje "x", de las abscisas, se disponen los valores de las variables.

En el eje de las "y" u ordenadas se disponen los valores de las frecuencias absolutas.

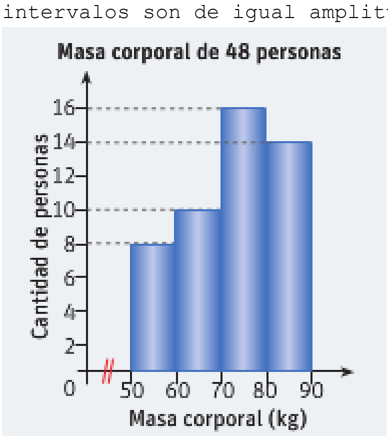
Agregamos a la tabla de distribución la marca de clases, concepto que corresponde a la semisuma del valor inferior y valor superior de un intervalo o clase y se denota por X_i.

En la figura N° 69 se observa el esquema de trabajo planteado por la profesora en esta sesión o clase número 8, en base a la continuación con el trabajo con Histograma, que corresponde a un gráfico utilizado para representar información de variable estadística cuantitativa.

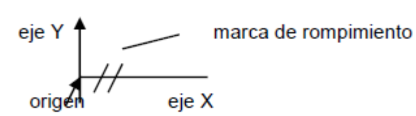
UNIVERSIDAD CATÓLICA
DE LA SANTÍSIMA CONCEPCIÓN.
FACULTAD DE EDUCACIÓN

GUÍA DE TRABAJO
HISTOGRAMAS DE FRECUENCIAS PARA DATOS AGRUPADOS

Un histograma o histograma de frecuencias es la representación gráfica correspondiente a una variable cuantitativa continua con intervalos. En el eje "x", de las abscisas, se disponen los valores de las variables. En el eje de las "y" u ordenadas se disponen los valores de las frecuencias absolutas. Agregamos a la tabla de distribución la marca de clases, concepto que corresponde a la semisuma del valor inferior y valor superior de un intervalo o clase y se denota por X_i.
Este tipo de gráfico consta de barras, cuyas alturas corresponden a la frecuencia absoluta de la clase respectiva. Además, todas las barras son de igual ancho, debido a que todos los intervalos son de igual amplitud.

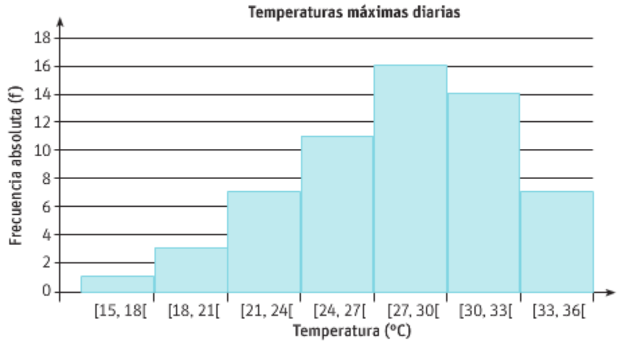


Se realiza un corte en el eje X cuando el intervalo parte de un número diferente de cero.



Actividad 1

Observa el HISTOGRAMA que se presenta a continuación:



a.) Realiza la tabla de distribución de frecuencia que corresponde al HISTOGRAMA, que contenga variable estadística, frecuencia absoluta y marca de clases

Figura N° 70.Actividad con el histograma.

Se inicia la tarea "$t_{(3,3),3}$ " y tarea "$t_{(3,3),4}$" con una actividad relacionada con el Histograma, la cual consiste en construir una tabla de distribución de frecuencias con la información entregada en el gráfico, se recuerda a los estudiantes la simbología del uso de los corchetes ..[[.., para expresar un intervalo. La tabla de distribución de frecuencias que deben realizar los estudiantes considera la variable estadística, la frecuencia absoluta y la marca de clase.

Los estudiantes inician la actividad construyendo la tabla de distribución solicitada, presentando algunas dificultades en la organización de las columnas, por ejemplo, que ubicar en cada una de ellas. Otra pequeña dificultad en algunos estudiantes fue la obtención de la frecuencia absoluta, puesto que algunas barras no llegan exactamente a las líneas de división. Otro desafío fue pensar en una marca de clase equivalente a un número decimal y si debían aproximar o redondear este valor. En la figura N° 70 se observa la construcción de la tabla de distribución de frecuencias con datos ubicados en intervalos que se obtienen al interpretar la información entregada por el Histograma

temperaturas máximas	frecuencias absolutas	Xi	Fa
[15, 18[	1	16,5	1
[18, 21[	3	19,5	4
[21, 24[	7	22,5	11
[24, 27[	11	25,5	22
[27, 30[	16	28,5	38
[30, 33[	14	31,5	52
[33, 36[	7	34,5	59

Figura N° 71.Tabla de distribución de frecuencia formada por información entregada por un Histograma

También se solicita a los estudiantes analizar la información de un Histograma y responder algunas preguntas sobre éste. Los estudiantes comparten entre ellos las posibles respuestas y llegan a respuestas equivalentes, observando un grado de dificultad menor en la tarea encomendada, como se observa en la figura N° 71:

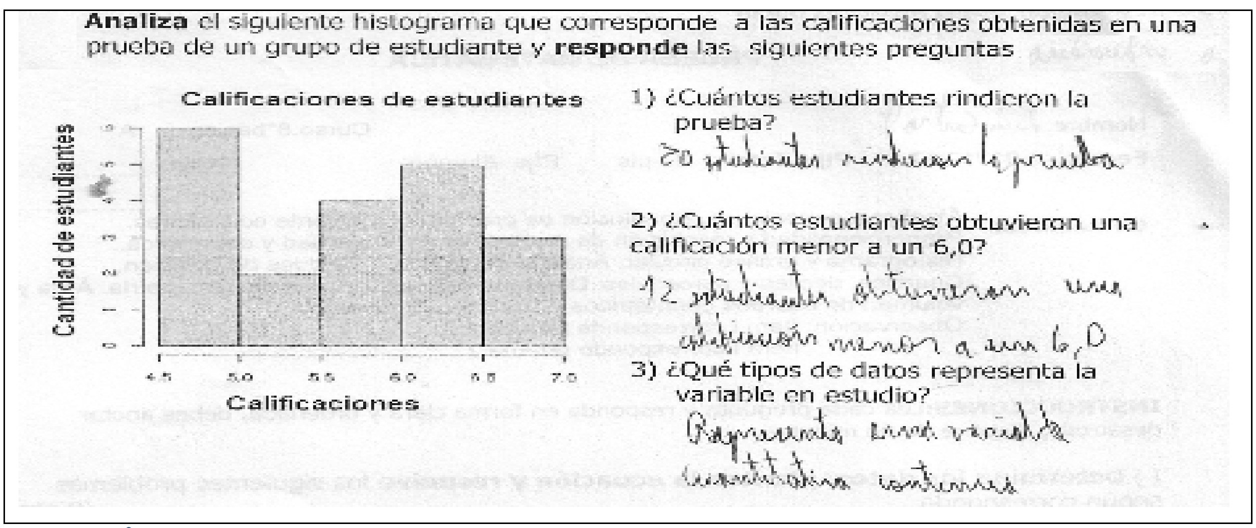
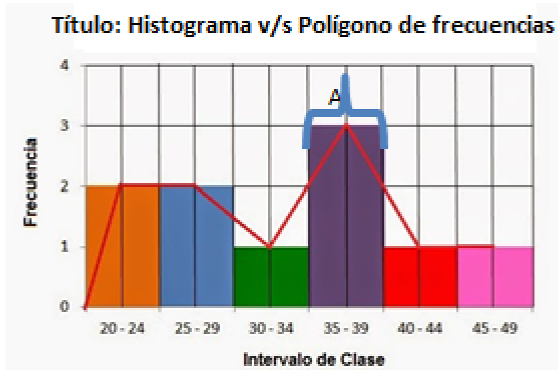


Figura N° 72.Interpretación del Histograma

Luego se inicia el trabajo con el Polígono de Frecuencia, su definición y construcción que está absolutamente relacionada con el Histograma. El Polígono de Frecuencia se crea a partir de un histograma de frecuencia al unir en forma consecutiva con segmentos los puntos de intersección entre los puntos medios de cada clase y su frecuencia, incluyendo el punto medio anterior a la primera clase y el punto medio posterior a la última clase.

Se entrega a los estudiantes indicaciones para la construcción de un polígono de frecuencias en una tabla con los pasos a seguir. Junto a la tabla se muestra el polígono de frecuencias como modelo de construcción, en el cual están marcados los ejes con los elementos que deben ir ubicados en cada uno de ellos, en el eje "X" o "eje de las abscisas están ubicados los intervalos y en el eje "Y" o "eje de las ordenadas" se ubicada la frecuencia absoluta. En la figura N° 72 se observa el material entregado a los estudiantes para reforzar el trabajo de comprensión de la forma adecuada de realizar un polígono de frecuencias, para después continuar con la siguiente actividad que consiste en completar tablas de frecuencias con intervalo dado el polígono de frecuencias o bien completar tablas de distribución de frecuencias y realizar la gráfica del Histograma con su respectivo polígono.

CONSTRUCCIÓN DE HISTOGRAMA Y POLÍGONO DE FRECUENCIAS.



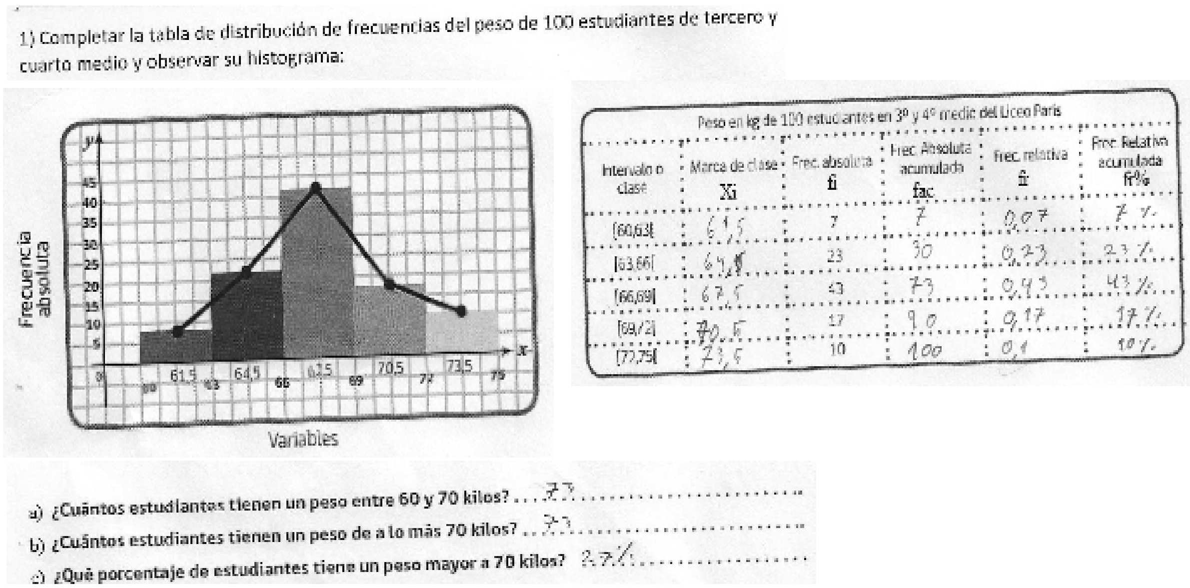
Antes de iniciar con la construcción de un polígono de frecuencia, mostraremos el contenido de las columnas básicas de la construcción de un Histograma que es la base del polígono de frecuencia:

Número de intervalos y Número de barras	El número de barras es equivalente al número de intervalos.
Amplitud del intervalo	Equivale al ancho de la columna (A)todas tienen la misma longitud.
Frecuencia de clase o frecuencia absoluta (Fi)	Corresponde a la altura de cada barra y estas deben juntas (pegadas) una con otra.
Marca de clase (Xi), punto medio de entre los extremos de cada intervalo.	Es el punto medio de cada barra.
Segmento que une los puntos medios de cada barra del histograma.	Línea formada por segmentos de recta que corresponde al polígono de frecuencias

Figura N° 73. Indicaciones de construcción de un polígono de frecuencias.

Actividad N°2.

Se indica a los estudiantes observar un histograma con su respectivo polígono de frecuencias y con la información entregada en él completar una tabla de distribución de frecuencias y responder unas preguntas relacionadas con la masa corporal de un grupo de 100 estudiantes de Tercero y Cuarto Año de Enseñanza Media. Las respuestas de los estudiantes se observan en la figura N° 73. Los estudiantes realizan sus cálculos, mientras otros observan los detalles del polígono de frecuencias para realiza un trabajo específico y evitar errores en la tabla de distribución de frecuencias.



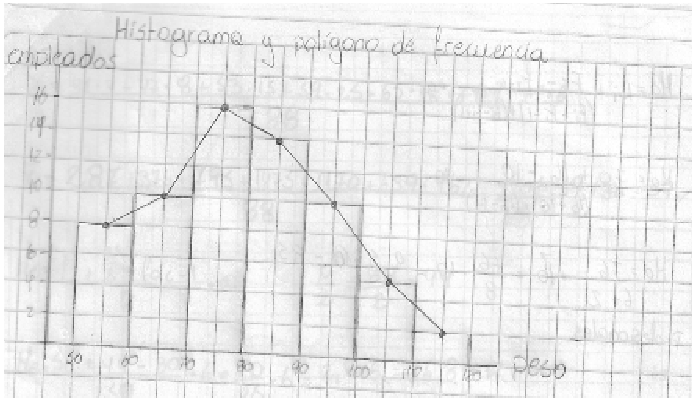
}

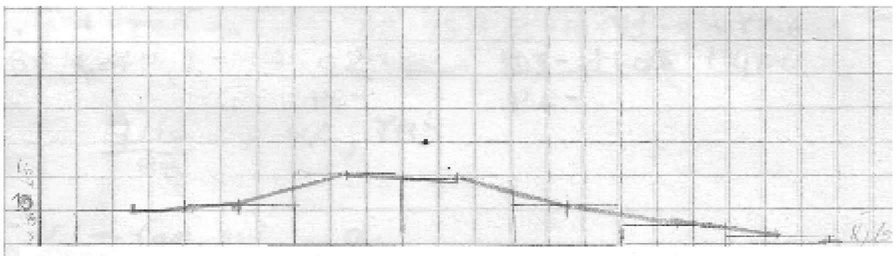
Figura N° 74,Completar tabla de distribución con información sobre la peso en kg de 100 estudiantes.

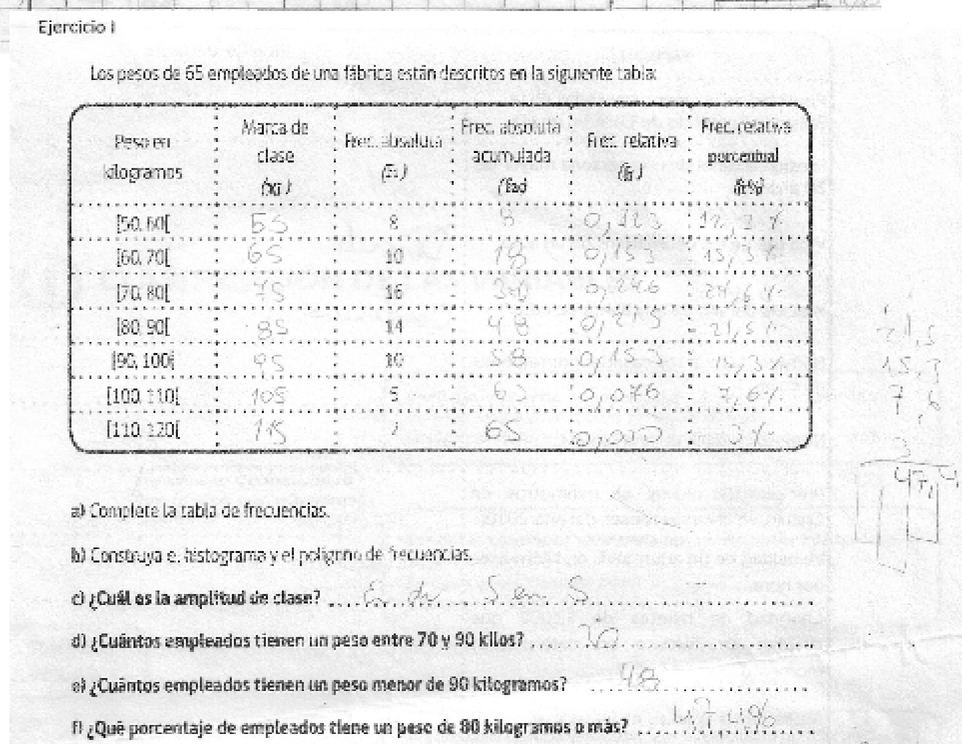
La mayoría de los estudiantes responden de manera acertada a las preguntas y sólo presentan algunos problemas con la tabla de distribución de frecuencias. Esto se debió que al calcular la frecuencia relativa algunos estudiantes calcularon mediante un cuociente entre la frecuencia acumulada y el número total de datos, en vez de realizar el cuociente entre la frecuencia absoluta y el número total de datos.

Actividad N°3

Siguiendo con las actividades con el polígono de frecuencias se solicita realizar un Histograma con el polígono de frecuencias respectivo y además completar una tabla de distribución de frecuencias con intervalo relacionada con la masa corporal en kilogramos de 65 empleados de una fábrica de alimentos. Los estudiantes comentan y realizan una conexión con la masa de los estudiantes del ejercicio anterior, provocando algunas comparaciones entre la edad y los kilos que se pueden ganar con los años. En la figura N° 67 se observa la gráfica realizada de tres estudiantes en donde se observa la diferencia en los rangos escogidos en el "Y", también se observa la construcción de la tabla de distribución de frecuencias.







Ejercicio I

Los pesos de 65 empleados de una fábrica están descritos en la siguiente tabla:

Peso en kilogramos	Marca de clase (x_i)	Frec. absoluta (f_i)	Frec. absoluta acumulada (fa)	Frec. relativa (f_r)	Frec. relativa porcentual (f_r%)
[50, 60[	55	8	8	0,123	12,3%
[60, 70[	65	10	18	0,153	15,3%
[70, 80[	75	16	30	0,246	24,6%
[80, 90[	85	14	48	0,215	21,5%
[90, 100[	95	10	58	0,153	15,3%
[100, 110[	105	5	63	0,076	7,6%
[110, 120[	115	2	65	0,030	3%

21,5
15,3
7,6
3
47,4

a) Complete la tabla de frecuencias.

b) Construya el histograma y el polígono de frecuencias.

c) ¿Cuál es la amplitud de clase? .... [illegible] ....

d) ¿Cuántos empleados tienen un peso entre 70 y 90 kilos? .... 30 ....

e) ¿Cuántos empleados tienen un peso menor de 90 kilogramos? .... 48 ....

f) ¿Qué porcentaje de empleados tiene un peso de 80 kilogramos o más? .... 47,4% ....

Figura N° 75.Construcción de Histograma por parte de los estudiantes.

<u>Actividad N°4</u> En esta actividad se trabaja con la construcción e interpretación de la ojiva y los estudiantes recuerdan algún parecido con el polígono de frecuencias al recordar que se trataba de la unión de segmentos hasta forma una línea que representa información de tipo cuantitativa. La profesora orienta a los estudiantes y les indica que la ojiva efectivamente es

una representación gráfica para datos cuantitativos, que se obtiene uniendo segmentos de rectas que se extienden entre los extremos de las clases o intervalos usando los valores de la frecuencia acumulada. También este gráfico puede representar los valores de la frecuencia relativa.

Luego se presenta a los estudiantes una lámina con un gráfico de ojiva construido en base a una tabla de distribución de frecuencias para conectar su construcción e interpretación con los valores entregados como se presenta en la figura N° 75.

Intervalo	Frecuencia	Punto medio del intervalo	Frecuencia relativa %	Frecuencia relativa acumulada %
[5 – 12[	12	8,5	15%	15%
[12 – 19[	16	15,5	20%	35%
[19 – 26[	20	22,5	25%	60%
[26 – 33[	12	29,5	15%	75%
[33 – 40[	10	36,5	12,5%	87,5%
[40 – 47[	6	43,5	7,5%	95%
[47 – 54[	4	50,5	5%	100%
Total	80		100%	

El gráfico de frecuencia acumulada es:

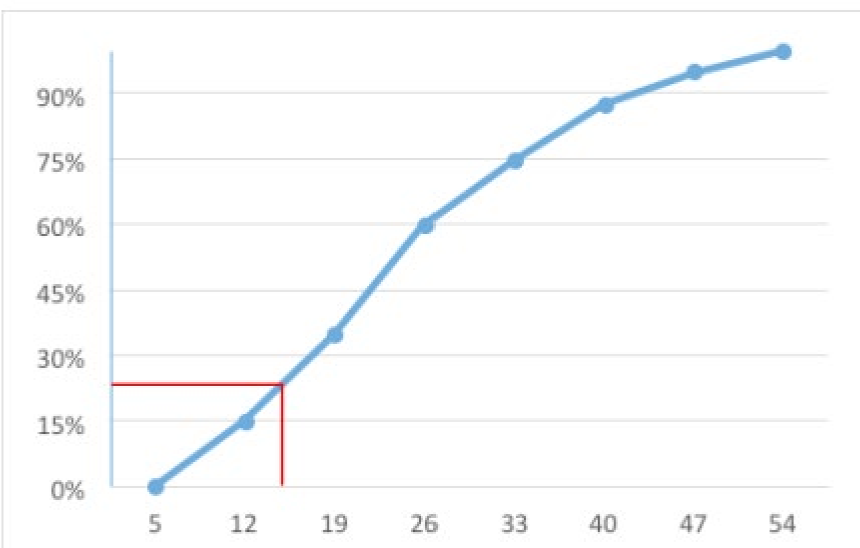


Figura N° 76.Construcción de la ojiva con la información de Tabla de Distribución de Frecuencias.

La actividad 4 continúa solicitando a los estudiantes que construyan gráficas de polígono de frecuencias y ojiva con los datos entregados en las Tablas de Distribución de

Frecuencias, frente a esto se construye y se compara la información obtenida en los gráficos. La construcción de gráficos realizada por los estudiantes se presenta en la siguiente figura N°

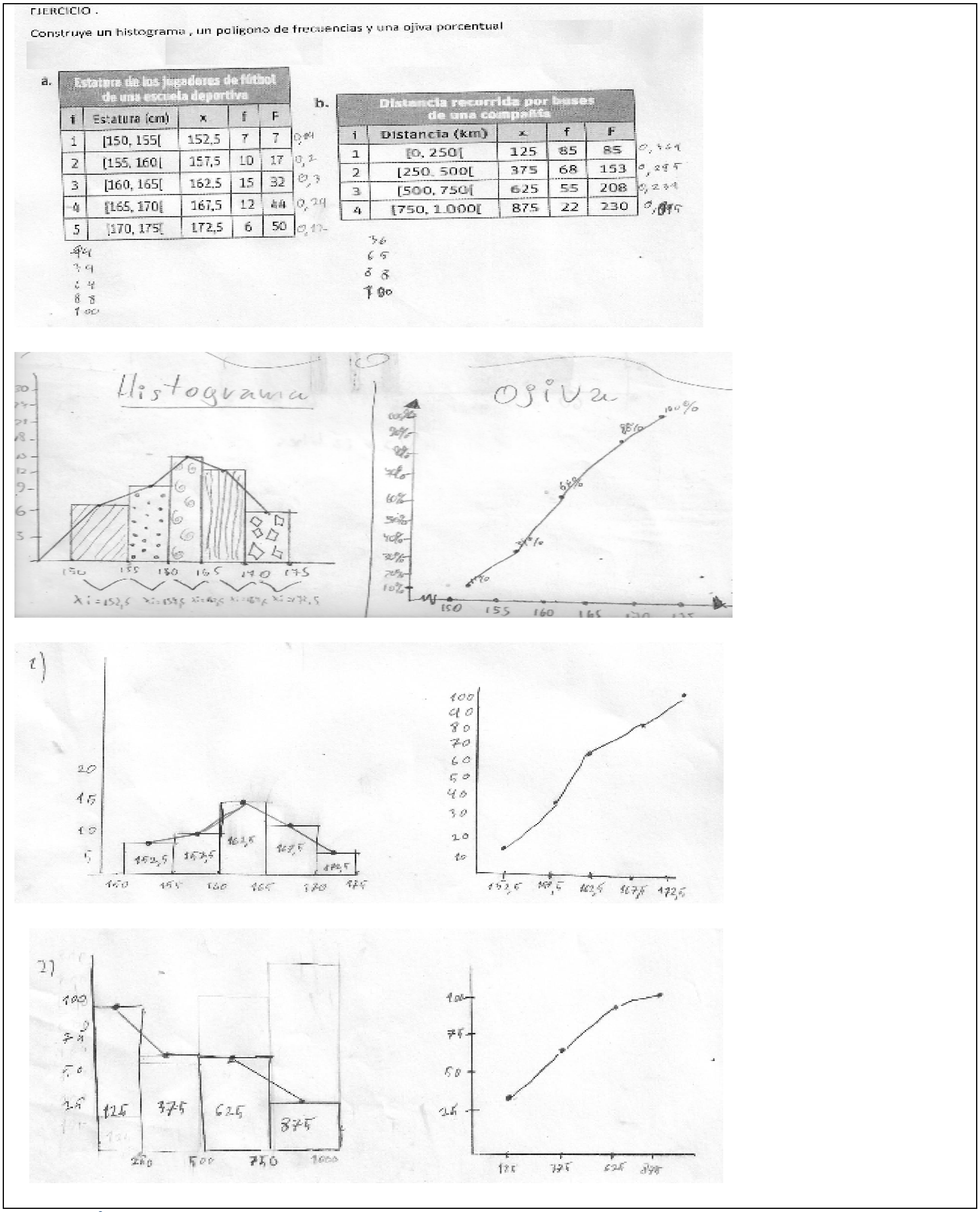


Figura N° 77.Construcción de Histograma, Polígono de Frecuencias y Ojiva realizada por los estudiantes.

4.1.9.DESCRIPCIÓN DE LAS CLASES. Clase 9. ¿CÓMO PODEMOS OBTENER E INTERPRETAR MEDIDAS DE TENDENCIA CENTRAL?

En esta clase se continua con estadística y en esta sesión se trabajará formas de obtener las medidas de Tendencia central a través de algunas representaciones gráficas y también en forma aritmética realizando un cálculo para datos sin agrupar y datos agrupados en tabla de Distribución de frecuencias con y sin intervalo.

Se recuerda el esquema que trabaja el Recorrido de Estudio e Investigación con su pregunta generatriz, junto a la sub-pregunta generada que se trabajará en esta clase:

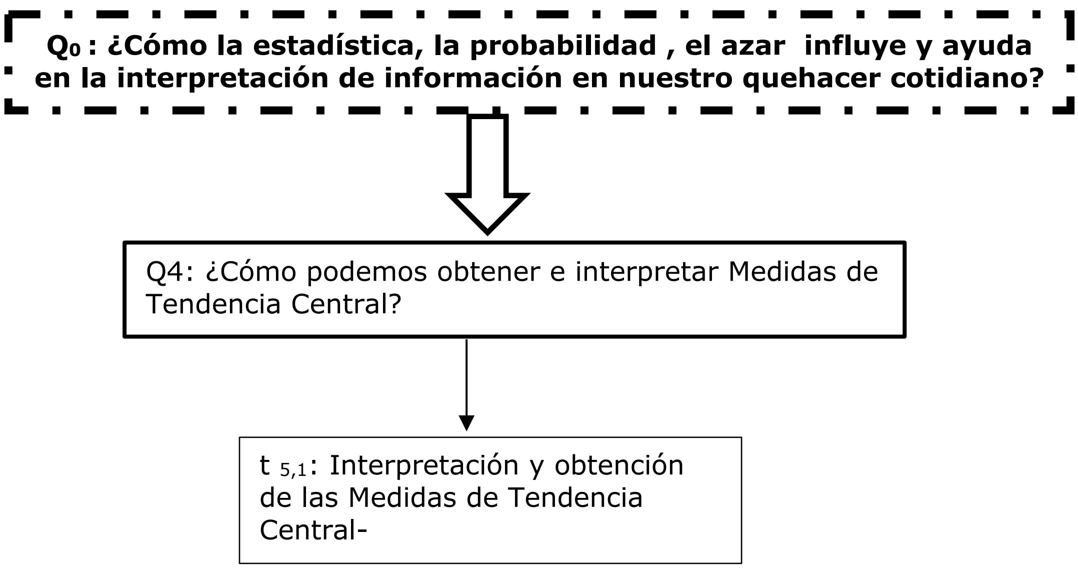


Figura N° 78.Dispositivo didáctico Estadística Medidas de Tendencia Central

Las respectivas organizaciones matemáticas que corresponden a esta etapa son:

- OM: Medidas de Tendencia Central en datos sin agrupar
- OM: Medidas de Tendencia Central en datos agrupados.

Se da inicio a la clase recordando las Medidas de Tendencia Central y se llevan al aula diversos textos de Probabilidad y Estadística para completar una lluvia de ideas en forma de mapa conceptual con el concepto de Media Aritmética, Mediana y Moda. Para ello se traen preparadas cartulinas con los conceptos y órdenes para formar el mapa conceptual junto a las flechas que darán secuencia al mapa que desarrollaran y coordinaran los grupos cooperativos que continúan trabajando de acuerdo a lo establecido al inicio del trabajo con REI.

El mapa conceptual construido por los estudiantes para el concepto de Media Aritmética es el que se presenta a continuación en la figura N° 78:

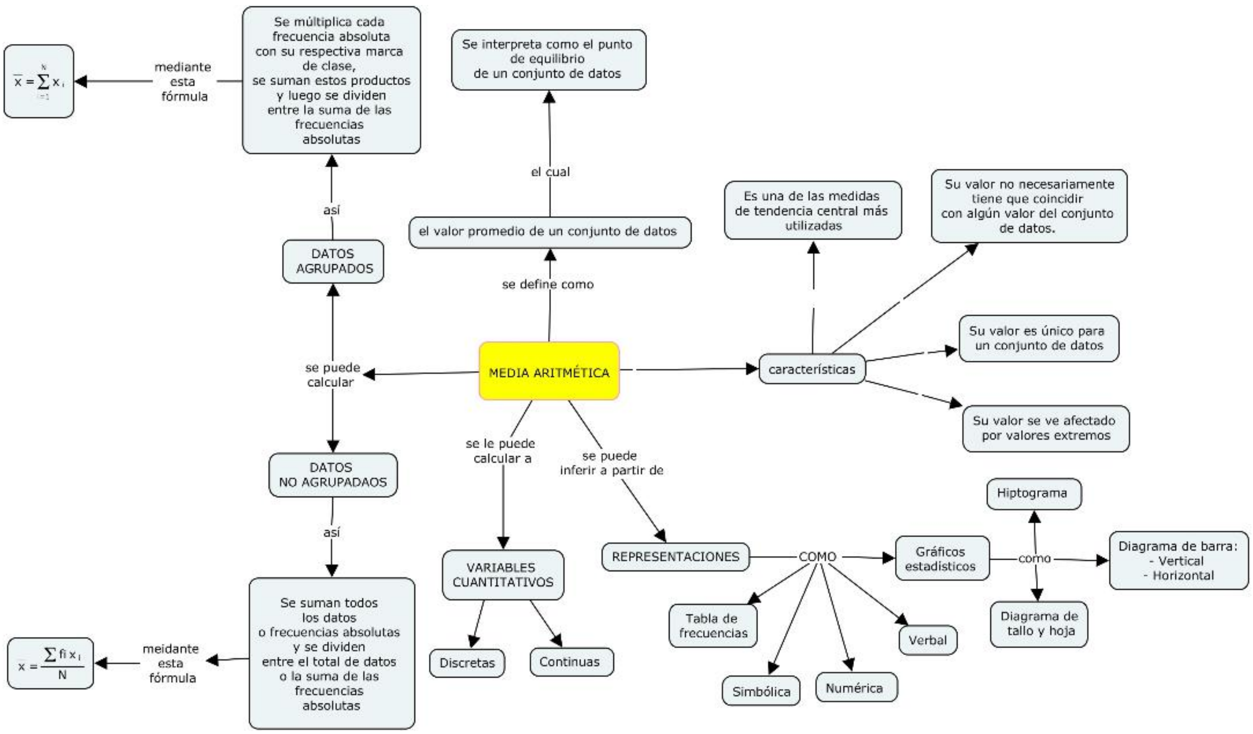


Figura 79.Mapa conceptual de la Media Aritmética, completado por los estudiantes en pizarrón, mediante trabajo colaborativo.

Los estudiantes miran cada uno de las viñetas que formaran una secuencia para determinar la ubicación de las flechas y las palabras que se utilizaran de conectores, además se consultan los textos llevados al aula y discuten con respecto a la posición más adecuada para dar forma al mapa conceptual. En general no presentan grandes dificultades para formar su mapa conceptual colaborativo con el concepto de Media Aritmética, en donde la profesora ubica el concepto principal en medio del pizarrón y en base a la participación de los estudiantes que se apoyan en textos llevados al aula y conexiones a imágenes bajadas de internet mediante consulta en sus dispositivos móviles.

El mapa conceptual construido por los estudiantes en trabajo colaborativo, para el concepto de Mediana es el que se presenta a continuación en la figura N° 79:

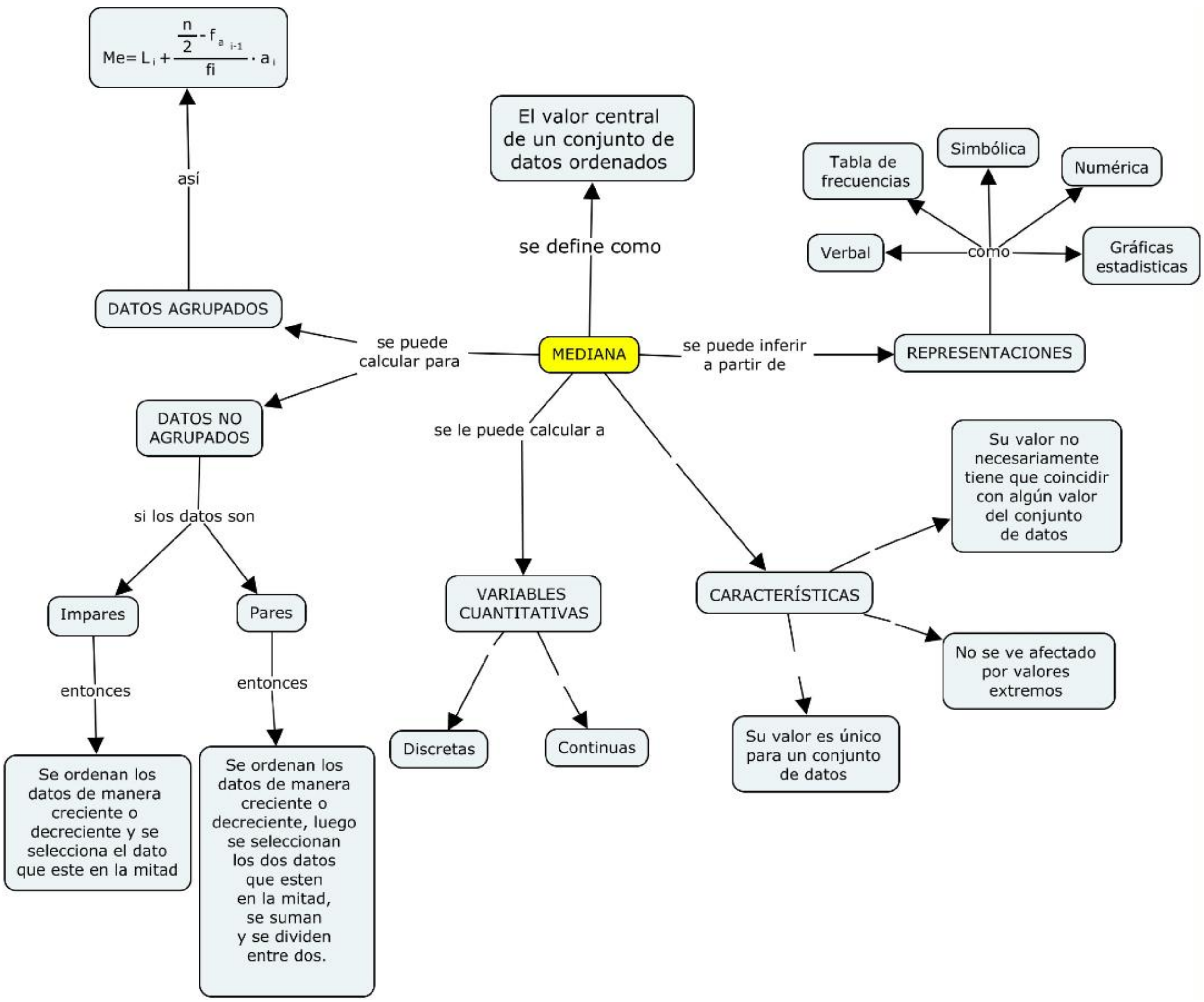


Figura N° 80.Construcción de mapa conceptual del concepto de Mediana realzado por los estudiantes en trabajo colaborativo.

De manera similar al trabajo realizado con la construcción del mapa conceptual de Media Aritmética se realiza el trabajo con los conceptos de Mediana. La profesora coloca en el centro el concepto de Mediana y los estudiantes completan con los recuadros, viñetas, flechas y frases o palabras conectoras para dar sentido lógico al mapa conceptual. En el concepto de Mediana los estudiantes presentan algún grado de dificultad, porque no la utilizan de manera frecuente para determinar conclusiones estadísticas y olvidan algunas características de ésta. Se consultan textos levados al aula y pueden trabajar con dispositivos móviles para realizar aportes a su grupo de trabajo.

El mapa conceptual construido por los estudiantes en trabajo colaborativo, para el concepto de Mediana es el que se presenta a continuación en la figura N°80:

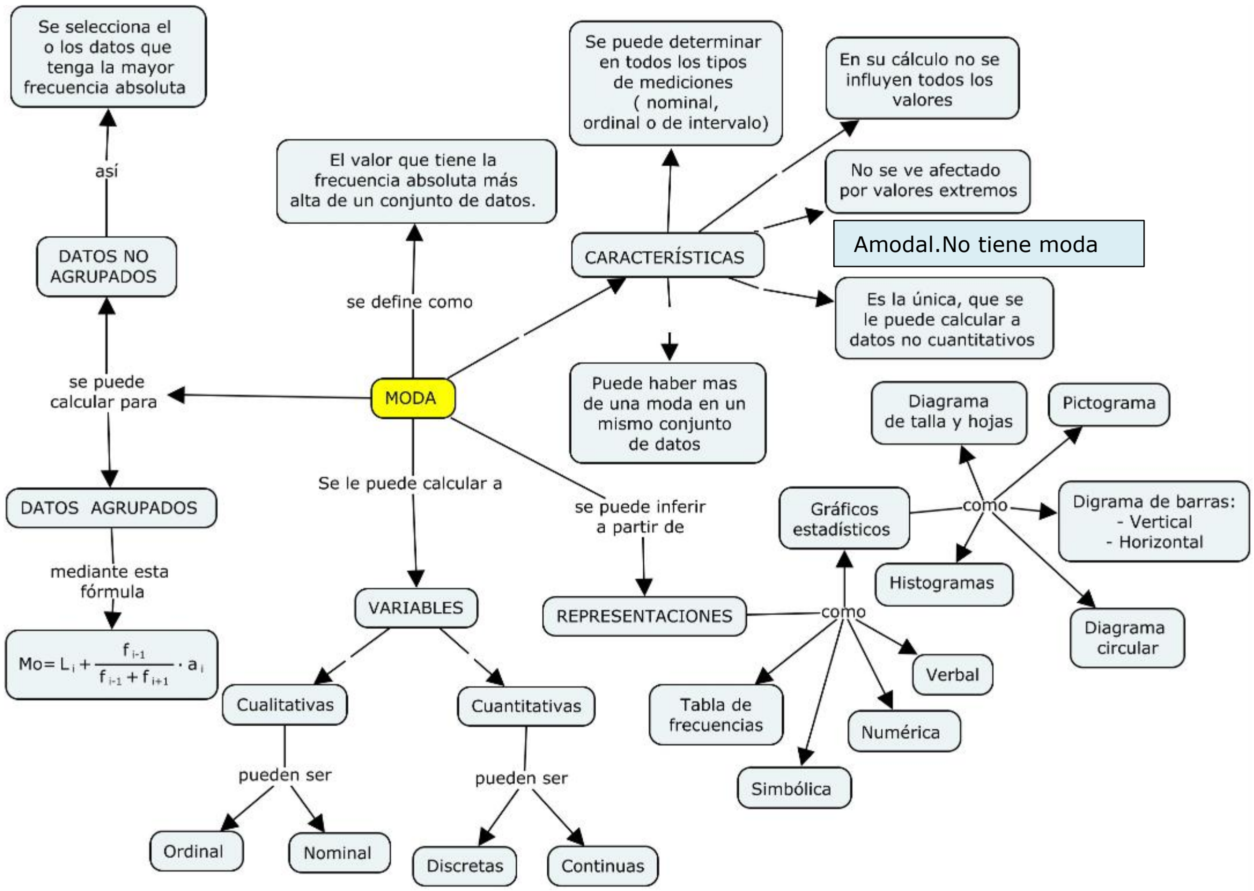


Figura N° 81.Construcción mapa conceptual Moda realizado por los estudiantes en forma colaborativa.

Al trabajar con el mapa conceptual de la Moda los estudiantes presentan algunas facilidades al conectar con el método de construcción de los mapas conceptuales realizados con anterioridad y buscan información que representa al concepto de Moda en los recuadros, viñetas, flechas y conectores para seguir un desarrollo lógico del mapa conceptual. Toda esta actividad se realiza de manera colaborativa y en un ambiente de trabajo distendido, donde los estudiantes buscan información e intercambian textos, así como también consultan en sus dispositivos móviles para contribuir al trabajo de su grupo de trabajo.

Actividad 1 Se propone a los estudiantes calcular las medidas de Tendencia Central para datos sin agrupar, datos agrupados en Tabla de Distribución de Frecuencias con y sin intervalo. En la figura N° 81 los estudiantes desarrollan el cálculo de Medidas de Tendencia

Central sin intervalo y no presentan dificultad para resolver.

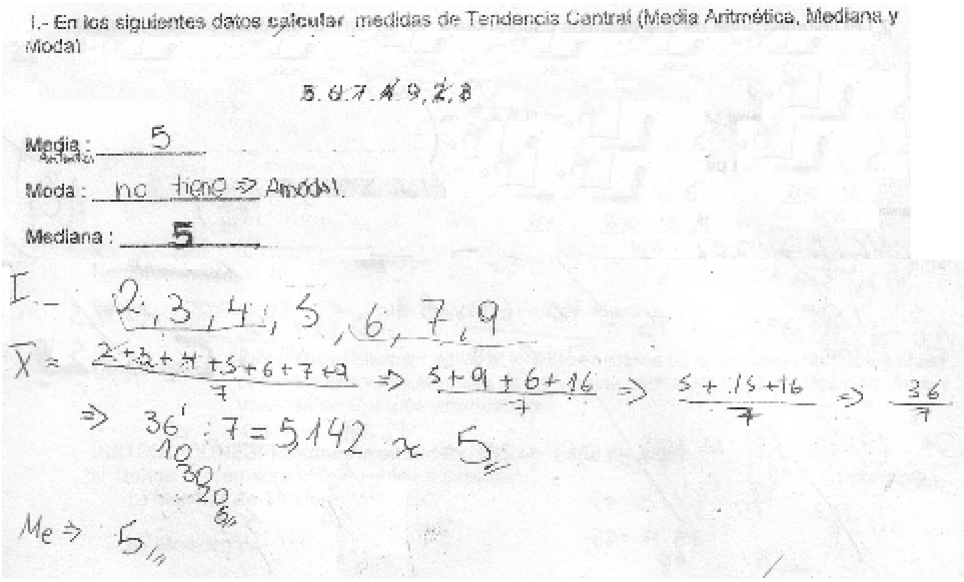


Figura N° 82.Cálculo de la mediana para datos sin agrupar.

Luego los estudiantes se involucran con una situación problemática en la que discuten la manera de ejecutar el cálculo porque son varios datos. Discuten sobre la manera resumida de ubicar los datos en una Tabla de Distribución de Frecuencias, finalmente optaron por realizar el cálculo ayudados por una tabla de distribución de frecuencias como se muestra en la figura N° 82.

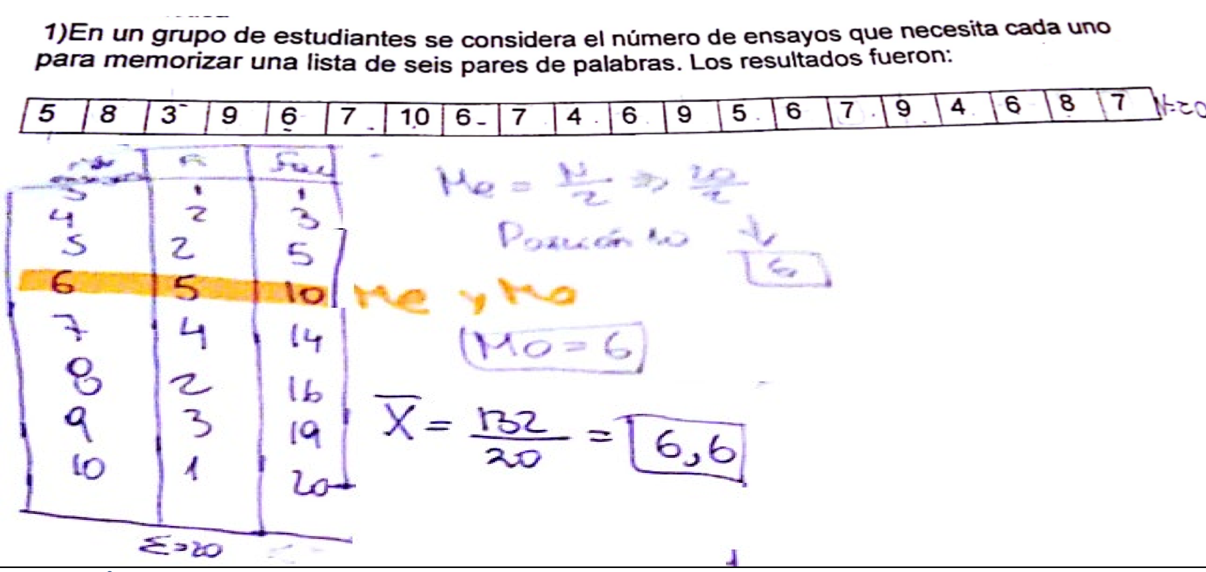


Figura N° 83.Cálculo de la Medidas de Tendencia Central para datos agrupados en Tabla de Distribución de Frecuencias.

Actividad 2 En esta actividad se realiza un cálculo de Medidas de Tendencia Central para datos agrupados en intervalos de clase. Los estudiantes presentan dificultades para realizar el cálculo debido, en primera instancia, se olvidan del cálculo de la Marca de Clase. Luego confunden la ubicación de la Mediana y la Moda con el valor de la variable y no utilizan la aplicación de la fórmula estadística para su cálculo

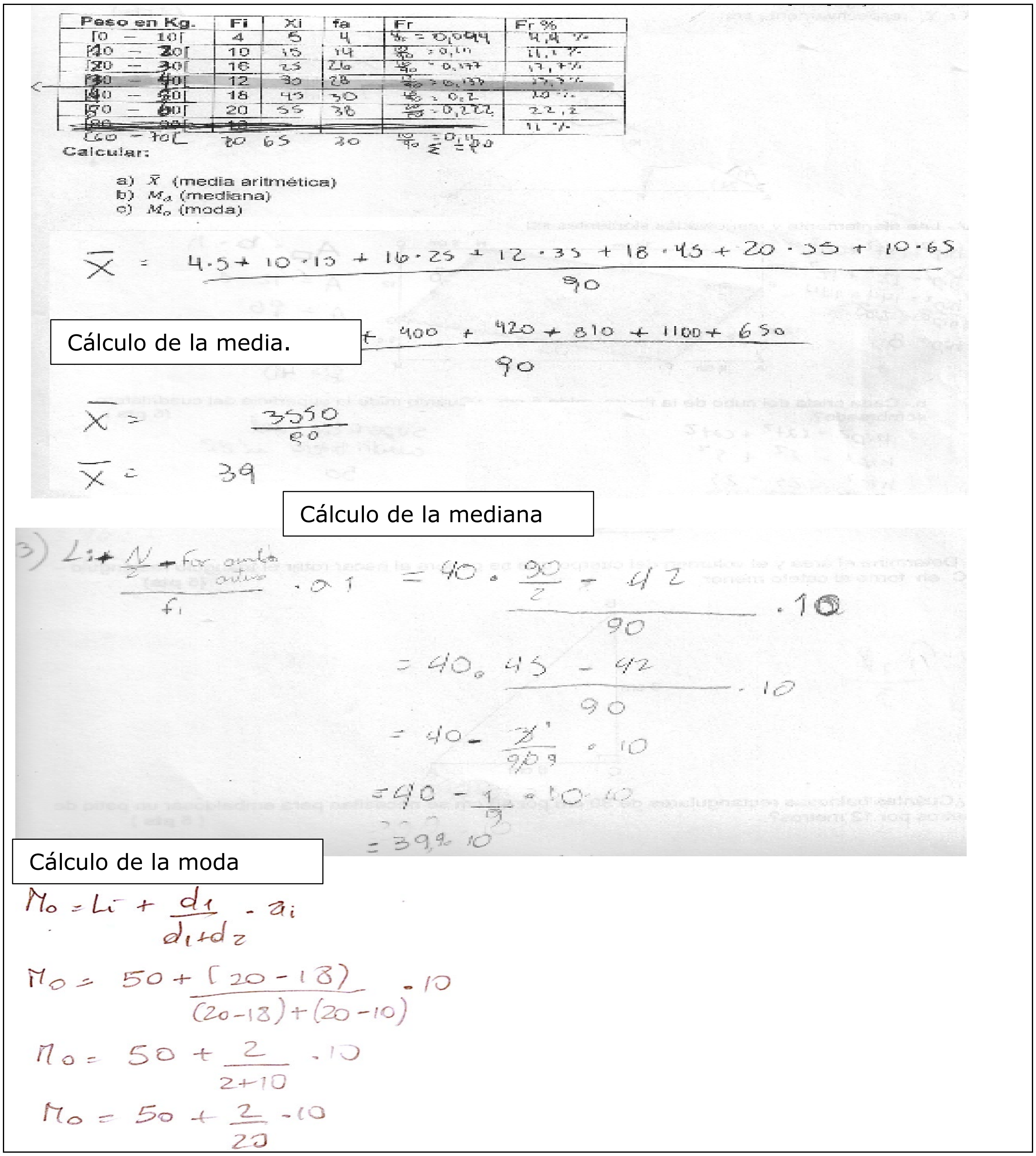


Figura 84.Cálculo de Medidas de Tendencia Central para datos agrupados con intervalo.

4.1.10. DESCRIPCIÓN DE LAS CLASES. Clase 10. ¿CUÁL ES EL APORTE DE LAS MEDIDAS DE POSICIÓN EN UN ESTUDIO ESTADÍSTICO? Y ¿QUÉ TIPO DE INFORMACIÓN NOS APORTAN LAS MEDIDAS DE DISPERSIÓN?

La última sesión de trabajo con el Recorrido de Estudio e Investigación REI, plantea desafíos en la comprensión de las medidas de posición y de dispersión. Se recuerda nuevamente el esquema de trabajo en base a una pregunta generatriz y la sub-pregunta como se observa en la figura N° 84

Q_0 : ¿Cómo la estadística, la probabilidad , el azar influye y ayuda en la interpretación de información en nuestro quehacer cotidiano?

Q5: ¿Cómo podemos obtener e interpretar Medidas de Tendencia Central?

$t_{5,1}$: Interpretación y obtención de las Medidas de Posición

$t_{5,2}$: Interpretación y obtención de las Medidas de Dispersión

Figura N° 85.Esquema dispositivo didáctico. Estadística

Las respectivas organizaciones matemáticas que corresponden a esta etapa son:

- OM: Medidas de Posición: Percentiles, Deciles, Quintiles y Percentiles
- OM: Medidas de Dispersión. Rango, Desviación Media,

Se da inicio a tarea 1 "$t_{5,1}$" de esta sesión mostrando láminas con las características de las medidas de posición y su aporte en hacer más específica la medición con respecto a los estadígrafos de Tendencia Central ya que permite obtener de grupos más pequeños de la muestra, las medidas de posición que se definen son las que se presentan en la figura N° 85

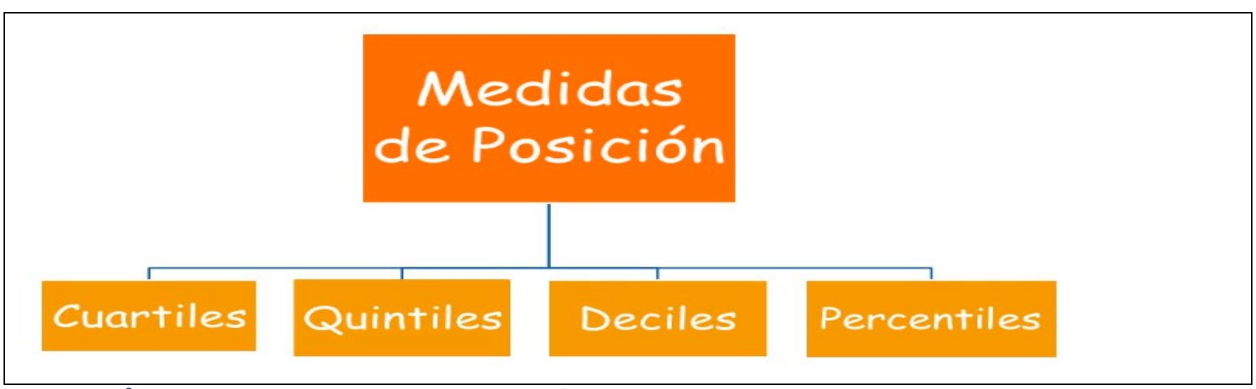


Figura N° 86.Esquema medidas de posición.

Se comenta a los estudiantes sobre información que aparece en los medios de prensa que utilizan quintiles, percentiles, etc , y que han escuchado saben de éste tema y se muestra algunas láminas para comentar como las que aparecen en la figura N° 86y 87

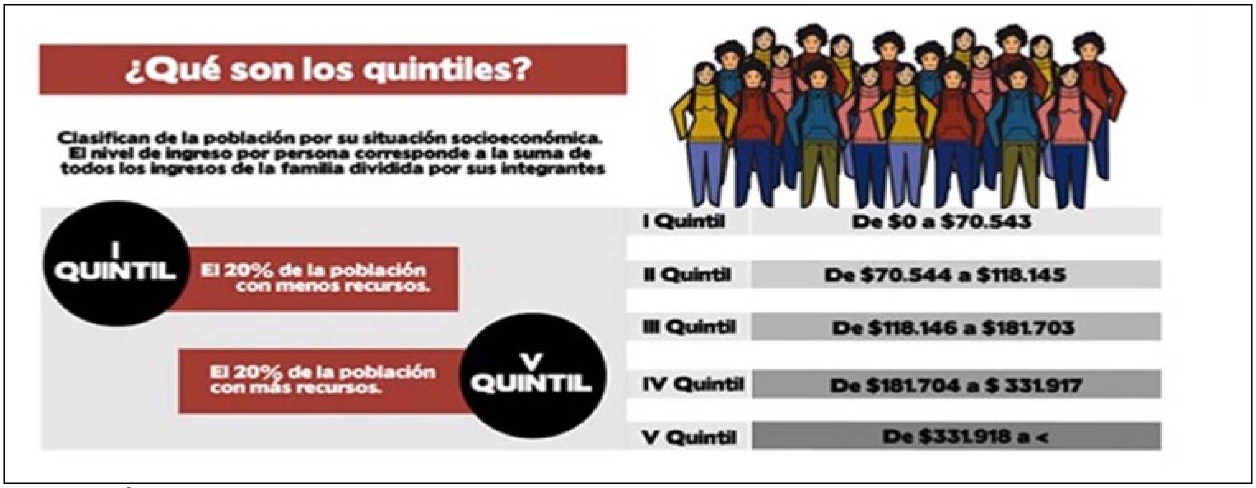


Figura N° 87.Información relacionada con Quintiles

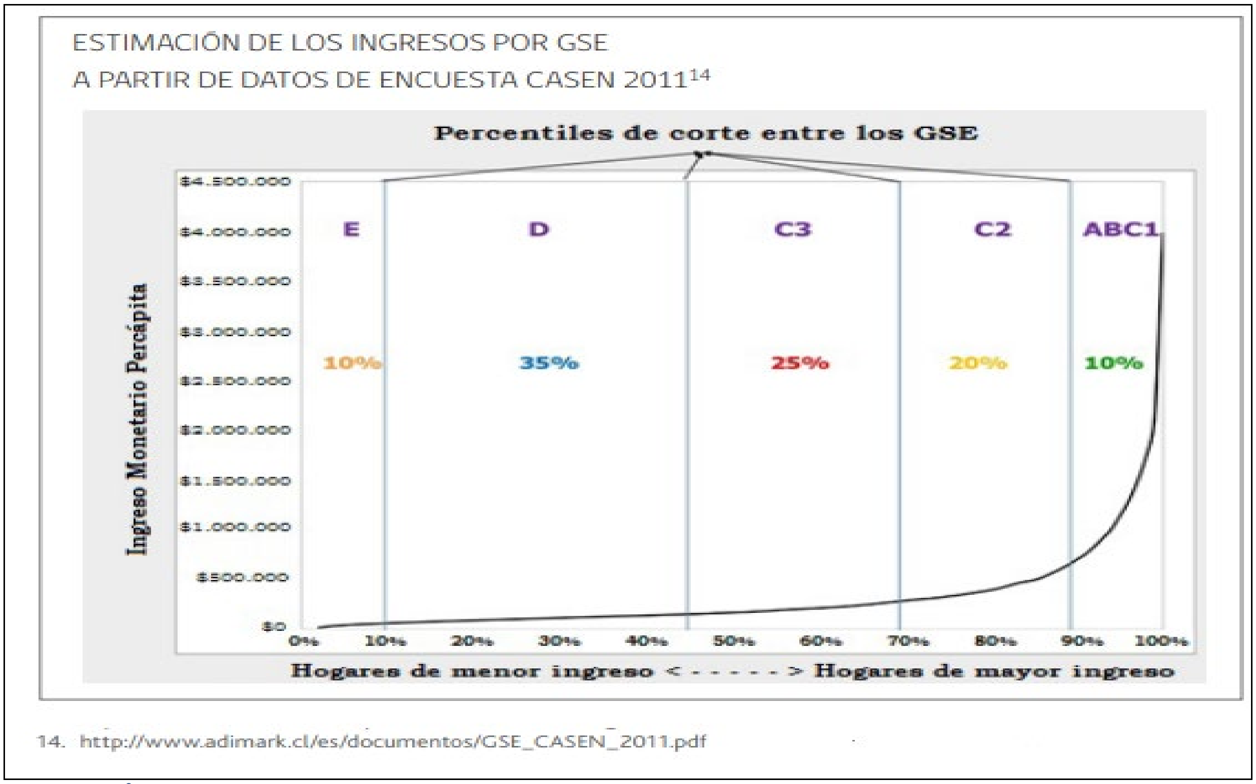


Figura N° 88-Información relacionada con los percentiles.

Luego con el recuerdo de los estudiantes y la consulta a textos de estadística llevados a la sala preparan láminas, carteles y formularios con las medidas de posición que se muestran en las figura N°s 88, 89, 90., 91 y 92.

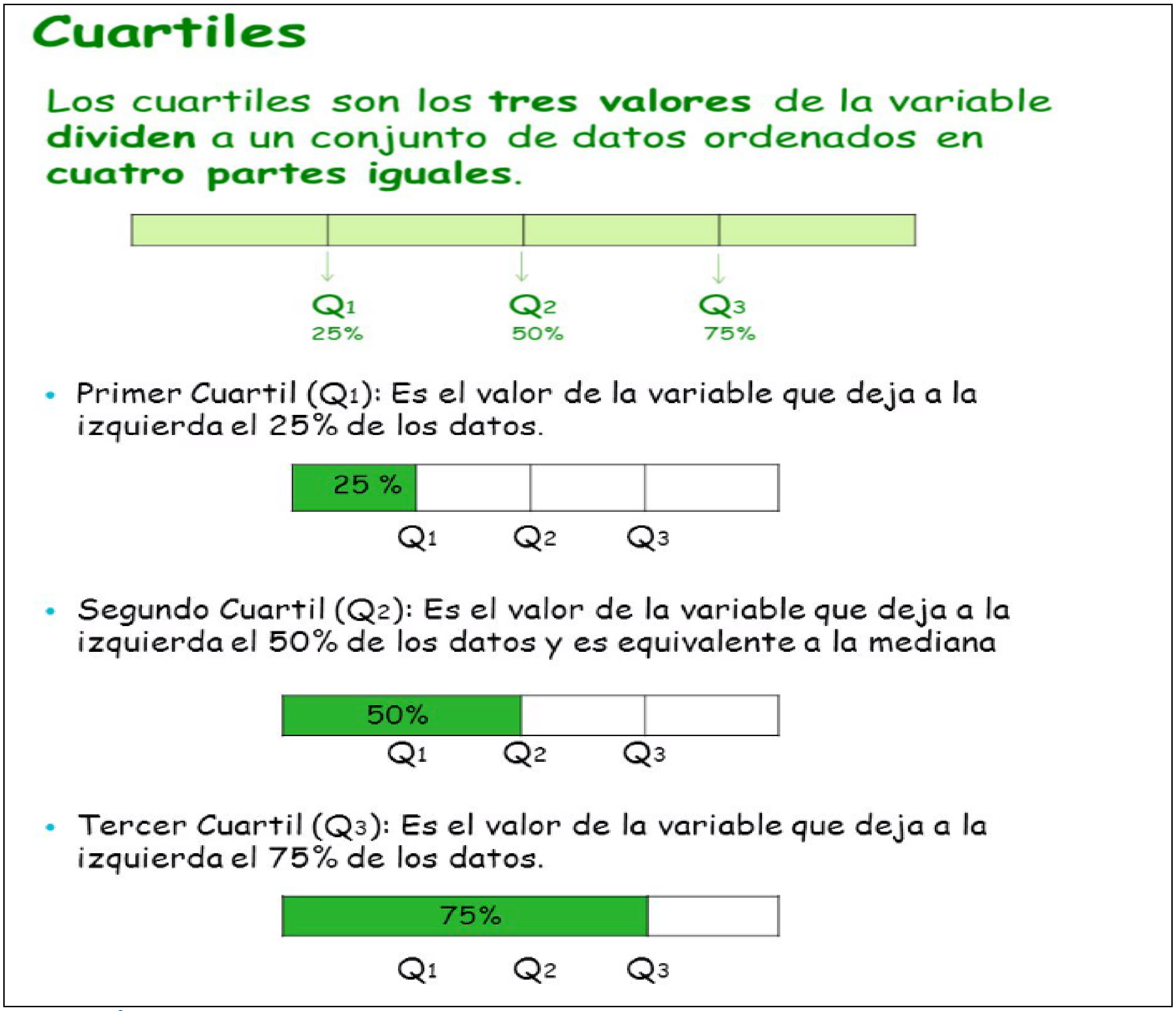


Figura N° 89. Láminas trabajadas con los estudiantes el concepto de Cuartil.

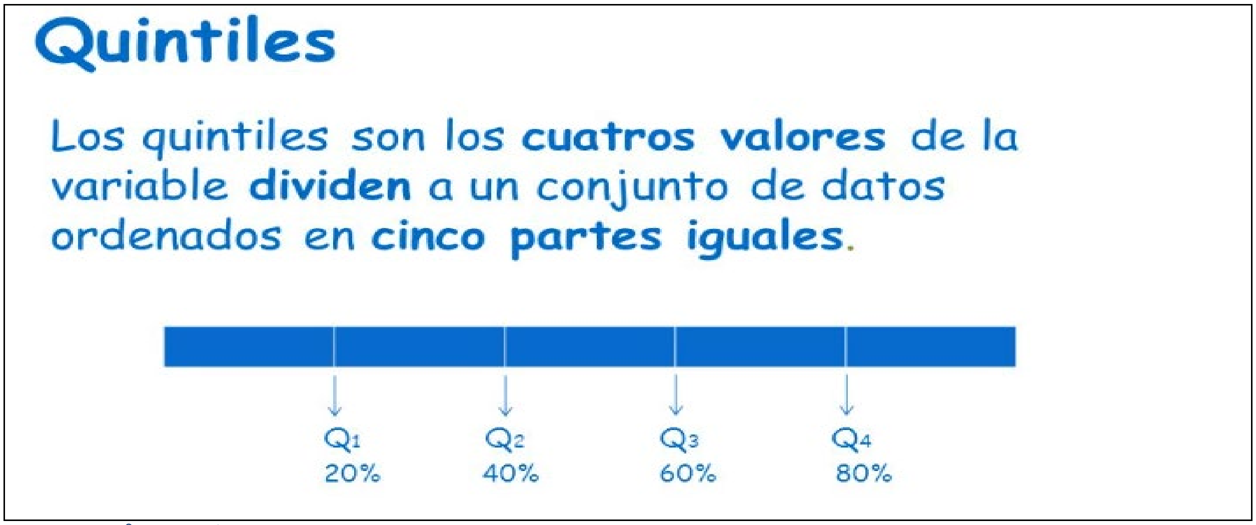


Figura N° 90.Láminas trabajadas con los estudiantes,concepto de Quintiles.

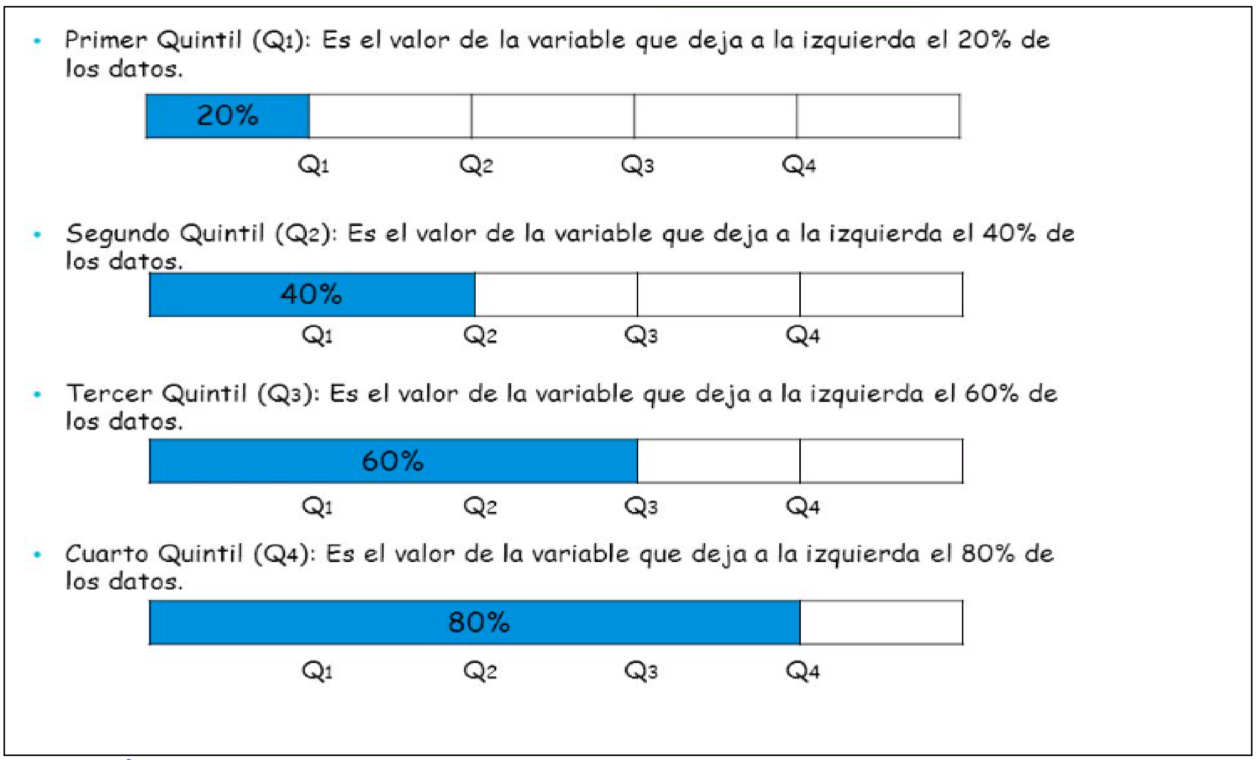


Figura N° 91.Lámina trabajada con los estudiantes para trabajar los quintiles

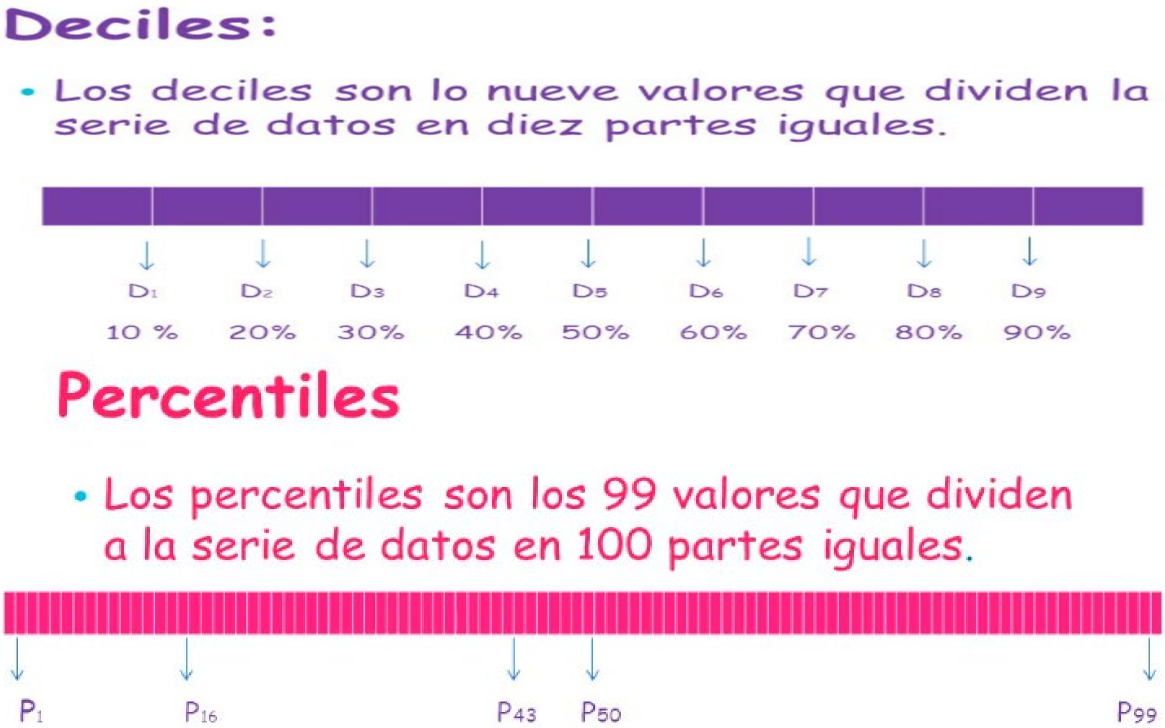
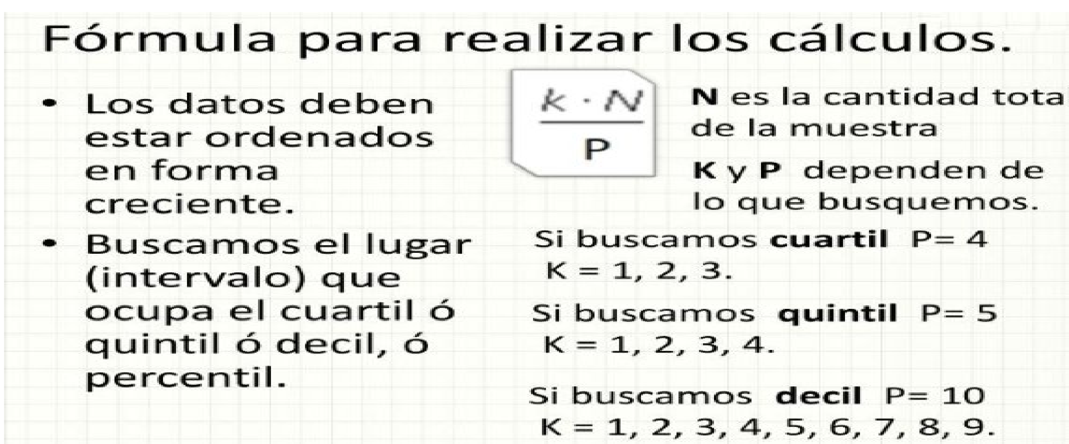


Figura N° 92.Lámina trabajada con los estudiantes para trabajar Deciles y Percentiles.



LUEGO :

se utiliza la siguiente expresión

$$E_K = L_i + a_i \frac{\left(\frac{K \cdot N}{P} - F_{i-1}\right)}{f_i}$$

Si buscamos:	Cuartil	Quintil	Deciles	Percentiles
P= Número de partes iguales	4	5	10	100
K= Número de divisiones (lo que buscamos)	1,2,3	1,2,3,4	1,2,3,4,5,6,7,8,9	1,2,3,4……, 99

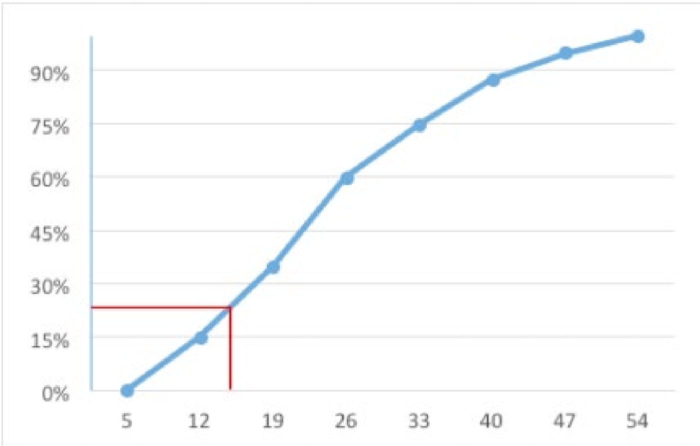
Figura N° 93.Fórmulas de cálculo de las medidas de posición

Después de trabajado el proceso de láminas se realiza una actividad para demostrar que las medidas de posición se pueden obtener mediante un método gráfico, esto es, mediante el análisis de la gráfica de la Ojiva.

Actividad 2 Se comenta a los estudiantes que las Medidas de Posición siempre tiene una interpretación ligada al porcentaje de datos que quedan bajo o sobre la medida de posición, esto significa que se puede observar la gráfica de la Ojiva con datos en frecuencia relativa o relativa porcentual y después de observar y realizar un análisis de la gráfica, se pueden obtener las Medidas de posición. Además se muestra un ejercicio con Tabla de Distribución de Frecuencias con su gráfica Ojiva para determinar Percentiles como se aprecia en la figura N° 93.

Intervalo	Frecuencia	Punto medio del intervalo	Frecuencia relativa %	Frecuencia relativa acumulada %
[5 – 12[	12	8,5	15%	15%
[12 – 19[	16	15,5	20%	35%
[19 – 26[	20	22,5	25%	60%
[26 – 33[	12	29,5	15%	75%
[33 – 40[	10	36,5	12,5%	87,5%
[40 – 47[	6	43,5	7,5%	95%
[47 – 54[	4	50,5	5%	100%
Total	80		100%	

El gráfico de frecuencia acumulada es:



El primer cuartil (Q_1) o percentil 25 sería la abscisa del punto (Q_1, 25) correspondiente a la intersección entre la recta que pasa por (12,15) y (19,35), y la recta y=25. La ecuación que pasa por los puntos mencionados es:

$y = \frac{20}{7}x - \frac{135}{7}$, **por lo que Q_1 satisface la ecuación:** $25 = \frac{20}{7} \cdot Q_1 - \frac{135}{7}$

De donde Q_1 = 15,5

Figura N° 94.Obtención de Medidas de Posición mediante el Método gráfico.

También se le comenta de un tipo de gráfico bastante moderno que permite trabajar los cuartiles y la dispersión de los datos que se denomina gráfica de caja y bigotes o "boxplots".

Herramienta gráfica de descripción de datos cuantitativos, muestra:

- La mediana y los cuartiles
- Valores átipicos

Valores atípicos valores inusualmente bajos o altos en relación al resto de valores de la data.

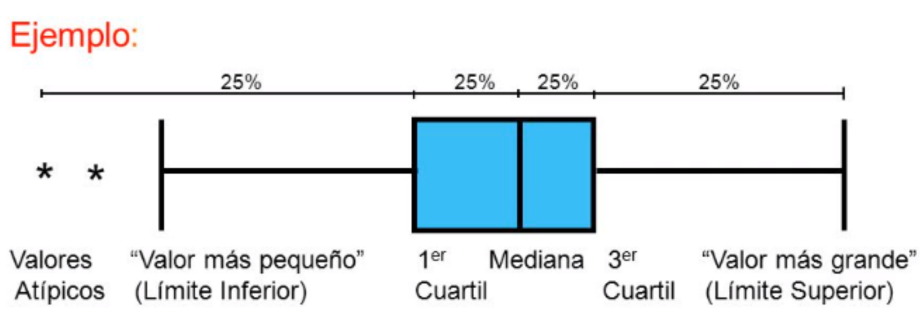


Figura N° 95.Lámina resumen construida con el gráfico de caja y bogote.

Luego se entrega a los estudiantes una propuesta de ejercicios con la gráfica de la Ojiva para determinar y analizar medidas de posición. Los estudiantes frente a la gráfica desarrollan sus conclusiones y determinan en su gran mayoría lo solicitado como se observa en la figura N° 96.

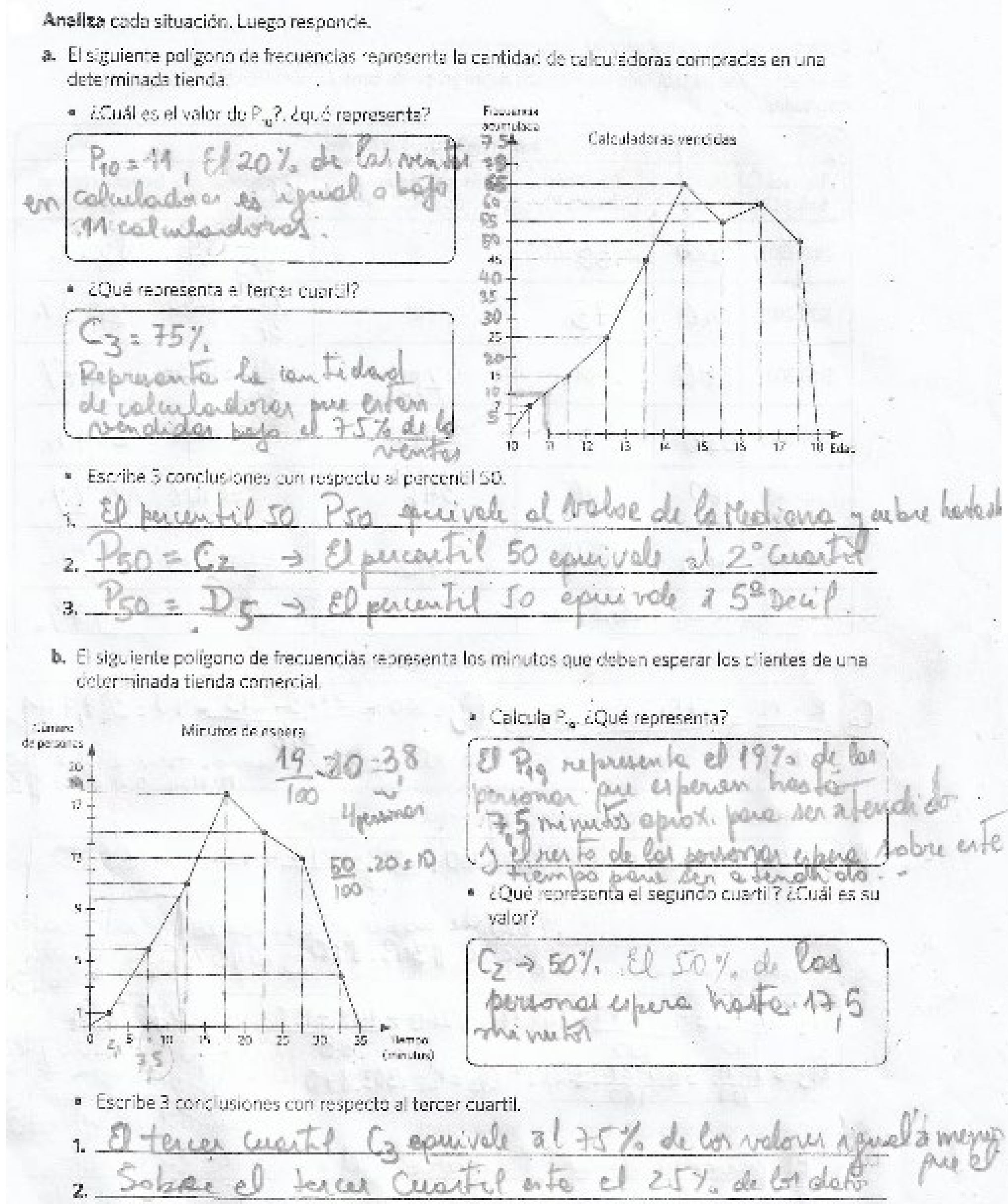


Figura N° 96.Obtención de las Medidas de Posición mediante el gráfico de la Ojiva

Una vez terminado el cálculo con la Ojiva se motiva a realizar el cálculo de las Medidas de Posición mediante fórmulas en tablas de distribución de Frecuencias para datos agrupados con y sin intervalo. En los estudiantes se observa una equivocación recurrente, en la cual confunden la posición obtenida con la fórmula $\frac{K \bullet N}{100}$ con el Valor de la Variable que corresponde a esa Medida de Posición.

Los estudiantes frente a las situaciones problemáticas propuestas con su desarrollo respectivo realizado entre pares logran llegar a la respuesta acertada. En primera instancia se trabaja con una tabla de Distribución de Frecuencias sin intervalo como se detalla en la figura N° 97.

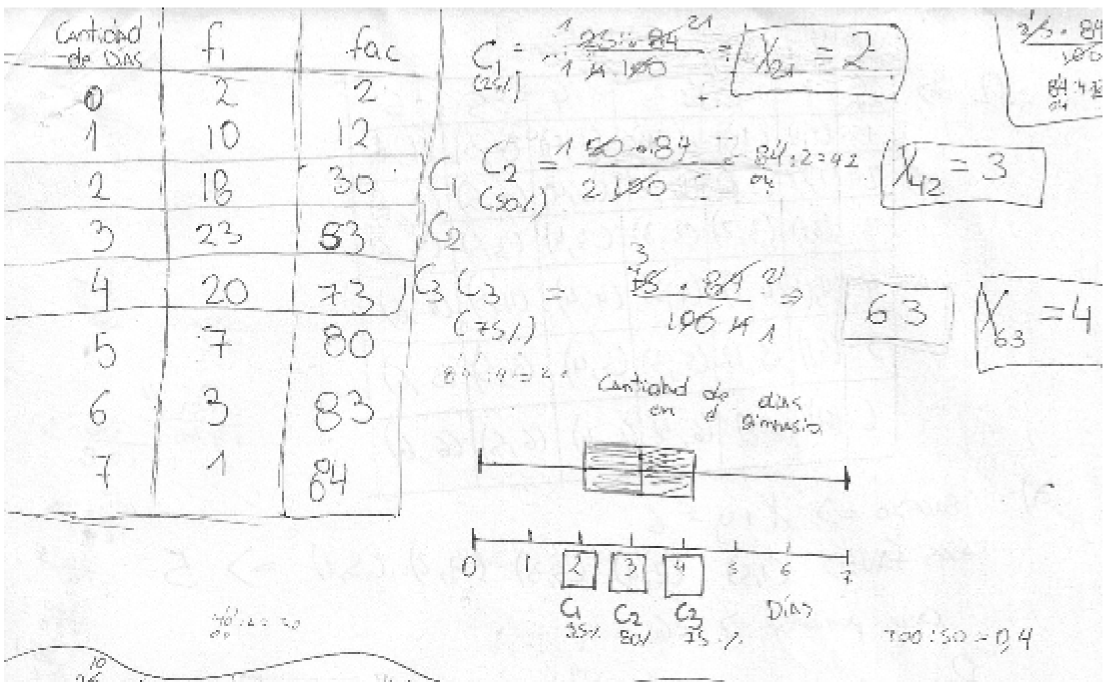


Figura N° 97.Calculo de Medidas de posición en Tablas de distribución de frecuencias sin intervalo

Algunos estudiantes realizan la gráfica de caja y bigotes o "boxplots", para representar la información como se muestra en la figura N° 98 y 99:

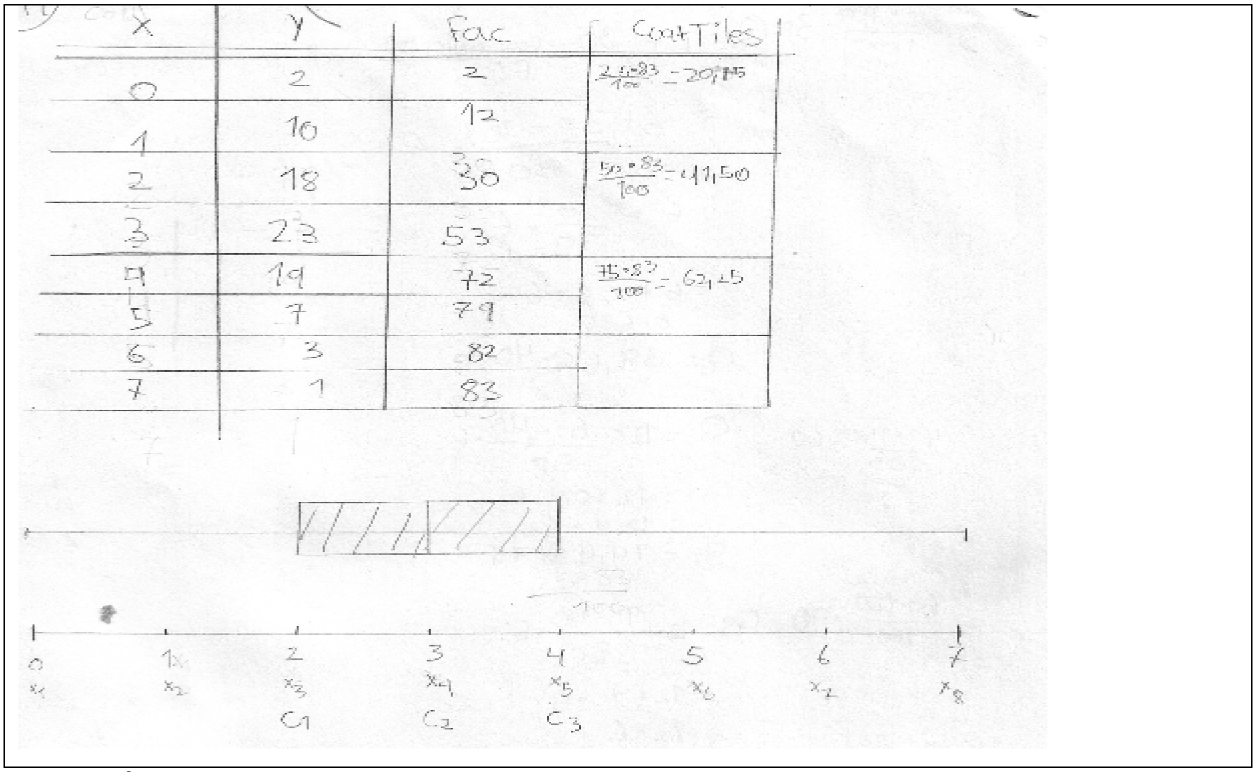
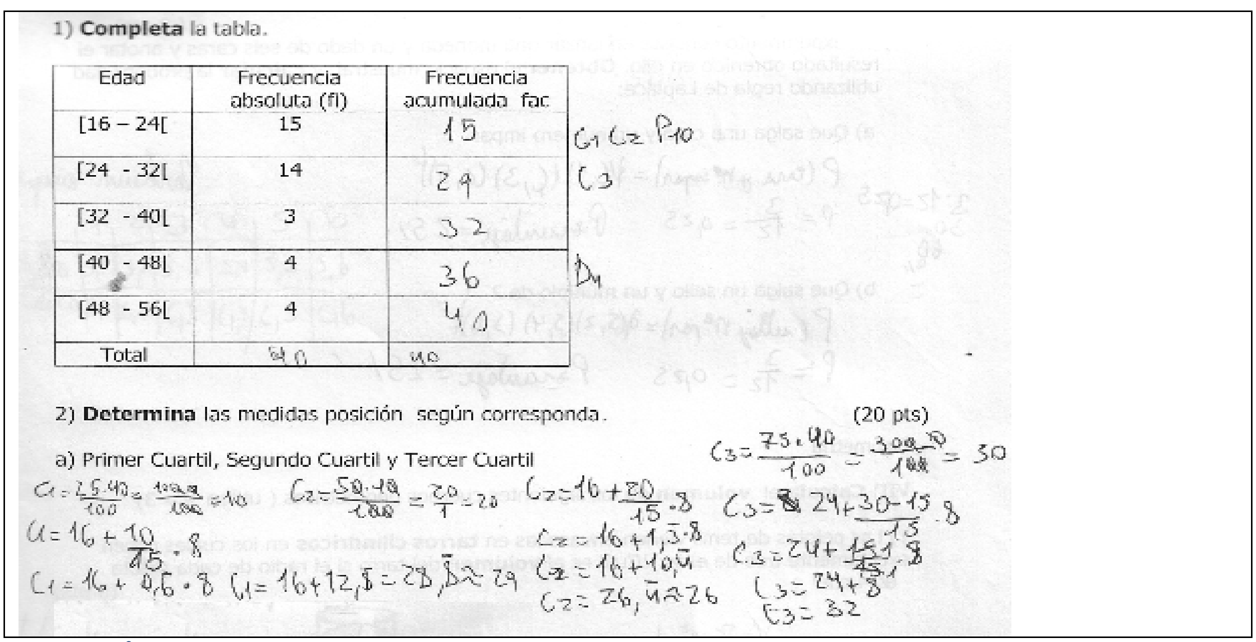


Figura N° 98.Cálculo de los cuartiles y diagrama de caja y bigotes

También se realiza el cálculo de Medidas de Posición en tablas de Distribución de Frecuencia con intervalo en donde utilizan la fórmula que los estudiantes encontraron para el cálculo de estas Medidas de Posición como se aprecia en la figura N° 99.



1) **Completa** la tabla.

Edad	Frecuencia absoluta (fi)	Frecuencia acumulada fac
[16 – 24[	15	15
[24 - 32[	14	29
[32 - 40[	3	32
[40 - 48[	4	36
[48 - 56[	4	40
Total	40	40

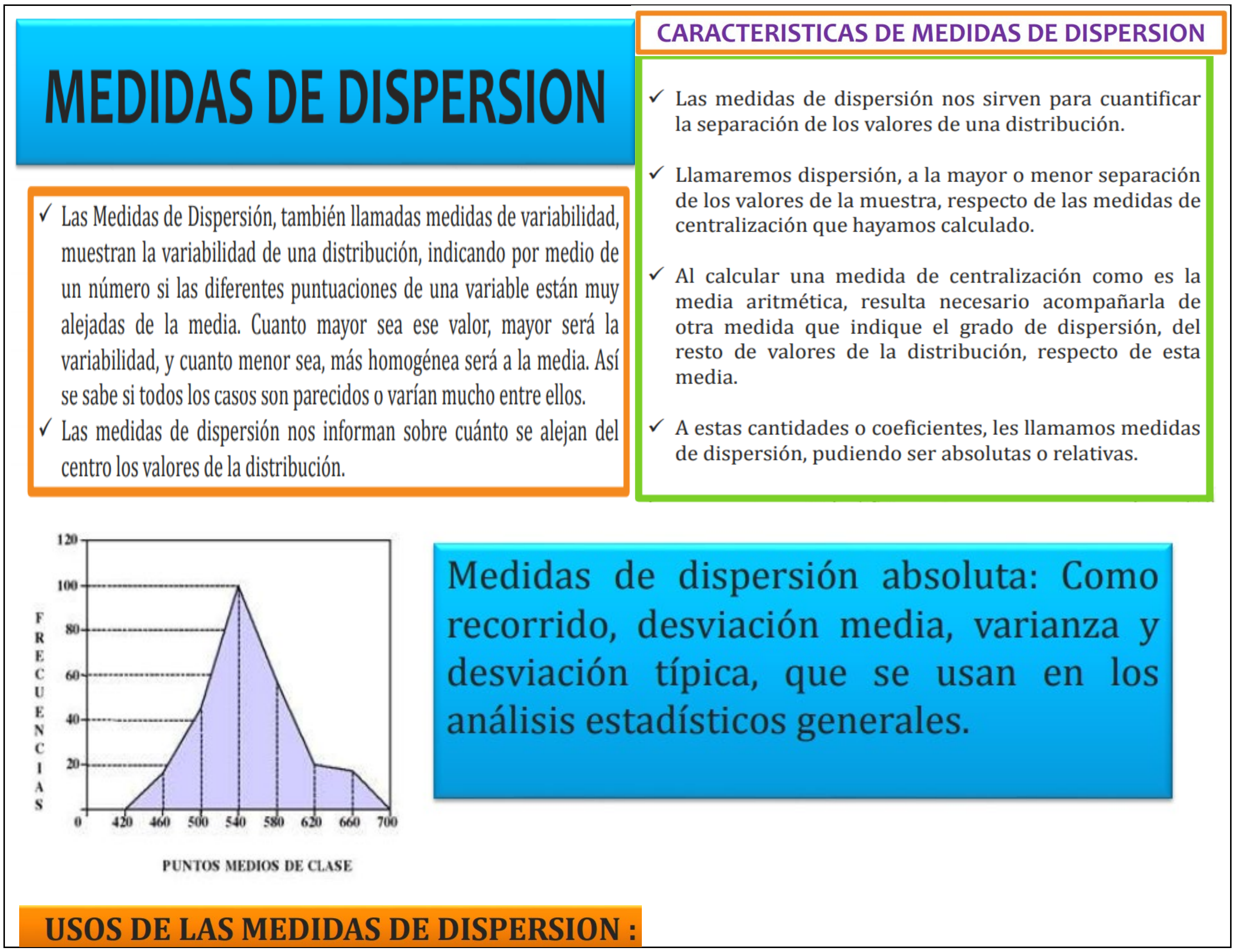
2) **Determina** las medidas posición según corresponda. (20 pts)

a) Primer Cuartil, Segundo Cuartil y Tercer Cuartil

Figura N° 99.Cálculo de Medidas de posición con tabla de distribución con intervalo.

Los estudiantes para evitar confusión de cálculos primero obtienen la posición del Cuartil y luego aplican la fórmula general para la obtención de cuartiles y algunos estudiantes comprueban realizando gráfica de Ojiva.

Actividad 3 El trabajo para realizar está determinado por el concepto de Medidas de Dispersión para ello los estudiantes trabajan buscando información en grupos colaborativos. ¿Qué son las Medidas de Dispersión? ¿ y cuáles son estas medidas?¿ Que permiten medir?. Además se entrega a los estudiantes material para recortar y pegar como se muestra en la figura N° 100 y101:



1) RANGO O RECORRIDO

El Rango es la diferencia entre el mayor y el menor de los datos de una distribución estadística.

$$R = x_n - x_1$$

CARACTERÍSTICAS DE RANGO O RECORRIDO

- Solo suministra información de los extremos de la variable.
- Informa sobre la distancia entre el mínimo y máximo valor observado.
- Se limita su uso a una información inicial.

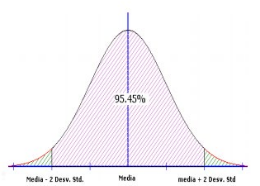
Figura N° 100.Recolección de información sobre las Medidas de dispersión.

2) DESVIACIÓN MEDIA

La Desviación Media es la diferencia entre cada valor de la variable estadística y la media aritmética.
La desviación media se representa por :

$$D_{\bar{x}} = \frac{|x_1 - \bar{x}| + |x_2 - \bar{x}| + \dots + |x_n - \bar{x}|}{N} \quad D_{\bar{x}}$$

$$D_{\bar{x}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} |x_i - \bar{x}|}{N}$$



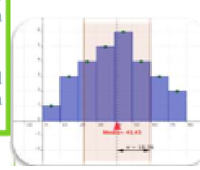
CARACTERÍSTICAS DE LA DEVIACIÓN MEDIA

- Todas la observaciones se usan en el calculo.
- No tiene la influencia debido a los valores altos y bajos.

3) Desviación Estándar o Típica

Es una medida de dispersión para variables de razón (variables cuantitativas o cantidades racionales) y de intervalo. Se define como la raíz cuadrada de la varianza de la variable.

En otras palabras es una medida del grado de dispersión de los datos con respecto al valor promedio. La desviación típica es simplemente el "promedio" o variación esperada con respecto a la media aritmética.



Se representa por σ, y tiene la siguiente expresión:

$$\sigma = +\sqrt{\sigma^2} = +\sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2 \cdot n_i}{N}}$$

Figura N° 101.Medidas de Dispersión y sus características resumidas por los estudiantes.

Para finalizar se realiza una aplicación en dos situaciones problemáticas que los estudiantes deben pensar, dialogar y conjeturar con respecto al trabajo a realizar. En primer lugar se proponen dos conjunto de datos para analizar que sucede con su dispersión como se muestra en la figura N° 102.

Actividad: Una consulta médica atiende en una hora a niños de diferentes edades:

Si se comparan dos grupos de niños con sus respectivas edades

GRUPO A : 2 – 4 – 5 – 5 – 7 - 8

GRUPO B : 2 – 4 – 5 – 5 – 7 – 9

Obtener las Medidas de Tendencia Central y de Medidas de dispersión de los dos grupos de pacientes

a) $\bar{X}$ conjunto A $= \frac{2+4+5+5+7+8}{6} = \frac{31}{6} = 5{,}16$

$\bar{X}$ conjunto B $= \frac{2+4+5+5+7+9}{6} = \frac{32}{6} = 5{,}3$

b) Me conjunto A $= 2 - 4 - \boxed{5 - 5} - 7 - 8$

$\frac{5+5}{2} = \frac{10}{2} = 5$

Me conjunto B $= 2 - 4 - \boxed{5 - 5} - 7 - 9$

$\frac{5+5}{2} = \frac{10}{2} = 5$

c) Moda conjunto A = El que mas se repite

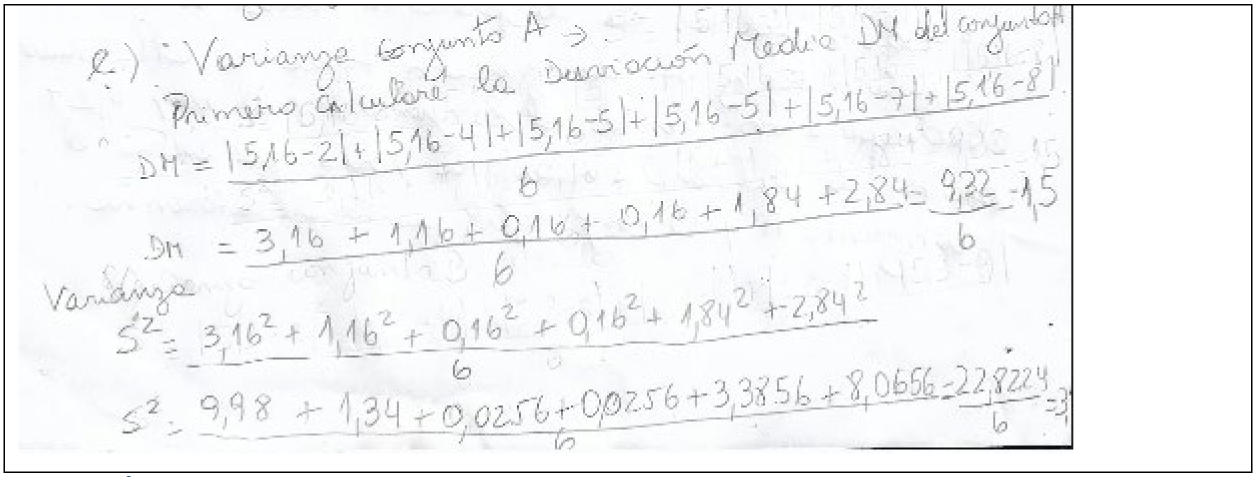
Mo = 5

Moda conjunto B = El que mas se repite

Mo = 5

d) Rango conjunto A $\Rightarrow 8 - 2 = 6$

Rango conjunto B $\Rightarrow 9 - 2 = 7$



e.) Varianza Conjunto A → Primero calcularé la Desviación Media DM del conjunto A

$$DM = \frac{|5,16-2|+|5,16-4|+|5,16-5|+|5,16-5|+|5,16-7|+|5,16-8|}{6}$$

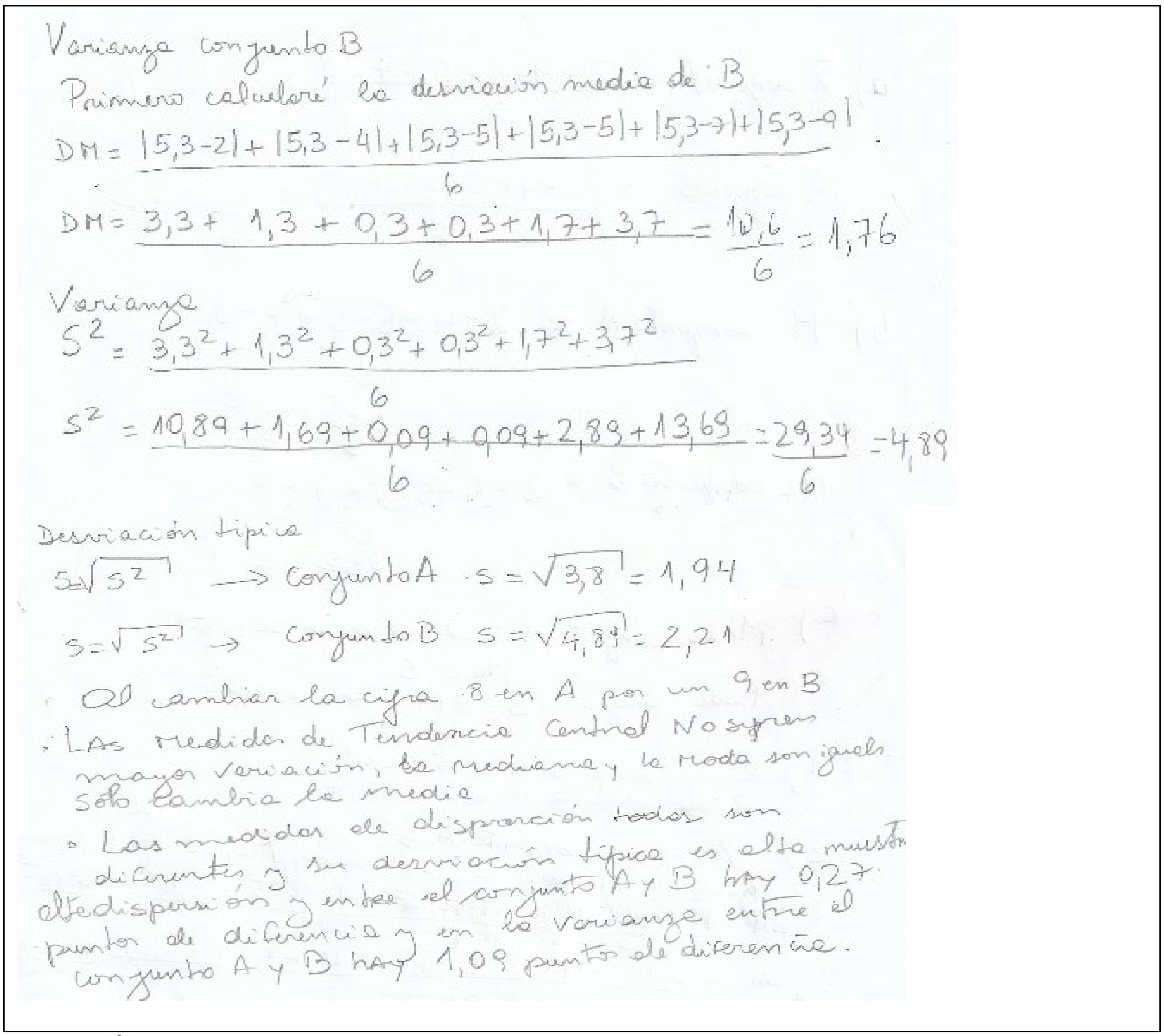
$$DM = \frac{3,16 + 1,16 + 0,16 + 0,16 + 1,84 + 2,84}{6} = \frac{9,32}{6} = 1,5$$

Varianza

$$S^2 = \frac{3,16^2 + 1,16^2 + 0,16^2 + 0,16^2 + 1,84^2 + 2,84^2}{6}$$

$$S^2 = \frac{9,98 + 1,34 + 0,0256 + 0,0256 + 3,3856 + 8,0656}{6} = \frac{22,8224}{6} = 3$$

Figura N° 102.Comparación de dos grupos de datos con respecto a las Medidas de Tendencia Central y con Respecto a Medidas de Dispersión



Varianza conjunto B

Primero calcularé la desviación media de B

$$DM = \frac{|5,3-2|+|5,3-4|+|5,3-5|+|5,3-5|+|5,3-7|+|5,3-9|}{6}$$

$$DM = \frac{3,3 + 1,3 + 0,3 + 0,3 + 1,7 + 3,7}{6} = \frac{10,6}{6} = 1,76$$

Varianza

$$S^2 = \frac{3,3^2 + 1,3^2 + 0,3^2 + 0,3^2 + 1,7^2 + 3,7^2}{6}$$

$$S^2 = \frac{10,89 + 1,69 + 0,09 + 0,09 + 2,89 + 13,69}{6} = \frac{29,34}{6} = 4,89$$

Desviación típica

$s = \sqrt{s^2}$ → Conjunto A $s = \sqrt{3,8} = 1,94$

$s = \sqrt{s^2}$ → Conjunto B $s = \sqrt{4,89} = 2,21$

Al cambiar la cifra 8 en A por un 9 en B

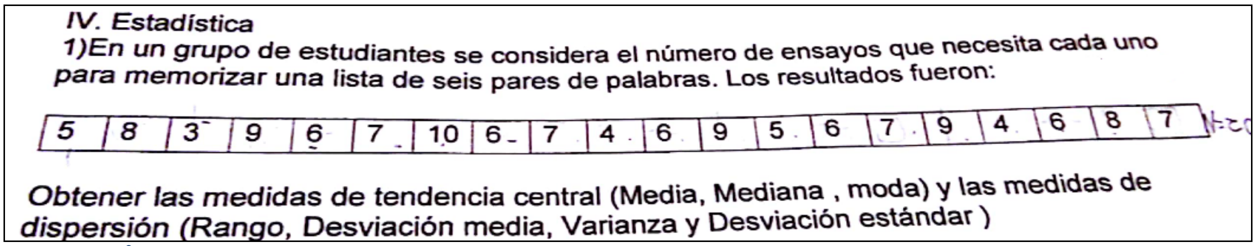
- LAs medidas de Tendencia Central No sufren mayor variación, la mediana y la moda son iguales sólo cambia la media
- Las medidas de disperción todas son diferentes y su desviación típica es alta muestra alta dispersión y entre el conjunto A y B hay 0,27 puntos de diferencia y en la varianza entre el conjunto A y B hay 1,09 puntos de diferencia.

Figura N° 103.Comparación de datos de dos grupos mediante medidas de dispersión.

Después de realizada esta actividad, presentada en la figura N° 104 y 105 los estudiantes observan como un solo valor en este conjunto de datos influye de manera importante en las Medidas de Desviación pero no ocurre una notoria variación en las Medidas de Tendencia Central, en la cual la Moda y la Mediana se mantienen constante y sólo la Media Aritmética sufre una pequeña variación.

Para la siguiente Actividad se retoma el problema trabajado en Medidas de Central para calcular ahora con esos datos las Medidas de Dispersión. El problema consistía en lo siguiente:

<u>Problema.</u> En un grupo de estudiantes se considera el número de ensayos que necesita cada uno para memorizar una lista de seis pares de palabras. Los resultados se ilustran a continuación en la figura N° 104:



IV. Estadística

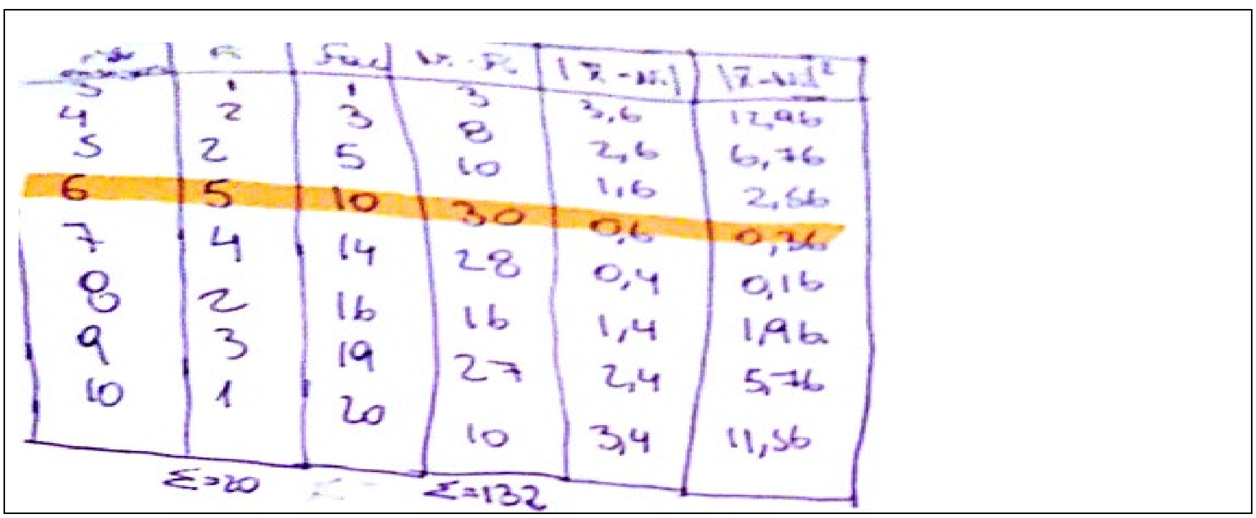
1)En un grupo de estudiantes se considera el número de ensayos que necesita cada uno para memorizar una lista de seis pares de palabras. Los resultados fueron:

5	8	3	9	6	7	10	6	7	4	6	9	5	6	7	9	4	6	8	7

***Obtener las medidas de tendencia central* (Media, Mediana , moda) y las medidas de *dispersión* (Rango, Desviación media, Varianza y Desviación estándar)**

Figura N° 104.Situación problemática para obtener Medidas de Tendencia Central y Dispersión

Como los estudiantes ya analizaron esta problemática desde las Medidas Tendencia Central ahora sólo falta agregar las Medidas de dispersión y verificar cuán alejado esta cada dato de la media aritmética y cuan disperso se encuentran los datos. Los estudiantes utilizan varias técnicas para calcular estos valores de dispersión como se observa en la figura N° a continuación:



x_i	f_i	F_a	$x_i \cdot f_i$	$\lvert \bar{x} - x_i \rvert$	$\lvert \bar{x} - x_i \rvert^2$
3	1	1	3	3,6	12,96
4	2	3	8	2,6	6,76
5	2	5	10	1,6	2,56
6	5	10	30	0,6	0,36
7	4	14	28	0,4	0,16
8	2	16	16	1,4	1,96
9	3	19	27	2,4	5,76
10	1	20	10	3,4	11,56
	Σ=20		Σ=132		

$$\bar{X} = \frac{132}{20} = \boxed{6,6}$$

$$DM = \frac{1 \cdot 3,6 + 2,6 \cdot 2 + 1,6 \cdot 2 + 0,6 \cdot 5 + 0,4 \cdot 4 + 1,4 \cdot 2 + 3,4 \cdot 3 + 3,4 \cdot 1}{132}$$

$$\frac{3,6 + 5,2 + 3,2 + 3 + 1,6 + 2,8 + 7,2 + 3,4}{132}$$

$$DM = \frac{30}{132} = \boxed{0,22}$$

$$S^2 = \frac{12,96 + 13,52 + 5,12 + 1,8 + 0,64 + 3,92 + 17,28 + 11,56}{132}$$

$$S^2 = \frac{66,8}{132} = \boxed{0,50}$$

$$S = \sqrt{0,50}$$

$$S = \boxed{0,70}$$

$$R = 10 - 3 = \boxed{7}$$

Figura N° 105.CÁLCULO DE MEDIDAS DE DISPERSIÓN

Capitulo V. ANÁLISIS DE RESULTADOS

CAPÍTULO 5: RESULTADOS

5.1 Resultados de los Datos Cualitativos

El dispositivo didáctico REI, que se desarrolló en el transcurso del semestre se tuvo que ajustar a las fechas establecidas por la institución, las cuales se entregaron en el calendario académico. Al iniciar el trabajo con el dispositivo didáctico se estableció un acuerdo entre los estudiantes y el profesor, donde se hace énfasis a la formación de grupos de trabajos los cuales deben mantenerse en el transcurso del aplicación del dispositivo didáctico, además todos los integrantes debían asumir funciones al interior del grupo, la asistencia a clases debía ser de forma regular para no entorpecer el avance de los grupos. El trabajo con el dispositivo didáctico se evaluó grupalmente. Para realizar el análisis del dispositivo didáctico, se presenta en primer lugar una descripción correspondiente a las funciones didácticas, se describen cómo se van modificando a lo largo del desarrollo del REI, luego se presenta una descripción correspondiente a las dialécticas, se describe cómo regulan y se van presentando en el dispositivo didáctico REI que se encuentran presentes en el desarrollo del dispositivo didáctico.

5.1.1Descripción de las Funciones Didáctica

Se describirán las funciones didácticas por cada tarea o actividad que los estudiantes desarrollaron en el dispositivo didáctico REI en la tarea 1 se da a conocer la pregunta generatriz, se describen las funciones didácticas topogénesis, el profesor da inicio al REI presentando a todos los estudiantes la pregunta generatriz que guiará el trabajo del curso. Surgen preguntas, por parte de los estudiantes, que se relacionan con la pregunta generatriz. A partir de la incorporación de la pregunta generatriz, se observa la modificación de los topos de los estudiantes y del profesor. En la mesogénesis se construyó el medio donde los estudiantes tuvieron que hacer la diferencia entre los conceptos básicos estadísticos y los conceptos relacionados con la obtención de probabilidades y además los puntos de encuentro entre ambas. Los medios que se utilizaron fueron internet, dispositivos móviles, libros de Probabilidad y Estadística utilizados con frecuencia en los primeros años de Universidad. Los estudiantes van recurriendo a su almacenamiento praxeológico que se ha ido formando en todo sus años de estudio, para darle inicio al trabajo con el dispositivo didáctico. En la primera actividad, los estudiantes comienzan a focalizar el estudio para familiarizarse con la construcción de una encuesta y manejo de los datos en forma cualitativa y cuantitativa

La cronogénesis, en el inicio del trabajo con el dispositivo didáctico REI, genera en los grupos de trabajo un poco de incertidumbre con respecto a los tiempos asignados para realizar el trabajo. Esto afecta la dilatación de los tiempos didácticos para el primer encuentro ya que los estudiantes comienzan a familiarizarse con la encuesta y con el tipo de datos obtenidos en ella.

En la tarea 2 se describen las funciones didácticas topogénesis, durante el desarrollo de esta actividad el topos de los estudiantes cambia ya que en ellos está la responsabilidad de tomar decisiones en el estudio. El topos del profesor cambia, él orienta el trabajo de los estudiantes en el desarrollo de la actividad. El papel que cumple el profesor es el de gestionar las respuestas y monitorear los puntos de discusión que se dan en clases. Con respecto a la mesogénesis, en esta actividad se genera el medio a través de recursos que se encuentran en la sala de clases como también antecedente que los estudiantes obtiene mediante la web, también se recurre a material disponible en la biblioteca. Para construir el medio los estudiantes recurren a su almacenamiento praxeológico, específicamente a los conceptos de estadística. En la cronogénesis, los tiempos se modifican porque los estudiantes contaban con un tiempo determinado para realizar la actividad. El tiempo cronológico se dilata ya que se producen instancias de discusión que son inspeccionados por el profesor.

En la tarea 3 la función didáctica topogénesis, los estudiantes deben determinar experimentos aleatorios en el ámbito de la probabilidad. El topos del profesor cambia, él dirige el trabajo de los estudiantes. El topos de los estudiantes también se ve modificado y plantean la necesidad de abordar otros puntos de interés. Los estudiantes resuelven problemas sin inconvenientes, el profesor gestiona las respuestas que van construyendo los estudiantes. En la mesogénesis, los estudiantes construyen el medio M y para ello deben diferenciar entre experimento aleatorio y determinístico, grados de posibilidad y niveles de incerteza además de conceptos como espacio muestral, evento o suceso y las formas de escribir y describir éstos. En la cronogénesis los tiempos didácticos se ven modificados, los estudiantes toman el protagonismo y responsabilidades en su formación.

En la actividad la topogénesis se observa que el profesor es quien dirige la actividad de los estudiantes, y éstos construyen las respuestas, el profesor gestiona las respuestas y la puesta en común de las mismas. En la mesogénesis, los estudiantes completan una tabla para construir el medio, los grupos de trabajo tuvieron que recurrir a su almacenamiento praxeológico (espacio muestral evento o suceso cálculo de probabilidad). Con respecto a la cronogénesis se requiere más tiempo para abordar la actividad, el tiempo cronológico obstaculiza el trabajo designado, el tiempo escolar se dilata para presentar el trabajo de los grupos en clases.

En la tarea 4 se observa la topogénesis los estudiantes proponen respuesta a la problemática presentada y deben asumir responsabilidades. El papel del profesor queda limitado a gestionar la respuesta y los momentos de puesta en común de los grupos de trabajos, además señala las instrucciones para realizar el trabajo. En esta actividad la mesogénesis utiliza conceptos de probabilidad relacionados con experimento aleatorio, espacio muestral, evento o suceso y su ocurrencia,como también los resultados asociados a un experimento aleatorio para la construcción del medio M, además de las respuestas de los estudiantes encontradas en textos y web. Cronogénesis se observa que el profesor tiene la necesidad de avanza en profundización de OM esto afecta los resultados que se pueden construir en la clase, se extiende el tiempo didáctico más de lo previsto.

Para la tarea 5 tenemos la topogénesis, el topos de los estudiantes se ve modificado en esta actividad, deben asumir responsabilidades al interior del grupo, el topos del profesor también se ve modificado principalmente, guía el trabajo de los estudiantes. La mesogénesis, en donde se construyeel medio, recurre a las praxeologías matemáticas como cálculo cálculo de probabilidad, conceptos de variable aleatoria y valor asignado a ésta. El tiempo de los estudiantes se va modificando con respecto a la cronogénesis.

En la tarea 6 la topogénesis los estudiantes identifican espacio muestral, y la variable aleatoria que se puede asociar a este espacio muestral, el estudiante debe indagar métodos para desarrollar el juego propuesto desde la mirada de un evento o suceso con su respectivo espacio muestral. El profesor plantea interrogantes que desafían y guían el trabajo de los estudiantes. Mesogénesis la construcción del medio se determina cual es el variabla aleatoria a considerar. Para la cronogénesis el profesor decide revisar las OM variables aleatorias, distribución de probabilidad, los tiempos didácticos se ven modificados. En la tarea 8 topogénesis los topos de los estudiantes se ven modificados asumiendo la responsabilidad en el desarrollo de la actividad y para encontrar respuesta a la tarea asignada. El profesor se limita a guiar el desarrollo de esta actividad. La mesogénesis se construye el medio M por las instrucciones y tableros de juego entregados por el profesor. La cronogénesis se observa que el tiempo didáctico se dilata, se debe asignar más tiempo del presupuestado para el desarrollo de la actividad. En la tarea 7 se observó la topogénesis el profesor guía la actividad y los estudiantes son responsables del desarrollo de ella. La mesogénesis se observa la construcción del medio donde los estudiantes recurren a su almacenamiento praxeológico de conceptos estadísticos que necesitan estar relacionados con otros para llevar una secuencia clara en el avance en las organizaciones matemáticas que fortalecen el trabajo estadístico. La cronogénesis se observa que los tiempos didácticos se amplían más de lo previsto. En la tarea 8 se observa en la topogénesis que el profesor guía la actividad, los estudiantes son responsables de realizar la actividad propuesta. En la mesogénesis se visualiza como recurren a su almacenamiento praxeológico de conceptos de estadística y material de construcción, con respecto a la cronogénesis se observa que los tiempos didácticos se deben ampliar para cumplir con la tarea asignada, existe dificultad con los tiempos cronológicos.

En la tarea 9 se observa que la topogénesis el profesor guía la actividad, los estudiantes son los responsables de llevarla a cabo. En la mesogénesis los estudiantes realizan un juego considerando todos los aspectos necesarios para realizar la conexión con la pregunta y las organizaciones matemáticas, almacenamiento praxeológico que guía esta etapa del trabajo con el dispositivo en base a conceptos de probabilidad, busca

5.1.2 Descripción de las Dialécticas

La Dialéctica de estudio y de la investigación es una de las dialécticas más importantes a desarrollar en el trabajo con el REI, por ello, no es posible investigar sin estudiarla. Ésta se presentó durante todo el desarrollo del dispositivo didáctico REI. Se constató la presencia de preguntas y respuestas que llevaron a estudiar e investigar diversas OM. Al introducirse la pregunta generatriz, los estudiantes comienzan a buscar posibles respuestas a la interrogante planteada y esto da paso a que surjan otras preguntas a investigar.

La Dialéctica del individuo y lo electivo se hace presente en el desarrollo del REI a través del trabajo que desarrollaron los estudiantes en forma grupal. Las problemáticas fueron presentadas por el profesor en el transcurso del trabajo con el dispositivo en eje de Probabilidad y Estadística, los estudiantes eran los encargados de distribuir las responsabilidades al interior del grupo. Todo el grupo estaba a cargo del trabajo y a cada uno de ellos se les asignó un rol dentro del grupo. Se realizaron debates en que se hizo presente desde el momento en que el dispositivo didáctico REI fue presentado a los estudiantes. No se debe olvidar que, antes de comenzar a trabajar, los estudiantes con el REI se comprometieron a trabajar en forma grupal, lo que hizo posible que todos los integrantes asumieran un verdadero compromiso por realizar una tarea exitosa y entre todos.

La Dialéctica del análisis y las síntesis praxeológicas y didácticas se presentó al inicio del trabajo con el dispositivo didáctico REI y, también, al finalizar la experiencia. ¿Qué temas se deben enseñar?, ¿Cómo se han enseñado estos temas en la institución? Son algunas de las preguntas que debió afrontar el profesor y su análisis se realizó con todos los integrantes de la experiencia.

En la Dialéctica de entrar y salir del tema, los estudiantes buscan respuestas en el transcurso del trabajo con el dispositivo didáctico REI, por lo tanto, esta dialéctica se encuentra presente a lo largo del dispositivo didáctico REI. Para una pregunta, a veces fue necesario que buscaran información fuera de la disciplina y luego que la llevaran a la problemática que debían resolver. Este dispositivo didáctico tiene respuestas al interior de la matemática.

En la Dialéctica del paracaidista y de las trufas, los estudiantes asumen el papel de explorador, aunque muy insipientemente. Son ellos quienes asumen la responsabilidad de buscar las respuestas dando un vistazo general. Estos gestos de los estudiantes orientan el estudio y, luego, a medida que profundizan en el tema se convierten en buscadores de trufas de lo observado, lo que los hace sentirse cómodos al desarrollar el trabajo. Esta dialéctica se presenta desde que se da a conocer la pregunta generatriz, puesto que permite que los estudiantes generen un plan para obtener las posibles respuestas. Se convierten en "paracaidistas" cuando recopilan toda la información necesaria a través del medio para dar a conocer la respuesta que han generado. La Dialéctica de las cajas negras y cajas claras postula que a medida que los estudiantes avanzan en el trabajo con el REI es posible observar conocimientos que deben ser aclarados y cuáles son los que no quedan claros, es decir, en un nivel gris, al enfrentar las preguntas derivadas, con esto se va construyendo el medio M.

En la Dialéctica de la lectura y de la escritura, las preguntas dadas por los grupos de trabajo son, en algunos casos, muy reducidas. Otros grupos realizan una síntesis con los puntos más relevantes para entregar las respuestas y ser compartidas con el resto del curso. Esta dialéctica se presenta en las exposiciones de los grupos, debates y actividades, aquí es donde los estudiantes deben discriminar la información encontrada para elaborar respuestas pertinentes. En la Dialéctica de pregunta y respuesta, los grupos generan nuevas preguntas al desarrollar algunas actividades, ellos deciden cómo y en qué momento darán sus respuestas. Los grupos de trabajo buscan información de diversos medios. Esta dialéctica se presenta desde que se comienza a trabajar con el dispositivo didáctico REI y se les da a conocer la pregunta generatriz; a continuación, los estudiantes comienzan la búsqueda de respuestas posibles, lo que da pie a que aparezcan otras preguntas.

La Dialéctica medio-media se presenta con más frecuencia al finalizar el recorrido en el que los estudiantes exponen sus respuestas al finalizar las actividades y las exposiciones de los grupos. En el transcurso del trabajo con el dispositivo, los grupos expusieron sus trabajos y avances del dispositivo didáctico. Como media, se pueden considerar libros de matemática, internet y material entregado por el profesor. La pregunta Q0 se estudió en los grupos de trabajo generando interrogantes al interior de los grupos.

ANÁLISIS DE LA ENTREVISTA

El análisis que se presenta a continuación corresponde a la recogida de datos cualitativos, que se desarrolló en el contexto de la aplicación de un dispositivo didáctico de acuerdo a la Teoría Antropológica de lo Didáctico y las variadas actividades de aprendizaje que se realizaron con los estudiantes y la profesora a cargo de los cursos de Primero y Segundo año de Enseñanza Media Científico Humanista, en donde se aplicó un Recorrido de Estudio e Investigación "REI".

5.1. Análisis de la entrevista tipo cuestionario realizada a la profesora a cargo de la aplicación del "REI"

Se aplicó un cuestionario a la docente a cargo de los cursos participantes de esta investigación con la intención de describir cómo la profesora abordó el trabajo y experiencia con REI, según lo declarado en los objetivos de la investigación. Este cuestionario constó con 13 preguntas abiertas y para ayudar a la descripción de las respuestas y análisis de ellas se recurrió al software ATLAS TI, el cual se aplicó a las respuestas de cada pregunta entregada por la profesora.

En este apartado se presenta el análisis de los resultados obtenidos, considerando los objetivos de la investigación propuestos, para ello se analizó la transcripción de la entrevista realizada a la profesora, la cual se realizó al finalizar la experiencia. Para comenzar con el análisis de la entrevista se procedió a realizar una codificación para luego organizar los códigos y agruparlos en categorías atendiendo al tema principal de la investigación, lo que permitió desarrollar una interpretación y síntesis de la información encontrada en la entrevista. Las categorías se levantaron una vez que la entrevista fue aplicada. Para iniciar el análisis de datos, se identificaron 26 unidades de significado las cuales se agruparon en 4 categorías.

En la tabla 3, se dan a conocer las unidades de significado identificadas en la etapa de redacción de los datos y provista de la entrevista desarrollada al finalizar la experiencia. En ella, se dan a conocer los códigos establecidos, su definición y siglas correspondientes.

Sigla	Código	Definición
AG 1	Estudiantes parte importante del grupo.	.Se refiere a la importancia de la interacción entre estudiantes en la enseñanza.
AE 2	Aprendizaje de los estudiantes.	Se refiere a la forma en que los estudiantes movilizan conocimientos y habilidades para dar respuesta a los desafíos de su entorno escolar.
AC 3	Apoyo entre compañeros.	Se refiere a la interacción entre estudiantes en el proceso enseñanza-aprendizaje.
AD 4	Aprenden en forma didáctica.	Se refiere a las técnicas y métodos de enseñanza en la interacción profesor – estudiante
BD 5	Beneficios del dispositivo didáctico.	Se refiere a la utilidad del uso de material innovador que conlleva nuevos desafíos.
BI 6	Búsqueda de la información	Se refiere a la capacidad del estudiante y profesor para lograr la información mediante un conjunto de operaciones indagatorias que den respuesta a interrogantes.
CD 7	Capacitación docente	Se refiere a la preparación o formación de los profesores para cumplir su labor de manera eficaz en el aula y en la comunidad escolar.
CE 8	Compromiso de los estudiantes	Se refiere al acuerdo alcanzado en responsabilidad, dedicación y tiempo para el trabajo escolar.
CL 9	Comunicación de los estudiantes	Se refiere al diálogo intencionado entre estudiantes enriquecido con conocimientos y experiencias de la interacción escolar.
CI 10	Conectar ideas	Se refiere a enlazar la experiencia, intereses, conocimientos previos para un tema en particular.
CX 11	Conexión con los contenidos	Se refiere a la coherencia interna o integración equilibrada de algún tipo de contenido ya sean conceptuales, procedimentales o actitudinales.

CT 12	Construcción de conocimientos	Se refiere a la capacidad para adquirir significado para un nuevo conocimiento en base a los conocimientos previos.
CP 13	Contenidos previos	Se refiere al contenido de enseñanza o información que fue almacenada en la memoria del estudiante y que en la práctica ayuda a anclar nuevos contenidos.
CR 14	Crecimiento profesional	Se refiere a la evolución positiva que tiene una persona al hacer realidad sus aspiraciones profesionales.
DT 15	Diferente tipos de aprendizaje	Se refiere a la forma de recepción y asimilación de los estudiantes que perciben y aprenden las cosas de formas distintas a través de canales distintos.
TC 16	Trabajar con compañeros	Se refiere a las ventajas que conlleva el trabajo entre pares que viven situaciones similares que trabajan y aprenden a intercambiar roles como a mejorar la comunicación y aprendizajes entre ellos.
ED 17	Experiencia del docente	Se refiere a la experiencia en el ejercicio de la labor docente que genera constante información para los procesos de mejora.
FC 18	Fomenta el trabajo colaborativo	Se refiere al proceso en el cual cada individuo aprende más que lo que aprende por si sólo, fruto de la interacción de los integrantes el grupo
FA 19	Fortalecer aprendizajes	Se refiere a orientar y brindar la posibilidad de mejorar prácticas de aula.
IC 20	Importancia de los compañeros	Se refiere al vínculo entre compañeros, lazos entre personas que comparten y trabajan juntas para generar un buen ambiente de aula.
IE 21	Importancia del eje trabajado	Se refiere a los ejes del currículum para matemática que son: números, álgebra, geometría, datos y azar.
IP 22	Incorporación de preguntas	Se refiere a la utilización de preguntas para encausar o guiar el aprendizaje
BU 23	Búsqueda y utilización de buenas preguntas	Se refiere a utilizar interrogantes para motivar a los estudiantes la búsqueda de respuestas.
LA 24	Lograr aprendizajes en el tiempo	Se refiere a organizar la enseñanza en un tiempo propio y determinado a la situación

ME 25	Motivación a los estudiantes	Se refiere al tipo de motivación de los estudiantes, tanto intrínseca como extrínseca y como cooperar para alcanzar la motivación
NF 26	Nuevas formas de trabajo	Se refiere a la innovación y a los desafíos de los nuevos paradigmas en la sociedad del conocimiento y la información
NM 27	Nuevas metodologías	Se refiere a los nuevos desafíos de trabajo en aula y como son éstos asumidos por los docentes que deben modificar su metodología tradicional.
OR 28	Organización de contenidos	Se refiere a la secuencia, manera y orden en que se organizan la información de enseñanza, lo que influye en su mejor comprensión.
OG 29	Organizar conocimientos	Se refiere a la manera de jerarquizar información para que los procesos de producción y transmisión del conocimiento sea un encuentro entre los actores educativos.
OT 30	Organizar el trabajo	Se refiere al hábito de los estudiantes para desempeñar o realizar la tarea propuesta.
PE 31	Participación de los estudiantes	Se refiere un proceso de comunicación, interacción e intervención de cada uno de los estudiantes con sus pares y profesor que permite instalar un diálogo sobre un tema en particular en el proceso de enseñanza.
PO 32	Potencial de los estudiantes	Se refiere a las capacidades que un estudiante puede desarrollar en el proceso de interacción con el otro.
PS 33	Presentar soluciones	Se refiere a la oportunidad de formular acciones para solucionar un problema aportando en forma individual y colaborativa.
PA 34	Proyectos de aula	Se refiere a una estrategia metodológica colectiva que permite incorporar más de una asignatura, unidad o eje, así como también permite desarrollar el autoaprendizaje, la creatividad y la solución a problemas.
RI 35	Relación con información anterior	Se refiere a la conexión que realiza un estudiante con la información anclada en su memoria para asimilar la nueva información.
RT 36	Relación entre temas	Se refiere a los temas o contenidos que se necesitan como base para una organización matemática que se articula a las necesidades, demandas y expectativas de los estudiantes, cuya asimilación y apropiación se considera

		valiosa y esencial para el desarrollo y socialización.
RR 37	Retroalimentación al trabajar con REI	Se refiere al proceso de reflexión del estudiante al interactuar con el REI, compartir inquietudes, sugerencias en base a su desempeño y ser capaz de mejorar planteando metas y nuevos desafíos.
MP 38	Mejora en la participación de los estudiantes.	Se refiere a la participación activa del estudiante en aula como factor de mejora en los procesos de enseñanza y aprendizaje.
TI 39	Tiempo de implementación	Se refiere al tiempo destinado para la aplicación y desarrollo del dispositivo didáctico.
TR 40	Tiempo para realizar las actividades	Se refiere al trabajo realizado en aula y los tiempos entregados a los estudiantes para interactuar entre ellos y completar las tareas.
TD 41	Trabajo con dispositivo didáctico	Se refiere al Recorrido de Estudio e Investigación determinado con la aplicación de un dispositivo didáctico en base a interrogante principal y sub preguntas que los estudiantes deben responder en base a tareas y actividades propuestas.
TS 42	Trabajo en clases	Se refiere al cómo atender y complementar una clase en donde el estudiante debe cumplir con las normas establecidas.
TL 43	Trabajo en aula	Se refiere al trabajo de colaboración entre estudiantes y profesores que fomenta la participación, tolerancia e intercambio de ideas.
TQ 44	Trabajo en equipo	Se refiere a la forma de trabajo que coordina habilidades humanas en el proceso de interacción con otros según acuerdos para alcanzar metas comunes y respuestas a problemas tan cambiantes como específicos.

Tabla 3.Codificación de las Unidades de significado.

En la figura N° 106 representa la categoría ”Incorporación del dispositivo didáctico con sus respectivas unidades de significado.

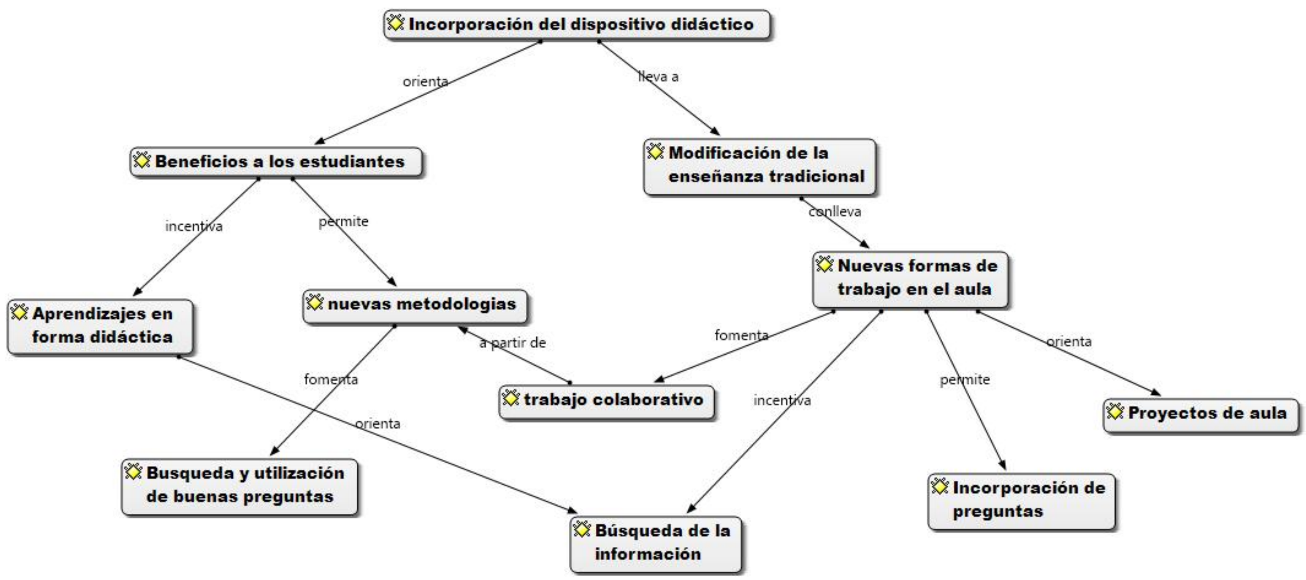


Figura N° 106.categoria incorporación del dispositivo didáctico

En la figura N° 106 se observa:

Categoría "***Incorporación del dispositivo didáctico***".

Una de las categorías determinadas al analizar la entrevista en profundidad lleva el nombre ***incorporación del dispositivo didáctico.*** Ésta se refiere a resaltar como fue la percepción, recepción y el proceso de trabajo en aula desarrollado en función de un dispositivo didáctico que determina un recorrido de estudio e investigación "REI". De acuerdo a lo observado, se identifican dos subcategorías que componen la incorporación de dispositivo didáctico en el aula. La primera hace referencia ***beneficios en el aprendizaje*** de los estudiantes y se describe cómo el trabajo en contenidos matemático enriquece la interacción humana entre estudiantes y profesor enmarcados en un intercambio de información de carácter democrático y participativo. La segunda subcategoría ***modificación de la enseñanza tradicional*** que hace referencia al proceso de enseñanza con un cambio importante basado en la teoría antropológica de lo didáctico que busca asumir el paradigma del "cuestionamiento del mundo" derribando el trabajo de la enseñanza de majestuosas "Obras" entregadas de forma magistral por los docentes a un nivel casi inalcanzables para los estudiantes que sólo son admiradores de éstas obras y no interactúan con ellas. Ésta modificación de la enseñanza le da fluidez y movimiento al proceso de enseñanza en donde el principal gestor es el estudiante dirigido y acompañado de su profesor que trabajan en busca de buenas preguntas para alcanzar respuestas en proceso dialógico de interacción permanente.

Las unidades de significado ligadas a la categoría "incorporación del dispositivo didáctico" son:

1) Aprenden en forma didáctica.
2) Beneficios del dispositivo didáctico.
3) Búsqueda de información.
4) Fomenta el trabajo colaborativo
5) Incorporación de preguntas
6) Búsqueda y utilización de buenas preguntas
7) Nuevas formas de trabajo
8) Nuevas metodologías
9) Proyectos de aula
10) Retroalimentación al trabajar con REI
11) Tiempo de implementación
12) Trabajo con dispositivo didáctico

En la figura N° 107 representa la categoría "trabajo colaborativo" con sus respectivas unidades de significado.

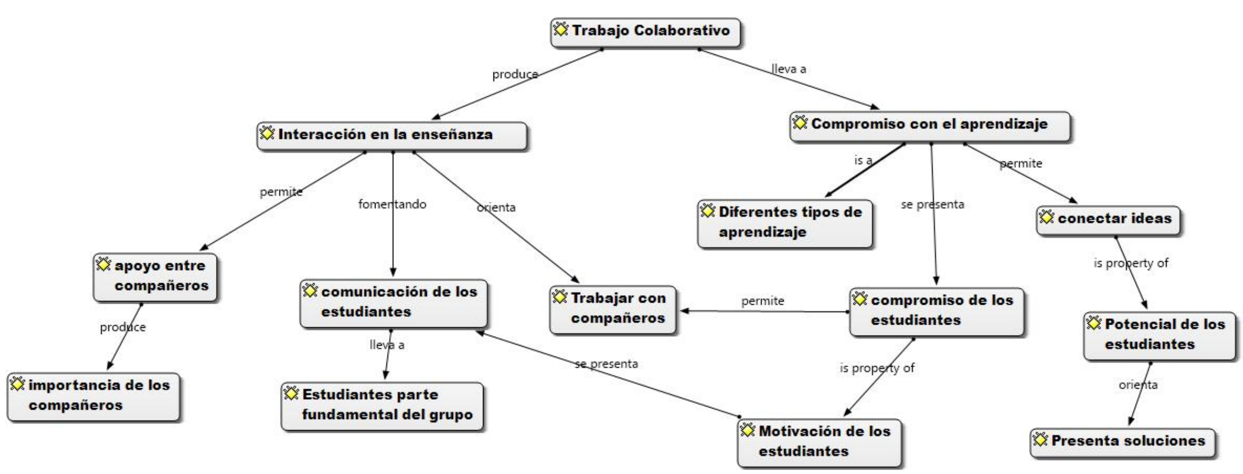


Figura N° 107. Categoría Trabajo Colaborativo

En la figura N° 107 se observa:

Categoría "***Trabajo Colaborativo***".

Esta categoría nos da noticia sobre el proceso de interacción de los integrantes de un grupo y de la forma que se coordinan unos con otros según acuerdos y metas establecidas para lograr un objetivo compartido. El trabajo colaborativo constituye un modelo de aprendizaje interactivo, que invita a los estudiantes a construir juntos, lo cual demanda conjugar esfuerzos, talentos y competencias, mediante una serie de transacciones y acuerdos que les permitan lograr metas establecidas consensuadamente, este proceso está impregnado de habilidades sociales en donde la comunicación es inherente en todo el grupo humano, la construcción colectiva de los aprendizajes a través del diálogo se mantiene presente en el trabajo de aula.

Las unidades de significado ligadas a la categoría "Trabajo colaborativo" son:

1) Estudiantes parte importante del grupo.
2) Apoyo entre compañeros.
3) Compromiso de los estudiantes.
4) Comunicación de los estudiantes.
5) Conectar ideas.
6) Diferentes tipos de aprendizaje.
7) Trabajar con compañeros.
8) Importancia de los compañeros.
9) Motivación a los estudiantes.
10) Potencial de los estudiantes.
11) Presentar soluciones.
12) Trabajo en equipo.

De acuerdo a lo observado, se identifican dos subcategorías que componen la categoría de trabajo colaborativo. La primera hace referencia ***interacción en la enseñanza*** entre estudiante-estudiante y estudiante–profesor y describe cómo el trabajo en contenidos matemáticos enriquece la interacción humana al estar enmarcada en un intercambio de información de carácter democrático, participativo y dialógico, con una fuerte relación de interdependencia entre los diferentes miembros del grupo, de manera que el alcance final de las metas concierna a todos sus miembros. La segunda subcategoría ***compromiso con el***

aprendizaje que hace referencia a la responsabilidad que asume el estudiante en forma individual y colectiva con las tareas de aprendizaje en el proceso de enseñanza, de esta manera, la responsabilidad de cada miembro del grupo es compartida en función del logro de objetivos para realización de tareas. En el trabajo colaborativo un estudiante aprende más de lo que aprendería por sí solo, fruto de la interacción de los integrantes de un equipo, quienes aprenden a diferenciar y contrastar sus puntos de vista, negocian de tal manera que se genera un proceso de construcción de conocimiento. Las formas comunes de estructurar las interacciones entre los participantes en diferentes actividades de aprendizaje colaborativo, pasa a convertir a los estudiantes en sujetos activos de la construcción y gestión de su propio conocimiento.

En la figura N° 108 representa la categoría ”visión de la enseñanza del Profesor” con sus respectivas unidades de significado.

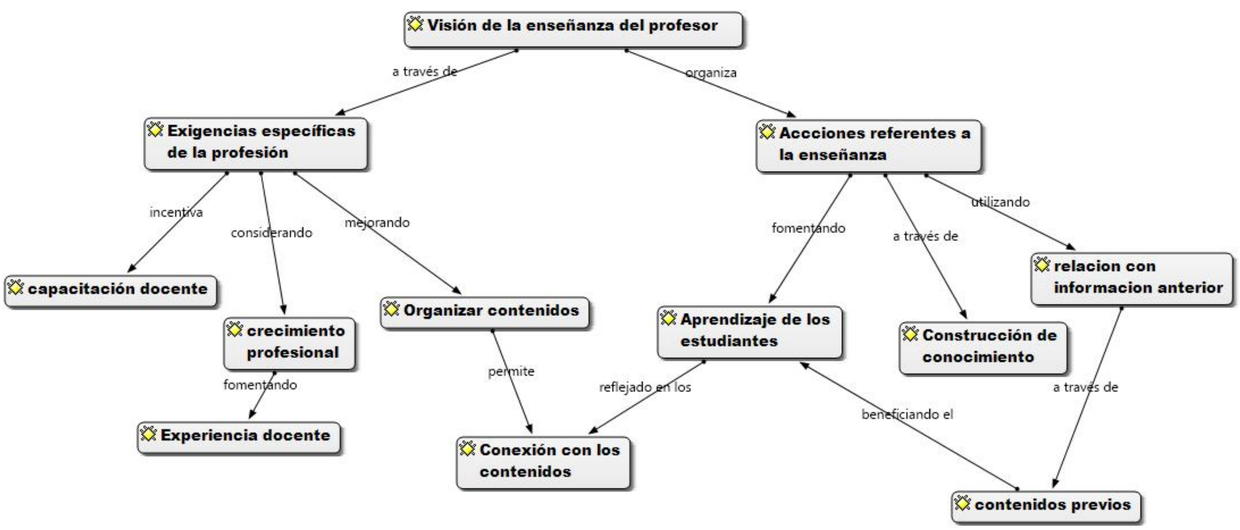


Figura N° 108. Categoría ”visión de la enseñanza del Profesor”

En la figura N° 108 se observa:

Categoría “***visión de la enseñanza que tiene el profesor***”

Esta categoría entrega antecedentes sobre el proceso de enseñanza desde la mirada del docente y los factores como la actuación efectiva en la enseñanza en base al razonamiento y toma de decisiones. El profesor asume una visión de la enseñanza cuando en base a factores de identidad, motivación, compromiso, sentido de auto-eficacia es capaz de liderar y gestionar el proceso de enseñanza en el aula. Los conocimientos profesionales y las competencias de los docentes constituyen un factor de importancia para la educación de calidad, así como también el sentido de comunidad en la hora de enseñar, la visibilidad en el recorrido académico, la comunicación asertiva, crear relaciones a largo plazo, permitir flexibilidad, implementar la estimulación intelectual, la creatividad e innovación.

Los profesores deben convertirse en mediadores y guías que orienten a los estudiantes hacia el descubrimiento y desarrollo de las capacidades que les permitan desenvolverse de forma autónoma en la escuela y en la vida. Sólo el aprendizaje mediado permite que los sujetos mejoren sus ejecuciones y actualicen su potencial de aprendizaje constantemente. El profesor debe sugerir, facilitar o contribuir a crear las condiciones que hagan posible que el educando acceda al conocimiento de valores por medio de su experiencia.

Las unidades de significado ligadas a la categoría "visión de la enseñanza que tiene el profesor" son:

1) Aprendizaje de los estudiantes.
2) Capacitación docente
3) Conexión con los contenidos
4) Construcción de conocimientos
5) Contenidos previos
6) Crecimiento profesional
7) Experiencia del docente
8) Fortalecer aprendizajes
9) Importancia del eje trabajado
10) Lograr aprendizajes en el tiempo
11) Organización de contenidos
12) Organizar conocimientos
13) Relación con información anterior

De acuerdo a lo observado, se identifican dos subcategorías que componen la categoría ***"Visión de la enseñanza que tiene el profesor"***. La primera hace referencia a las ***exigencias* específicas de la profesión** que tiene relación con el manejo de contenidos y su rol social, perfeccionamiento continuo, conocimiento del currículum y su gestión en el aula, reflexión sobre su práctica, guiar y estimular la construcción del conocimiento en sus estudiantes, implicación y compromiso con los nuevos desafíos de la era del conocimiento e información como también potenciar la comunicación activa y participativa entre los estudiantes en el trabajo de aula. De igual manera debe tener altas expectativas en sus estudiantes para promover el interés por la clase y la motivación de los estudiantes

enmarcados en un excelente ambiente de aula donde se transmita confianza y respeto.
La segunda subcategoría ***Acciones referentes a la enseñanza,*** se refiere a las acciones planteadas exclusivamente por el docente y que son proporcionadas al estudiante para facilitar un proceso profundo de obtención de información y construcción de conocimiento que promuevan aprendizajes significativos. Estas acciones deben estar diseñadas de tal manera que estimulen a los estudiantes a observar, analizar, opinar, formular y buscar posibles soluciones y descubrir el conocimiento por sí mismo.

La enseñanza también busca el logro de resultados de aprendizaje y es por ello que debe ser organizada y conducida en forma metódica, esto es, mediante un orden buscar facilitar la tarea de aprendizaje procurando respetar las diferencias individuales y fortaleciendo el intercambio de opiniones.

En la figura N° 108 representa la categoría ”Gestión de la clase” con sus respectivas unidades de significado.

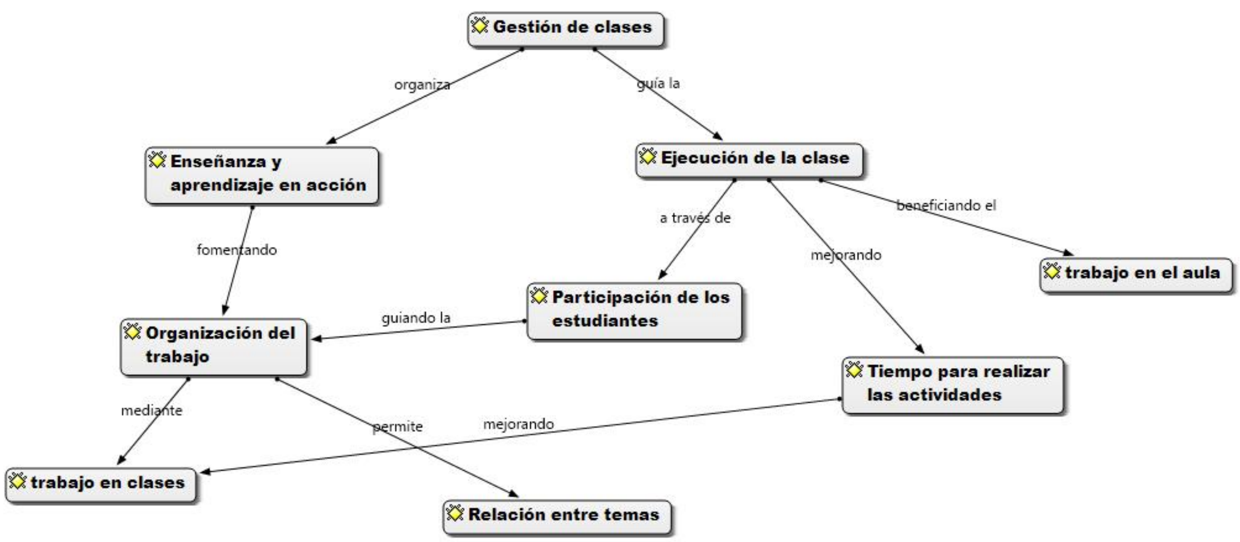


Figura N° 109.Categoría Gestión de la clase.

En la figura N° 109 se observa:

Categoría “***Gestión de la clase***”

Esta categoría entrega antecedentes sobre la forma en la cual el docente organiza, reflexiona y prioriza la secuencia de la clase, las posibles interrogantes de sus estudiantes como también las posibles respuesta de éstos frente a una situación problemática, en donde el profesor debe guiar y monitorear el trabajo del grupo como también de cada estudiante y liderar un proceso de comunicación y participación en donde sean considerados los razonamientos y aproximaciones a la respuesta deseada de todos los estudiantes sin desmotivar el proceso de reflexión y conexión con otros temas. El profesor debe planificar y gestionar su clase con anticipación, sin olvidar que debe estar atento a las situaciones emergentes que pueden ocurrir al estar en aula, en las cuales influye poderosamente su experiencia docente y su capacidad de anticipación o previsión en base al conocimiento del grupo, las coordenadas temporales y socio-culturales de sus estudiantes y de los tiempos propios de desempeño del grupo frente a los desafíos planteados.

De acuerdo a lo observado, se identifican dos subcategorías que componen la categoría ***"Gestión de la clase"***. La primera hace referencia a "***Enseñanza y aprendizaje en acción"*** que nos lleva a reflexionar en un proceso continuo de interacción social mediado en donde la organización, administración y tiempo de la enseñanza está en absoluto acuerdo con las prioridades para fortalecer el aprendizaje de los estudiantes. Para ello se debe tener expectativas claras, explícitas y consistentes que presenten desafíos alcanzables para los estudiantes en función de los objetivos de aprendizajes esperados y la toma de decisiones que concierne a los contenidos, actividades y tareas vinculando la coordinación de grupos con las tareas a realizar junto con la organización de recursos y tiempo.

La segunda subcategoría ***Ejecución de la clase,*** está relacionada con llevar a la práctica o ejecutar el diseño intencionado y organizado de la gestión de la clase. Para ello se debe crear un ambiente propicio, acogedor, respetuoso y cálido alineado en forma consecuente con las reglas o acuerdos previamente establecidos con los estudiantes. El docente debe entregar espacios y tiempos para realizar la tarea y fortalecer la comunicación y colaboración entre pares. Todo esto está relacionado en el cómo ejecutar la tarea y en qué condiciones se regulará considerando que al llevar al aula el diseño de la clase puede variar o sufrir alteraciones que se deben prever de acuerdo al conocimiento y experiencia.

Las unidades de significado ligadas a la categoría "gestión de la clase" son:

1) Organizar el trabajo
2) Participación de los estudiantes
3) Relación entre temas
4) Mejora en la participación de los estudiantes.
5) Tiempo para realizar las actividades
6) Trabajo en clases
7) Trabajo en aula

Capítulo VI. CONCLUSIONES

A continuación, se exponen las conclusiones finales de este estudio y las consideraciones que se cree pueden ser un aporte en el área de la didáctica de la matemática como también en los procesos de inclusión e interacción en el aula, puesto que el REI promueve el trabajo en equipos colaborativos ayudando a la integración de las actividades de aprendizaje que realizarán mejores conexiones con otros saberes, el trabajar en base a preguntas favorece que los estudiantes se planteen más interrogantes al interior del grupo o en forma individual, lo que origina una constante búsqueda en forma individual y colectiva para dar respuestas a interrogantes nacientes que entregan funcionalidad al proceso de enseñanza. De esta manera los estudiantes tienen oportunidad de enriquecer habilidades comunicativas en el arte de la dialógica que se convierte en una importante ocasión para incrementar sus destrezas en otras áreas del proceso social de interacción entre pares y entre personas. La tolerancia, el respeto a las opiniones de sus compañeros, poder explicar sus ideas y comunicar resultados En base a la información analizada, se presentan las principales conclusiones rescatadas de esta investigación. Llevada a cabo mediante el análisis del dispositivo didáctico REI, donde se logró visualizar y analizar las opiniones de los sujetos en el estudio así como la descripción de la experiencia de trabajo con un REI.que permite establecer el impacto del dispositivo didáctico. Aquí, se dará respuesta a las preguntas de la investigación, recordando que estas son:

- ✓ ¿Cómo desarrollar las diferentes dialécticas para la implementación de un REI ?
- ✓ ¿Cómo funciona la Mesogénesis, Topogénesis y Cronogénesis durante la implementación de un REI ?
- ✓ ¿Es viable implementar un REI para la Unidad de Probabilidad y Estadística ?
- ✓ ¿Cuáles son las dificultades en la institución para la implementación del REI ?
- ✓ ¿Cómo influyó la implementación del dispositivo didáctico en las prácticas de la profesora?

A su vez al objetivo general: *Analizar los alcances y limitaciones de la enseñanza por Recorridos de Estudio e Investigación REI en 1º y 2º Año de Enseñanza Media en el eje temático de Probabilidad y Estadística para dar respuesta a situaciones problemáticas que no se limitan a una presentación desarticulada y carente de sentido.*y cada una de los objetivos específicos que componen esta investigación:

1. Diseñar un REI para 1º y 2º Año de Enseñanza Media cuya cuestión generatriz provengan del Eje Temático Probabilidad y Estadística.

2. Analizar las respuestas o los alcances encontrados a partir de la implementación del REI.
3. Describir el funcionamiento de las dialécticas y su incidencia en los procesos de funciones didácticas
4. Describir cómo la profesora aborda el trabajo y experiencia con REI.

Con respecto a los objetivos daremos respuesta a cada uno de estos objetivos específicos:

Objetivo 1. Diseñar un REI para 1º y 2º Año de Enseñanza Media cuya cuestión generatriz provengan del Eje Temático Probabilidad y Estadística. Se diseñó y elaboró un dispositivo didáctico REI que abarca los contenidos del Eje de Probabilidad y Estadística para Primer y Segundo Año de Enseñanza Media. El dispositivo didáctico REI se compone de una pregunta generatriz y varias preguntas relacionadas con el ámbito del área de la Probabilidad y Estadística. Los contenidos propuestos por el programa de estudio, fueron transformados a preguntas para la elaboración del REI y en base ello se formaron las Organizaciones matemáticas que sustentan el trabajo en las sub-preguntas generadas de la gran pregunta generatriz.
El uso sistemático del dispositivo didáctico REI propuesto por la TAD admite la contextualización tanto de las preguntas que los componen como de las actividades de aprendizaje propuestas a los estudiantes que están fundamentadas en la cotidianeidad del diario vivir.

Objetivo 2. Analizar las respuestas o los alcances encontrados a partir de la implementación del REI. Se analizó las respuestas y la forma de trabajo de los estudiantes a cada una de las tareas diseñadas en el dispositivo. El estudio de las preguntas derivadas hizo sobresalir tareas no habituales de la enseñanza tradicional. los estudiantes realizaron las tareas utilizando técnicas que se expusieron en los apuntes entregados por el profesor y seleccionaron las que consideraron más simples en aplicar.
En el proceso de enseñar y aprender a través del dispositivo didáctico REI, es preponderante que las preguntas formuladas motiven a los estudiantes a ampliar su pensamiento y aferrarse a nuevas relaciones, descubrir errores, adquirir más información a iniciar nuevas actividades. La técnica de preguntar de acuerdo con el dispositivo didáctico.y de compartir y respetar opiniones.
Con respecto a las funciones didácticas, éstas se encuentran en forma implícita en el dispositivo didáctico REI. En cuanto a la mesogénesis, esta comienza a modificarse a medida

que se avanza con el desarrollo del dispositivo didáctico REI, ya que el profesor y los estudiantes ayudan a construir el medio M. Por ello, se puede afirmar que el REI fue efectivo, producto del trabajo realizado por los diversos grupos de estudiantes guiados por el profesor. El medio M se fue construyendo con respuestas encontradas por parte de los estudiantes en los textos o apuntes entregados por el profesor, también por la utilización de teorías de la Probabilidad y Estadística. Los recursos que fueron empleados por los estudiantes para la búsqueda de respuestas en la construcción del medio fueron diversos: guías, libros, internet con uso dispositivos portátiles.. Las clases tuvieron diferentes momentos de estudio. El topos del profesor cambió, pues prevaleció, en general, en los momentos de inicio de las clases. Dando instrucciones, se convirtió en un guía, lo que evidencia cuando el profesor decidía proponer el estudio de ciertas situaciones o lectura de textos que lleva a la búsqueda de respuestas que favorecen la construcción del medio REI estimula a los estudiantes a pensar sobre temas que van más allá de lo que el material de enseñanza proporciona, además, fortalece la formación de personas críticas.

Objetivo 3. Describir el funcionamiento de las dialécticas y su incidencia en los procesos de funciones didácticas

Las dialécticas, a medida que se avanza con el desarrollo del dispositivo didáctico REI, comienzan a aflorar. Las dialécticas que se encuentran más presente en la implementación del dispositivo didáctico REI de forma frecuente son del paracaidista y de las trufas, la dialéctica del individuo y lo lectivo. Lo que se refleja en las producciones de los estudiantes que son los protagonistas en la sala de clases debido a que presentan un rol más activo, esta nueva forma de trabajo fomenta su autonomía, pues se ven enfrentados a buscar la información necesaria para poder resolver las actividades presentadas por el profesor, fomentando el trabajo compartido. Este hecho permite que el profesor pueda atender a los estudiantes que tienen más dificultad con la asignatura, fomenta la búsqueda información, la selección y discriminación de la información, para abordar aspectos prácticos, históricos, etc.

Objetivo 4.Describir cómo la profesora aborda el trabajo y Experiencia con REI Se elaboró y aplicó un cuestionario con preguntas dirigidas y respuestas abiertas relacionados con la opinión y apreciación que tiene la docente con respecto a la experiencia adquirida con el uso del dispositivo REI. En el proceso de aplicación se realizaron entrevistas periódicas para cooperar y ayudar al empoderamiento del espíritu de la TAD, en u grupo fuertemente demarcado por el paradigma de la monumentalización de los saberes. Para los estudiantes resolver una situación era dar respuesta a la demanda del profesor, que se caracteriza por la ausencia de un entorno tecnológico explícito y de nuevas cuestiones que deriven en la necesidad de seguir estudiando. Se destaca la disposición del docente frente al trabajo ya que para ella era algo nuevo que se fue fortaleciendo en el tiempo hasta alcanzar a entender el proceso de esta nueva metodología visible a través de un REI, pero sí mostrando siempre que se necesita bastante tiempo para su ejecución para el estudiante como para el docente a cargo.

LIMITACIONES Y PROYECCIONES.

En el ámbito de las limitaciones podemos referirnos a los tiempos ligados a la investigación tanto en el inicio del trabajo dispositivo didáctico REI, como por ejemplo en proceso de entrevistas de preparación de la docente que aplica el dispositivo didáctico, debido a la coordinación de horarios para realizar reuniones de encuentro, como también en el proceso mismo de implementación de éste.

Además la conformación de grupos al inicio del trabajo con el dispositivo, puesto que los estudiantes no están acostumbrados a trabajos con grupos de trabajo lo que genera incertidumbre con respecto a los tiempos asignados para realizar el trabajo. Esto afecta la dilatación de los tiempos didácticos para el proceso de trabajo y desarrollo con el dispositivo didáctico.

En cuanto a las proyecciones del trabajo con el dispositivo didáctico REI, al generar éste experiencias positivas en los estudiantes dentro del proceso de enseñanza aprendizaje, debe replicarse en cursos superiores para continuar la secuencia del trabajo realizado en Primer y Segundo año de Enseñanza Media. Además se puede implementar dentro de un proyecto interdisciplinario que contemple por ejemplo la asignatura de Biología en el ámbito de la genética para continuar con interrogantes relacionadas en el ámbito de la probabilidad. También se abren conocimientos y oportunidades para replicar experiencias similares en cursos inferiores para generar cambios en la metodología de trabajo que cada vez son más requeridos por las instituciones educativas para el beneficio de los estudiantes que encuentran en este tipo de experiencias un camino lleno de desafíos y expectativas para poder comunicar y trabajar en el aula.

ANEXOS

UNIVERSIDAD CATÓLICA
DE LA SANTÍSIMA CONCEPCIÓN.
FACULTAD DE EDUCACIÓN

GUÍA DE TRABAJO
INTRODUCCIÓN A LA ESTADÍSTICA

ACTIVIDAD DE AULA

¿Qué prefieren hacer tus compañeros en su tiempo libre?

Nombre :………………………………………………………………………………………Curso:………………

INTRUCCIONES: Esta guía tiene un tiempo de duración aproximada de 70 minutos, en la cual realizaremos y compartiremos una encuesta pequeña e interna de la cual extraeremos datos cualitativos y cuantitativos.
Para organizar la información recopilada de la encuesta puedes utilizar las tablas anexadas o bien agregar otras tablas. También puedes agregar filas o columnas a las tablas propuestas para organizar la información en una primera etapa.

I.- **El *primer paso*** *en una investigación estadística* consiste en diseñar la encuesta. En este caso, la encuesta constará de dos preguntas: "Escoger una actividad preferida" y "tiempo aproximado en horas semanales que dedicas a esa actividad preferida".

(1) Escoge una sola de las siguientes actividades qué prefieres hacer en tu tiempo libre:

(A) Jugar un deporte (fútbol, básquetbol, tenis, etcétera).
(B) Ver TV o utilizar la computadora.
(C) Pasear o conversar con amigos y amigas.
(D) Leer
(E) Otros

II.- Escoge 10 compañeros en aula y **recoge los datos** de la encuesta. Este es **el *segundo paso*** *de una investigación estadística.*

III.- **Organiza los datos** , que es **el tercer paso** de una investigación estadística, en las siguientes tablas (una casilla por pregunta):

ACTIVIDAD PREFERIDA										
ENCUESTADO	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Preferencia										
JUGAR UN DEPORTE (A)										
T.V. o COMPUTADORA (B)										

CONVERSAR CON AMIGOS/(AS) (C)										
LEER (D)										
OTROS (E)										

NÚMERO DE HORAS APROXIMADA DEDICADAS POR SEMANA										
Encuestado	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
PREFERENCIA (A),(B),(C),(D),(E)										
Número de horas										

- TABLAS QUE CORRESPONDEN A VARIABLE CUANTITATIVA: NÚMERO DE HORAS.

NÚMERO DE HORAS Semanales	Número de personas que respondieron este número de horas.
0	
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	

RECUERDA: ***La actividad preferida*** y ***el número de horas de dedicación semanal*** son ejemplos de variables estadísticas. La primera es una variable categórica o cualitativa; la segunda, una variable *numérica cuantitativa*. Cuando tienen muchos datos, es necesario organizarlos y describirlos mediante tablas y gráficos, para luego poder analizarlos.

ACTIVIDAD DE AULA

“Organicemos la información de nuestra encuesta en tablas de distribución de frecuencias”

Nombre :……………………………………………………………………………………………Curso:………………

INTRUCCIONES: Esta guía tiene un tiempo de duración aproximada de 70 minutos, en la cual realizaremos y tabularemos tablas de distribución de frecuencias.

Las siguientes tablas agrupan los datos obtenidos en una encuesta.

Complétalas:

- <u>TABLAS QUE CORRESPONDEN A VARIABLE CUALITATIVA: ACTIVIDAD PREFERIDA</u>

ACTIVIDAD PREFERIDA	N° de personas que prefieren esta actividad.
JUGAR UN DEPORTE	
TV o COMPUTADORA	
CONVERSAR CON AMIGOS/(AS)	
LEER	
OTROS	

En esta tabla completaste la frecuencia absoluta (f) que corresponde al número de veces que aparece un mismo valor de una variable en una muestra.

ACTIVIDAD PREFERIDA	Frecuencia relativa de personas que prefieren esta actividad. fr= $\frac{\textit{frecuencia absoluta}}{\textit{Número total de datos}}$
JUGAR UN DEPORTE	
TV o COMPUTADORA	
CONVERSAR CON AMIGOS/(AS)	
LEER	

En esta tabla completaste la frecuencia relativa (fr) que es el número de veces que aparece un mismo valor de una variable en una muestra respecto del total de valores. Se calcula dividiendo la frecuencia absoluta por el tamaño de la muestra.

OTROS	

ACTIVIDAD PREFERIDA	Frecuencia relativa acumulada (fra) de todos los valores de la frecuencia relativa iguales o inferiores al valor considerado que prefieren esta actividad.
JUGAR UN DEPORTE	
TV o COMPUTADORA	
CONVERSAR CON AMIGOS/(AS)	
LEER	
OTROS	

La frecuencia relativa acumulada (fra)son todos los valores de la frecuencia relativa iguales o inferiores al valor considerado.

ACTIVIDAD PREFERIDA	Frecuencia acumulada(fa) de personas menores o iguales al valor considerado que prefieren esta actividad.
JUGAR UN DEPORTE	
TV o COMPUTADORA	
CONVERSAR CON AMIGOS/(AS)	
LEER	
OTROS	

La frecuencia acumulada(fa) es la suma de las **frecuencias** absolutas de todos los valores inferiores o iguales al valor considerado.

ACTIVIDAD PREFERIDA	Frecuencia relativa porcentual(fr%) fr%= fr●100
JUGAR UN DEPORTE	
TV o COMPUTADORA	
CONVERSAR CON AMIGOS/(AS)	
LEER	
OTROS	

La frecuencia acumulada (fr%) frecuencia **porc entual** al tanto por ciento de las veces que se ha obtenido un determinado resultado. Se obtiene multiplicando por 100 la frecuencia relativa.

UNIVERSIDAD CATÓLICA
DE LA SANTÍSIMA CONCEPCIÓN.
FACULTAD DE EDUCACIÓN

GUÍA DE TRABAJO

ACTIVIDAD DE AULA

¿VAMOS A JUGAR CON DADOS?
INTRODUCCIÓN A VARIABLE ALEATORIA

El juego “Pepito paga doble”.

Consiste en un tablero dividido en tres partes como se muestra en la figura N°:

2 a 6 Menor	7 Pepito	8 a 12 Mayor

Se pide a los jugadores que apuesten al resultado que saldrá al sumar los números que se obtienen al lanzar dos dados, y los jugadores ponen sus apuestas en los distintos sectores del tablero.
Si sale un número de 2 a 6, quienes apostaron menor reciben un monto igual al apostado;
Si sale un número de 8 a12 apostaron mayor también reciben un monto igual al apostado;
Si sale 7 (Pepito), los que apostaron allí reciben el doble de lo apostado.

¿Cuál será la probabilidad de ganar en cada caso? …………….Para responder esta pregunta debemos analizar:

- Todos los casos posibles en el lanzamiento de dos dados, es decir , el **ESPACIO MUESTRAL (Ω)** del experimento, que podemos escribir en la siguiente tabla en forma de pares ordenados:

Dado \ Dado	1	2	3	4	5	6
1	(1, 1)					
2						
3						
4						
5						
6						

Total de casos

- Lo que nos interesa es saber la suma de los valores obtenidos en los dados, concretamente, si el número obtenido es menor que 7, igual a 7 o mayor que 7:

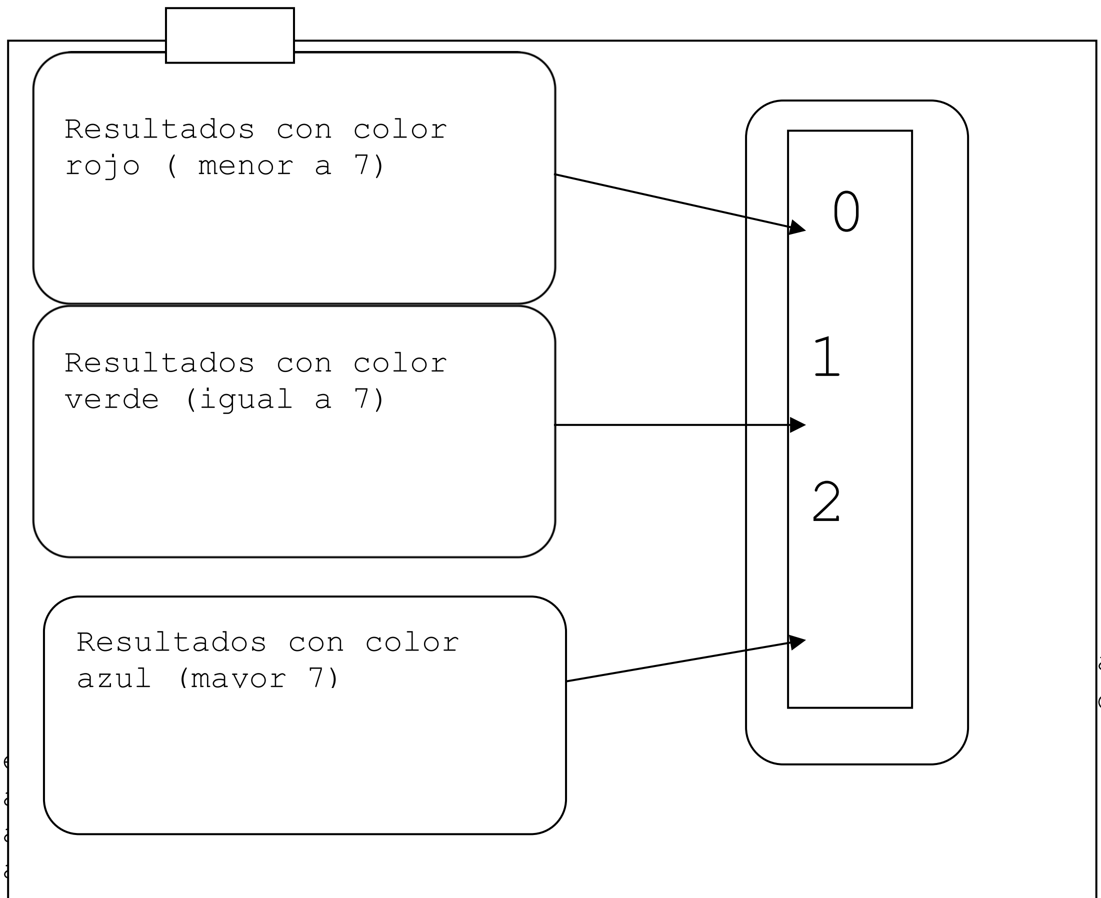
  - Marcar con rojo aquellas casillas en las cuáles se cumpla que la suma sea menor que 7.
  - Marcar con verde las casillas en las cuáles se cumpla que la suma sea igual a 7.
  - Marcar con azul aquellas casillas en las cuáles se cumpla que la suma sea mayor que 7.

	1	2	3	4	5	6
1						
2						
3						
4						

5						
6						

ESPACIO MUESTRAL (Ω)

- Si … claros los resultados de este **EXPERIMENTO de pr…** (rojo, verde y azul), podemos asignar un valor nu… onces cuando vemos los resultados del experimento estaremos observando los **VALORES DE UNA VARIABLE ALEATORIA.** Este valor numérico es el valor de la variable aleatoria. De esta manera la variable aleatoria es una variable que toma un valor numérico único para cada uno de los resultados del espacio muestral de un experimento de probabilidad.



- … ar … dos:

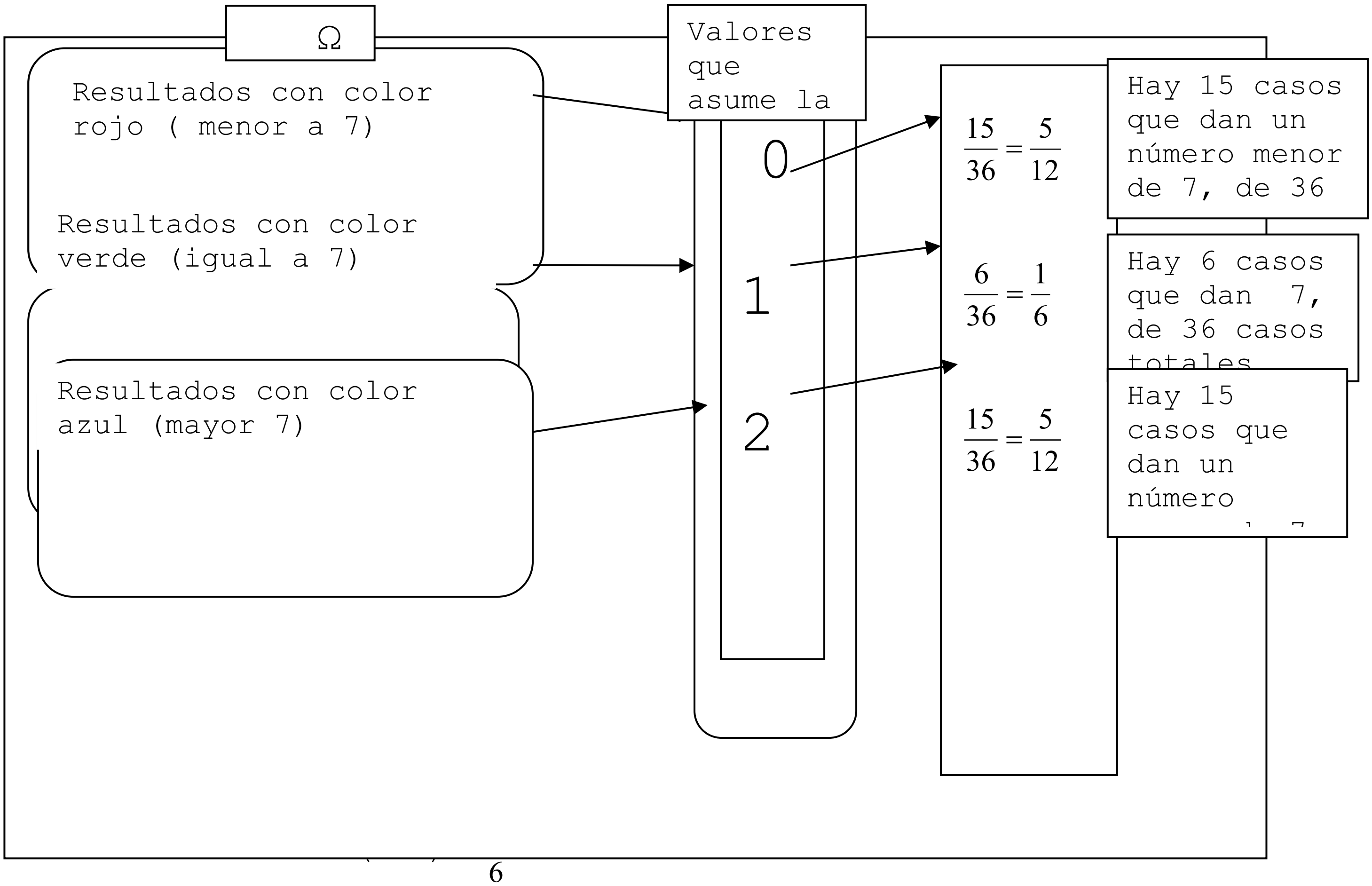
Por e…
Varia…
Varia…
Varia…

- **Las variables aleatorias pueden ser <u>discretas</u> o <u>continuas</u>:**

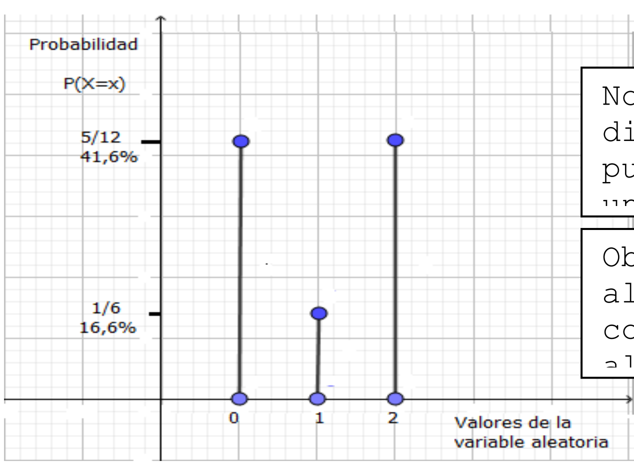
  - <u>Discretas</u>: el conjunto de posibles valores es numerable. Suelen estar asociadas a experimentos en que se mide el número de veces que sucede algo.

- Continuas: el conjunto de posibles valores es no numerable. Puede tomar todos los valores de un intervalo. Son el resultado de medir.

De esta manera podemos escribir:



- La probabilidad de ganar apostando a mayor es $\frac{5}{12}$, es decir P(x=2)= $\frac{5}{12}$



Nota: Para graficar una distribución de probabilidad puedes utilizar barras o bien un segmento de recta

Observación: La variable aleatoria graficada corresponde a una variable aleatoria discreta

Variables Aleatorias Continuas

Comparemos las representaciones gráficas de una v.a. Discreta y una v.a. Continua

➢ Realizaremos un juego:

El juego es para dos personas. Se necesita un tablero como el que se muestra a continuación (con once filas numeradas del 2 al 12 y 11 columnas, la última de las cuales está marcada con la palabra META), 10 fichas de dos colores distintos (5 de cada color) y dos dados (numerados del 1 al 6).

2											
3											M
4											E
5											T
6											A
7											
8											M
9											E
10											T
11											A
12											

- <u>REGLAS DEL JUEGO</u>

  1. Alternativamente, cada uno de los contrincantes, escoge un número comprendido entre 2 y 12 (posibles resultados en la suma de un par de dados), colocando una ficha en la casilla correspondiente. Una vez distribuidos 10 de los 11 números, se empieza a jugar.

  2. Por turno, lanzan los dados cada uno de los contrincantes. Si la suma de los dados es uno de los números escogidos por el lanzador, éste desplaza la ficha correspondiente hacia delante una casilla.

  3. Si la suma de los dados es el número que no ha sido escogido por ninguno de los dos adversarios, el jugador del turno escoge una de sus fichas (la que quiera) y la mueve hacia delante una casilla.

  4. Si la suma de los dados es un número del adversario, las fichas quedan como están.

  5. Gana el jugador que consigue llevar una de sus fichas hacia la meta.

  - <u>VAMOS A JUGAR.</u>

Juegue ahora una partida para familiarizarse con el Juego. Si no tuviera alguien con quien jugar,

simule una partida, tal y como se jugaría si hubiera dos jugadores.
Al realizar las jugadas te distes cuenta de ciertas regularidades o conclusiones que nos gustaría compartir.

- INTERROGANTES QUE SE PRODUCEN AL JUGAR.

(a) ¿Qué números escogerá como preferencia ?________________.
(b)¿Qué números no escogerá ?_______________.
(c) Si tuviera que escoger entre el 3 y el 11, ¿cuál tomaría?_________.
(d) Si tuviera que escoger entre el 5 y el 9, ¿cuál tomaría?________.
(e) ¿Qué números prefiere: "grandes" o "pequeños"?___________.
(f) ¿Da igual los números que escojan ?___________.
(g) ¿Todo es cuestión de suerte?_____________.
(h) Si se juegan 10 partidas, ¿es razonable pensar que ganará una partida cada número elegido? ____________. ¿Porqué? ________________
____
(i) Si se juegan 100 partidas, ¿se debe esperar que, más o menos, gane 10 partidas cada número elegido?___________.¿Por qué?_____________
____

- RECOGIDA DE DATOS.

Para poder analizar el juego es preciso tomar datos. Al responder las preguntas formuladas anteriormente se ha establecido ciertas reglas que intuyen que suceden. Para dicho análisis, es preciso jugar varias partidas y tomar datos. La intención es analizar el juego, no quién lo gana. Con otras palabras se pretende estudiar si hay lecciones de los números más convenientes que otras y, en tal caso, cuáles. Por lo tanto, los datos que interesa tomar son aquellos que se refieren a números escogidos, números ganadores, movimientos realizados, etc.

- Juegue diez partidas y **complete la tabla siguiente**. En la casilla que indica el número que no ha sido escogido en una determinada partida coloque una equis (X); en el resto, el número de casillas que ha avanzado (entre 0 y 11, ambos inclusive). "El cero (0) indica que la ficha no se ha movido. El 11 que la ficha ha llegado a la meta.

Partida	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	Gana
1												
2												
3												
4												
5												
6												
7												
8												
9												
10												

Por la simple observación realizada anteriormente, es posible tomar algunas decisiones respecto a la elección de los números: se puede suponer que, si las condiciones del juego no varían;
¿Qué ocurrirá con los números "centrales" ?______________________
____
¿Los jugadores escogerán con preferencia estos números centrales y dejarán sin seleccionar los números extremos (como el 2 y el 12)?____________
____
¿Las elecciones y respuestas realizadas coinciden con las que has respondido al inicio de la actividad?__________________________________

____

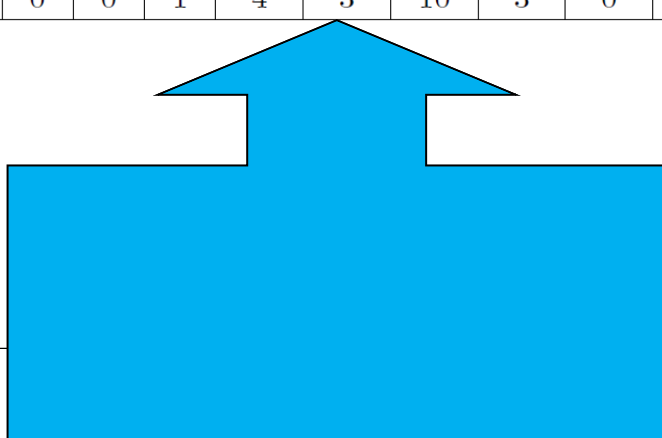
- Al jugar otras 12 partidas completa nuevamente la siguiente tabla:

Partida	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	Gana
11												
12												
13												
14												
15												
16												
17												
18												
19												
20												
21												
22												

- <u>ORGANIZACIÓN DE LOS DATOS EN TABLA DE DISTRIBUCIÓN DE FRECUENCIAS</u>

Para organizar los datos obtenidos para las 22 partidas realizar una tabla de distribución de frecuencias y responde las siguientes preguntas:
¿Cuántas partidas ha ganado cada una de las fichas?___________________
¿Cuántos movimientos corresponden a cada una de las fichas?
Por ejemplo, esta tabla corresponde a la cantidad de movimientos para ganar la partida. Observa y luego grafica.

Ficha	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	Total
Mov.	14	56	89	132	149	180	149	122	99	51	33	1074
Ganadas	0	0	1	4	3	10	3	0	1	0	0	22



El número de movimientos realizados corresponde a la frecuencia absoluta. Corresponde al número de veces que ha salido el 2, 3, 4,…O bien, número de veces que ha ganado la ficha 2, 3, 4,…

De acuerdo a la tabla ¿qué significado tiene el hecho de que al lanzar 1074 veces los dados, sólo 14 veces han sumado 2?

- Completa la siguientes tablas con las frecuencias relativas y los porcentajes tanto de los movimientos como de las partidas ganadas.

FICHA	f(p.ganados)	fr(p.ganados)	fr% (p.ganados)
2			
3			
4			
5			
6			
7			
8			
9			
10			
11			
12			

FICHA	f(mov)	fr (mov)	fr%(mov)	fr% (mov)
2				
3				
4				
5				
6				
7				
8				
9				

10				
11				
12				

➢ <u>VISUALIZACIÓN DE LOS DATOS.</u>

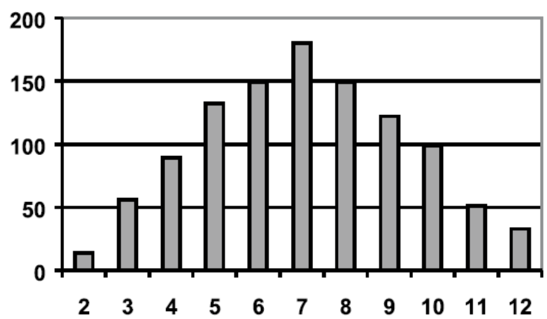


Diagrama 1

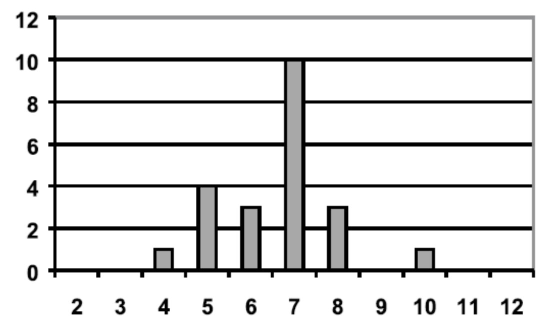


Diagrama 2

TABLERO.

2											
3											M
4											E
5											T
6											A
7											
8											M
9											E
10											T
11											A

FICHAS.

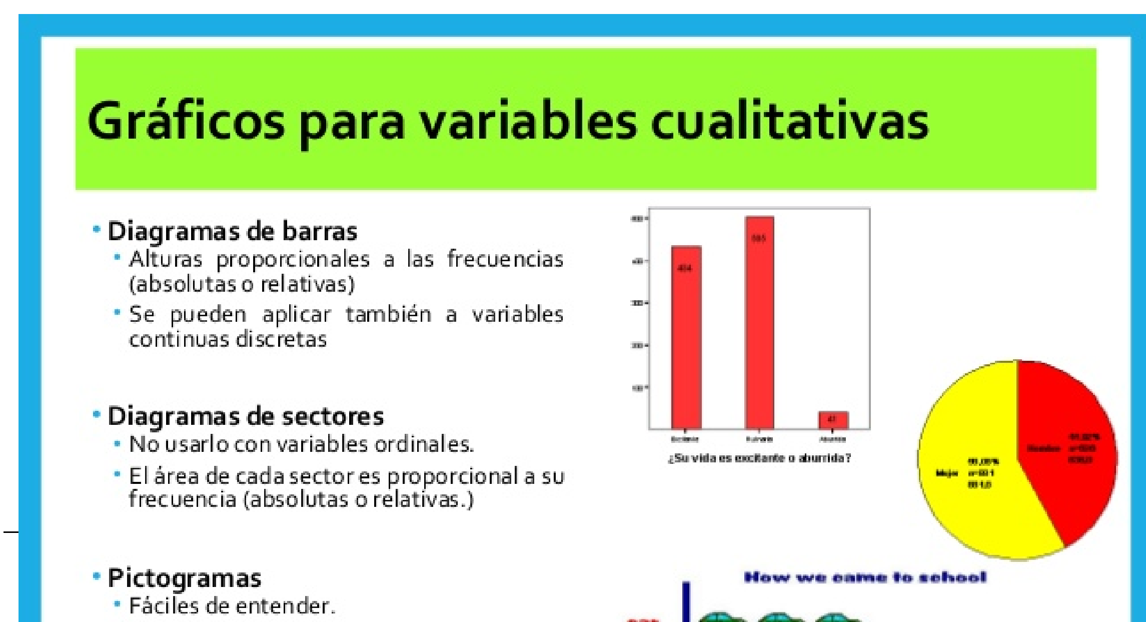
UNIVERSIDAD CATÓLICA
DE LA SANTÍSIMA CONCEPCIÓN.
FACULTAD DE EDUCACIÓN

GU... E...
...VID... ULA
TIPOS DE GRAFICAS ESTADÍSTICAS

E... O

L... zados para la re...ci...os ...ga...rm... respecto a un est... stadís...co.

TIPO DE VARIABLE
- Cualitativa o categórica
  - Gráfico de barras simple o compuesto
  - Gráfico Circular
  - Gráfico de puntos
  - Pictogramas
- Cuantitativa
  - Una variable
    - HISTOGRAMA
    - POLÍGONO DE FRECUENCIAS
    - OJIVA PORCENTUAL
    - DIAGRAMA DE TALLO Y HOJA
    - DIAGRAMA DE CAJA Y BIGOTES
  - Dos variables
    - DIAGRAMA DE DISPERSIÓN



CONSTRUCCIÓN GRÁFICO CIRCULAR

Un **diagrama de sectores** se puede utilizar para todo tipo de *variables*, pero se usa frecuentemente para las **variables cualitativas.**
Los **datos** se representan en un **círculo**, de modo que el **ángulo** de cada **sector** es **proporcional** a la **frecuencia absoluta** correspondiente.

Para obtener el ángulo que corresponde a cada sector tenemos la siguiente expresión:

$$\alpha = \frac{360^\circ}{N} \bullet f_i$$

Apliquemos en el siguiente ejemplo:

USO DE LOS MEDIOS DE TRANSPORTE

Variable estadística	Bus escolar	Automóvil	Bus urbano	Bicicleta	Total
Frecuencia absoluta (Nº de alumnos)	80	30	50	40	200

Observa cómo se elabora un gráfico circular con los datos de la tabla.

1° Se reparten los 360° del círculo en partes proporcionales, para lo cual planteamos las siguientes proporciones en cada caso:

Número de alumnos	Grados sexagesimales

Proporción	Cálculo	Variable
200 —— 360° 80 —— x°	$x = \frac{80 \times 360^\circ}{200} = 144^\circ$	Bus escolar
200 —— 360 30 —— x°	$x = \frac{30 \times 360^\circ}{200} = 54^\circ$	Automóvil
200 —— 360 50 —— x°	$x = \frac{50 \times 360^\circ}{200} = 90^\circ$	Bus urbano
200 —— 360 40 —— x°	$x = \frac{40 \times 360^\circ}{200} = 72^\circ$	Bicicleta

Estas medidas permitirán dividir el círculo en sectores que representarán a cada variable

Con estos datos construye un gráfico circular dividiendo el círculo en las regiones anteriormente calculadas. No olvidar ubicar una leyenda del gráfico con los colores utilizados para cada categoría.

Gráfico circular.

➤ Escribe los pasos que utilizaste para construir el gráfico circular.

Nota. Un gráfico circular también se puede construir con respecto a las frecuencias relativas porcentuales.

Sabores de helados más vendidos en la cafetería escolar	
vainilla	30%
chocolate	43%
fresa	27%

	porciento	decimal
vainilla	30%	0.30
chocolate	43%	0.43
fresa	27%	0.27

Sabores de helados más vendidos en la cafetería escolar	
vainilla	0.30 x 360˚ = 108˚
chocolate	0.43 x 360˚ = 155˚ *
fresa	0.27 x 360˚ = 97˚ *

G: Gráfico circular

El ... ativos
com ... mación
sob ... po de
est

Est ... os en
pul ... :

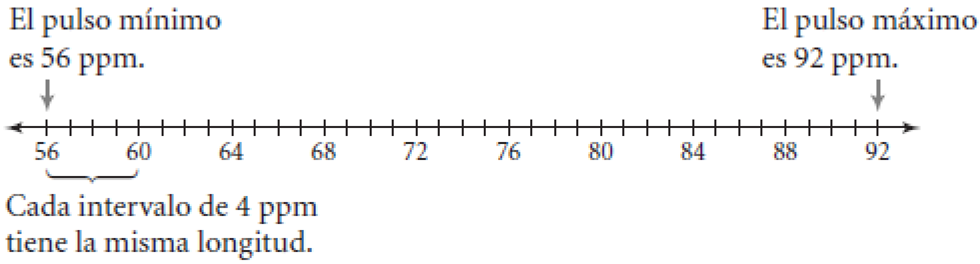
68

72

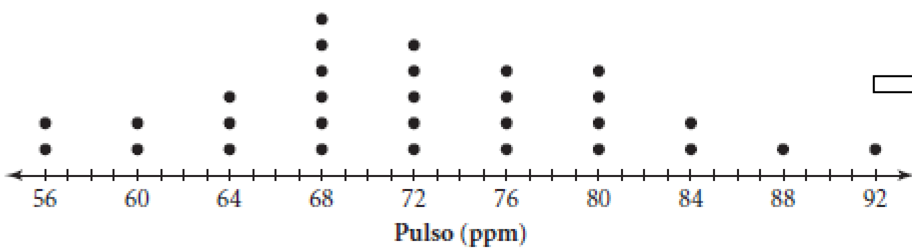
Obtener:
Valor mínimo:____________ Valor Máximo

El valor mínimo y el máximo describen la dispersión de los datos. Por ejemplo, podrías decir:"los pulsos se encuentran entre 56 y 92 ppm". Sobre la base de estos datos solamente. Parece que un pulso de 80 ppm sería "normal", mientras que un pulso de 36 ppm sería demasiado bajo.

Para hacer una gráfica de puntos sobre los pulsos, primero traza una recta numérica con el valor mínimo, 56, en el extremo izquierdo. Selecciona una escala y marca intervalos iguales hasta que alcances un valor máximo de 92.



A continuación para cada valor del conjunto de datos, coloca un punto sobre el valor en la recta numérica. Cuando un valor aparece más de una vez, apila los puntos. Por ejemplo el valor 64 aparece tres veces en el conjunto de datos, de modo que hay tres puntos encima de 64. Asegúrate de rotular el eje de manera q cuáles son los datos.



Nota. Este tipo de gráfica también da noticia sobre la tendencia de valores

¿Qué conclusiones se puede obtener con respecto al gráfico?____________________

____

ACTIVIDAD

Realiza tu propio gráfico de puntos con una variable estadística de tu interés, puede ser

Mascota preferida, o bien las pulsaciones en un minuto de tus compañeros .A trabajar

GRÁFICO DE PUNTOS

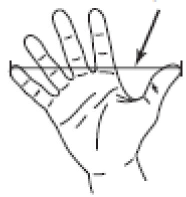
GRÁFICAS PARA VARIABLES CUNATITATIVAS CON UNA VARIABLE.

HISTOGRAMA.

Un histograma es un gráfico que se utiliza para trabajar con datos cuantitativos continuos con intervalos, observa y encontrarás las características de este tipo de gráficas:

Investigación : Cuartas

Una cuarta es la distancia que va desde la punta de tu dedo pulgar hasta la punta de tu dedo meñique cuando extiendes la mano completamente.



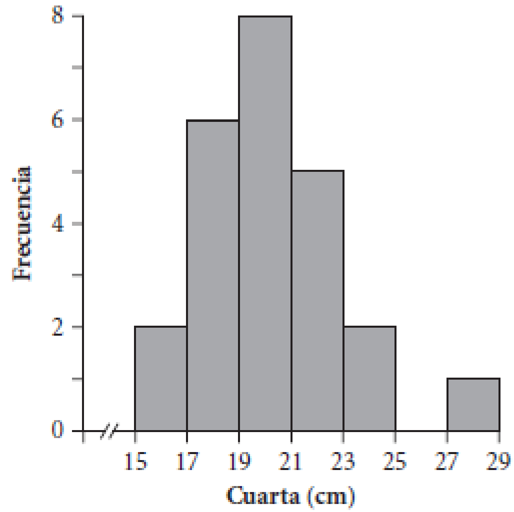
A continuación presentamos medidas de cuartas, redondeadas al medio centímetro más cercano, de los estudiantes de una clase de un curso de Enseñanza media.

19	18.5	20.5	21.5	18.5	17.5	22	22.5	19.5	20	24	18
16.5	28	19	20	20.5	24	15	17	19	18	21	21

Con estos datos construye una tabla con los intervalos convenientes que te permitan interpretar la información obtenida anteriormente:

Intervalo	15 a 17	17 a 19	19 a 21	21 a 23	23 a 25	25 a 27	27 a 29
Frecuencia	2	6	8	5	2	0	1

Ahora dibuja los ejes, presenta la escala del eje horizontal de modo que muestres los valores de cuartas desde 15 a 29, en intervalos de 2. Presenta la escala del eje vertical de modo que muestres los valores de frecuencia entre 0 y 8. Finalmente, dibuja las barras para mostrar los valores de la frecuencia de tu tabla. Estas barras deben ir pegadas una de otra, solo se apreciará un espacio entre ellas cuando no existen valores considerados para ese intervalo. El ancho de la barra puedes escogerlo a tu elección y probar con distintos anchos.

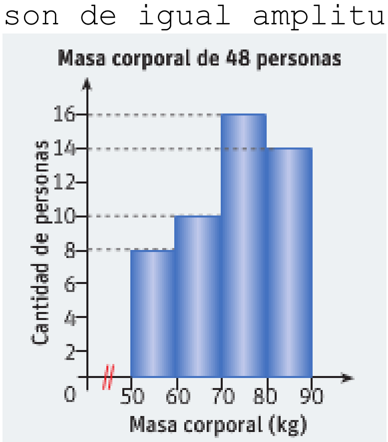


ACTIVIDAD. Mide las cuartas de tus compañeros de curso y fabrica un Histograma.

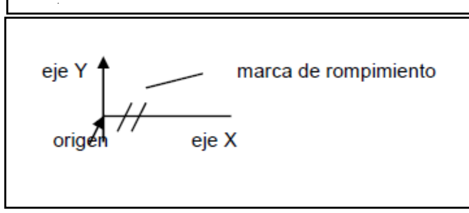
UNIVERSIDAD CATÓLICA
DE LA SANTÍSIMA CONCEPCIÓN.
FACULTAD DE EDUCACIÓN

GUÍA DE TRABAJO
HISTOGRAMAS DE FRECUENCIAS
PARA DATOS AGRUPADOS

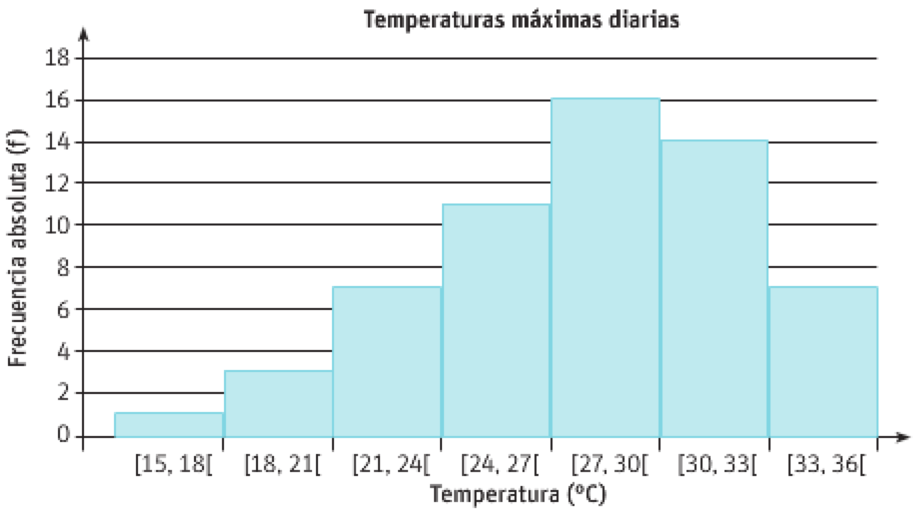
Un histograma o histograma de frecuencias es la representación gráfica correspondiente a una variable cuantitativa continua con intervalos. En el eje "x", de las abscisas, se disponen los valores de las variables. En el eje de las "y" u ordenadas se disponen los valores de las frecuencias absolutas. Agregamos a la tabla de distribución la marca de clases, concepto que corresponde a la semisuma del valor inferior y valor superior de un intervalo o clase y se denota por X_i.
Este tipo de gráfico consta de barras, cuyas alturas corresponden a la frecuencia absoluta de la clase respectiva. Además, todas las barras son de igual ancho, debido a que todos los intervalos son de igual amplitud.



Se realiza un corte en el eje X cuando el intervalo parte de un

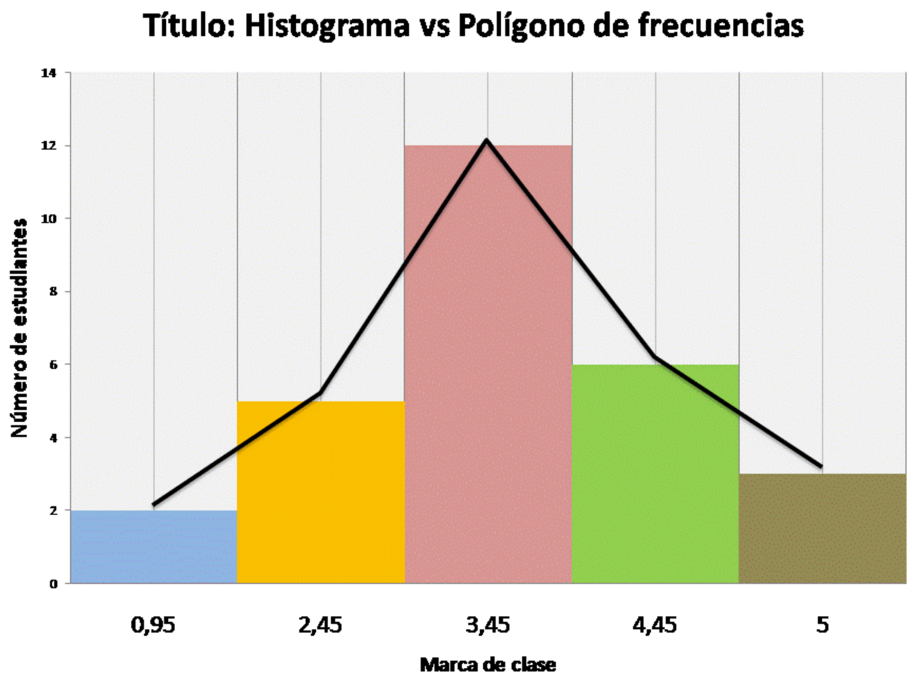


Ejercicio I
Observa el HISTOGRAMA que se presenta a continuación:

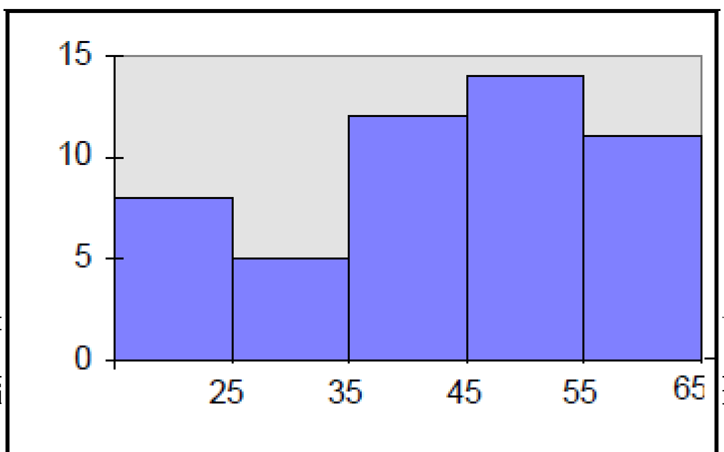


a.) Realiza la tabla de distribución de frecuencia que corresponde al HISTOGRAMA, que contenga variable estadística, frecuencia absoluta y marca de clase.

b.) Marca en cada barra del histograma el punto medio (marca de clase) y une estos puntos con segmentos de recta, como muestra el ejemplo: (este TIPO DE GRÁFICO se denomina POLÍGONO DE FRECUENCIA).
Ejemplo.



CONSTRUCCIÓN DE HISTOGRAMA Y POLÍGONO DE FRECUENCIAS.



Antes de in rama,
mostraremos que la forman:

Número de i de barras	o de barras
Amplitud del intervalo	Equivale al ancho de la columna (A) todas tienen la misma longitud.
Frecuencia de clase o frecuencia absoluta (Fi)	Corresponde a la altura de cada barra y estas deben juntas (pegadas) una con otra.

Marca de clase (Xi), punto medio de entre los extremos de cada intervalo.	Es el punto medio de cada barra.

Ejercicio II

1) Completar la tabla de distribución de frecuencias del peso de 100 estudiantes de tercero y cuarto medio y observar su histograma:

Peso en kg de 100 estudiantes en 3º y 4º medio del Liceo Paris					
Intervalo o clase	Marca de clase Xi	Frec. absoluta fi	Frec. Absoluta acumulada fac	Frec. relativa fr	Frec. Relativa acumulada fr%
[60,63[		7			
[63,66[		23			
[66,69[		43			
[69,72[		17			
[72,75[		10			

2.) Realizar el histograma y el polígono de frecuencia que representa los datos de la tabla de distribución de frecuencias.

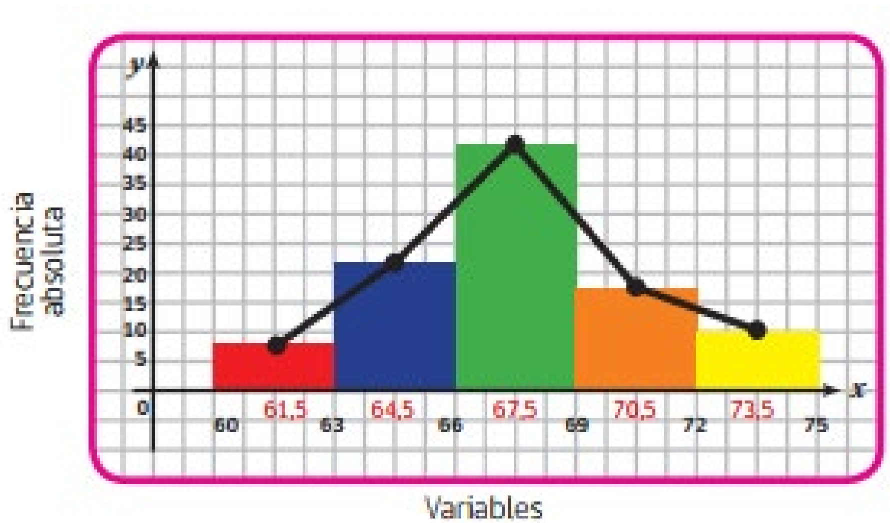
3.) En base al Histograma y tabla de distribución de frecuencias responde las siguientes preguntas:

a) **¿Cuántos estudiantes tienen un peso entre 60 y 70 kilos?** ....

b) **¿Cuántos estudiantes tienen un peso de a lo más 70 kilos?** ....

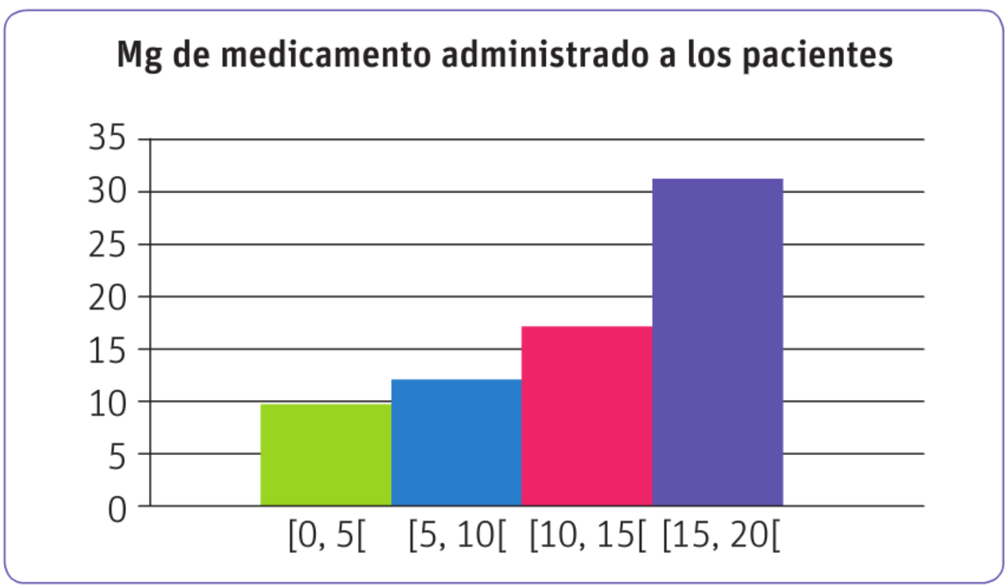
c) **¿Qué porcentaje de estudiantes tiene un peso mayor a 70 kilos?** ....

Tips. El gráfico obtenido debe ser similar al que se presenta a continuación teniendo claro que tu escoges el ancho de la barra proporcional al tamaño de la frecuencia absoluta.



EJERCICIO III

Analiza el siguiente Histograma y responde:



a.) ¿ A cuántos pacientes aproximadamente se les administra entre 10 y 15 miligramos de medicamento?

b.) ¿ Cuántos pacientes aproximadamente reciben más de 5 miligramos de medicamento?

c.) ¿ Cuántos pacientes hay aproximadamente ?

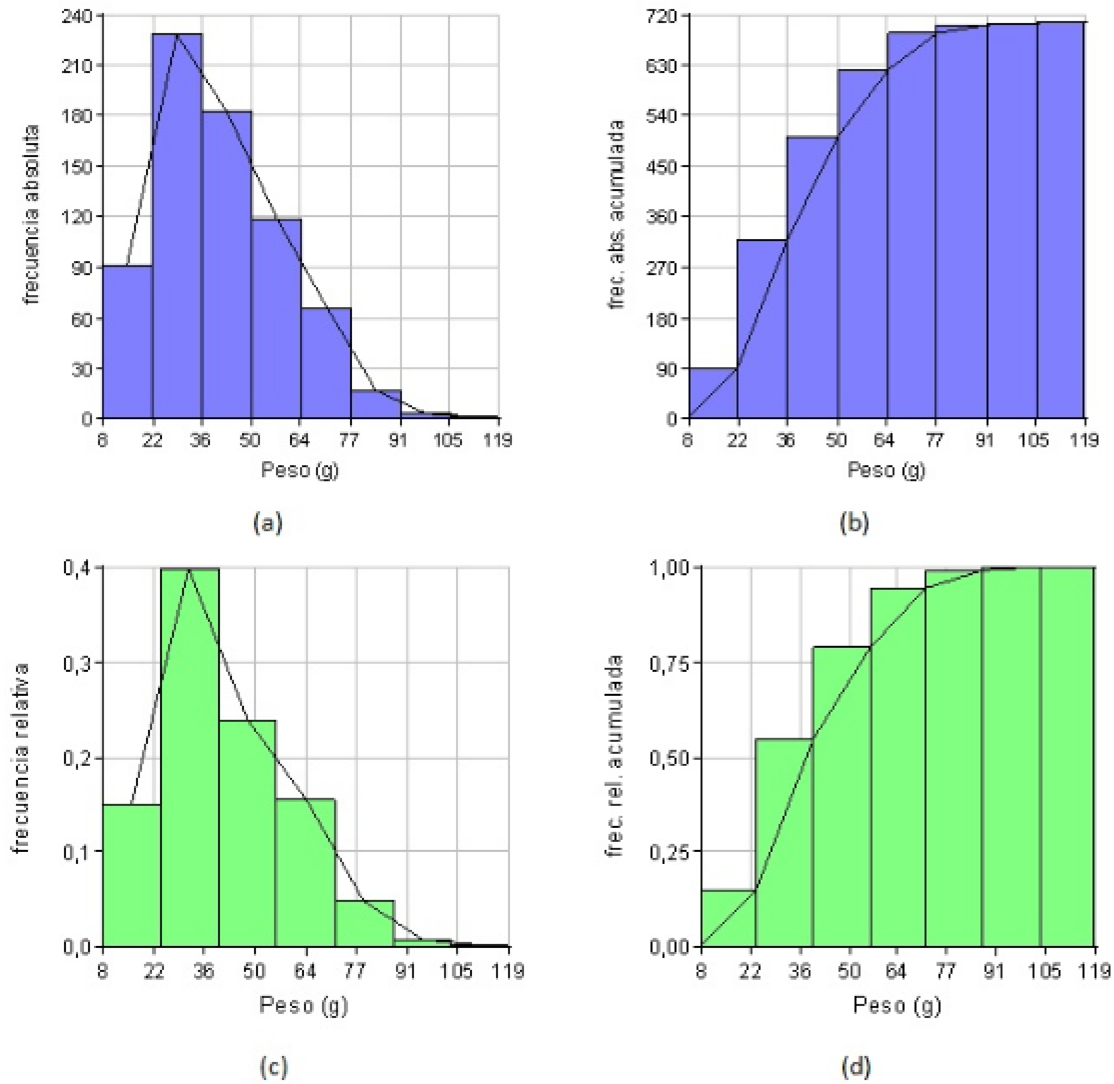
d.) ¿ Se puede asegurar que, en la medida que aumenta la cantidad de miligramos de medicamento, aumenta la cantidad de pacientes que se les suministra? Justifica

Tips.

El **POLÍGONO DE FRECUENCIAS** es una gráfica construida a partir de segmentos de línea que unen las marca de clase (Xi) de los intervalos de clase de un **HISTOGRAMA** si se utiliza la frecuencia absoluta(Fi) o frecuencia relativa (fr). También se puede construir con los límites superiores de cada clase en caso de utilizar frecuencia absoluta acumulada (fac) o frecuencia relativa acumulada porcentual(Frac%). Los polígonos de frecuencias relativas acumuladas también se conocen como **OJIVAS** que son muy utilizadas para trabajas **LOS CUARTILES** .

EJERCICIO IV

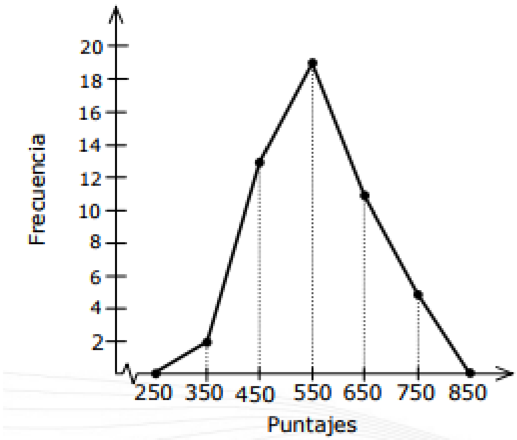
Observemos las gráficas, marca con color los **POLÍGONOS DE FRECUENCIA** y con otro color las **OJIVAS**



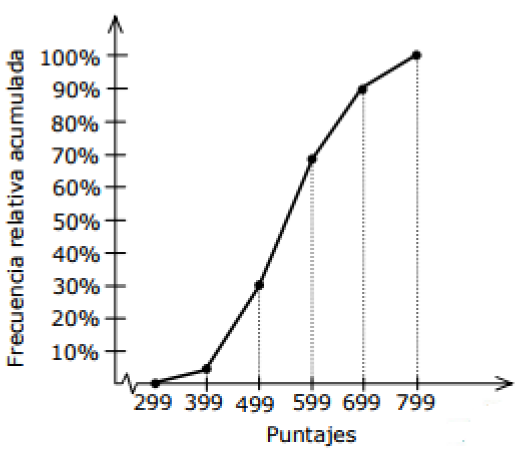
Histograma y polígono de frecuencias absolutas (a), frecuencias absolutas acumuladas (b), frecuencias relativas (c) y frecuencias relativas acumuladas (d) de pesos (en g) de 707 unidades en estudio

El **polígono de frecuencias** también se puede representar **SIN REALIZAR** el Histograma (gráfico abajo a la izquierda) o bien realizar un **polígono de frecuencias acumuladas "OJIVA porcentual"** (gráfico abajo a la derecha).
Polígono de frecuencias: En vez de rectángulos, se usa un segmento poligonal. En el eje de las abscisas anotamos el puntaje

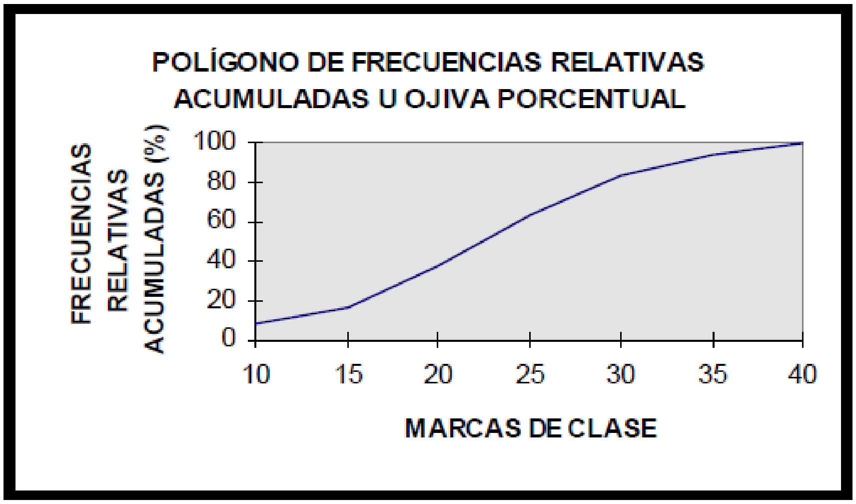
central de cada intervalo. Este puntaje se denomina marca de clase del intervalo.



Polígono de frecuencias acumuladas: Es un polígono que usa normalmente frecuencias relativas acumuladas (aunque también es posible usar frecuencias acumuladas). El eje x muestra el mayor valor de cada intervalo, se denomina **OJIVA.**



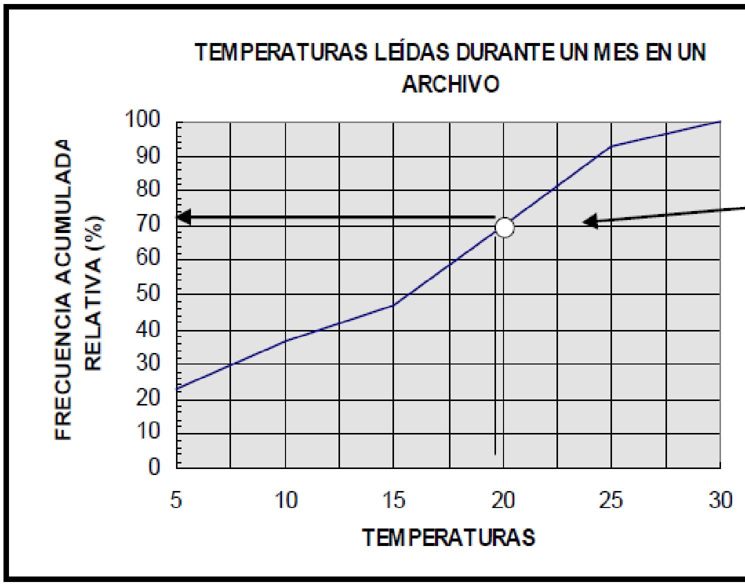
OJIVA PORCENTUAL CON **MARCAS DE CLASE** EN EL EJE DE LAS “X”:



En la construcción de la ojiva porcentual también se pueden ubicar en el eje X los valores correspondiente a los límites superiores de los intervalos para obtener una aproximación en los Cuartiles (Medidas de posición que dividen la muestra en 3 partes más pequeñas cada una de ellas representa un 25%)

EJEMPLO.

Durante un mes se tomaron las temperaturas en una bóveda donde se guardan libros y expedientes en un banco, obteniéndose las siguientes lecturas: 3, 12, 21, 30, 15, 24, 6, 15, 21, 3, 15, 21, 3, 18, 24, 12, 27, 6, 9, 6, 27, 18, 18, 9, 27, 6, 30, 18, 24 y 9 grados respectivamente:



Para estimar el porcentaje de temperaturas menores de 20 grados, localizamos la frecuencia acumulada relativa que se intersecta con este dato.

Así encontramos que aproximadamente el 70% del total de datos es menor que 20, para verificarlo veamos cuántos números son menor de 20:

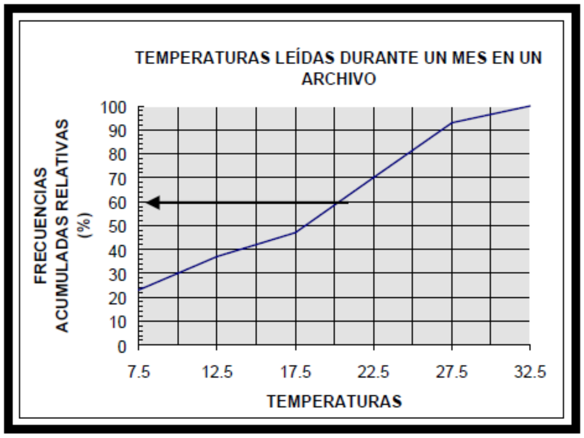
3,3,3,6,6,6,6,9,12,12,15,15,15, 18, 18, 18, 18 (un total de 17 datos que representan un 56.6%)

La tabla siguiente resume la información en los siguientes intervalos:

CLASES	f	Mc	fa	far
3-7	7	5	7	23
8-12	4	10	11	37
13-17	3	15	14	47
18-22	7	20	21	70
23-27	7	25	28	93
28-32	2	30	30	100
	30			

OJIVA PORCENTUAL CON **LÍMITES REALES SUPERIORES** EN EL EJE DE LAS "X"

Realicemos la misma estimación de porcentajes que en la anterior gráfica:



Primero observemos que 20 grados se localiza a la mitad de 17.5 y 22.5, para estimar el porcentaje de temperaturas mayores de esta cantidad vemos que en el eje de las "Y", la frecuencia acumulada relativa que le corresponde es 60%, lo cual implica que 18 datos (el 60% de 30) son mayores de 20, este valor es más cercano que el que se obtuvo en la anterior ojiva.

Comparemos los porcentajes y valores obtenidos en las dos ojivas:

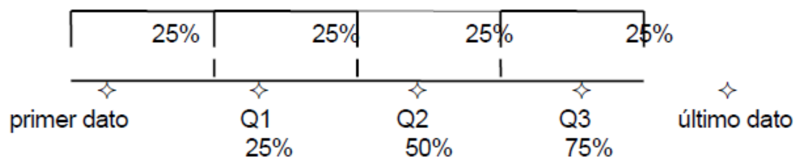
ESTIMACIÓN	OJIVA CON MARCAS DE CLASE	OJIVA CON LÍMITES REALES SUP.
% de datos menores de 20 grados	70%	60%
valores menores de 20 grados	21	18
% de datos mayores de 25 grados	8%	20%
valores mayores de 25 grados	2.4	6

Ubicación de los cuartiles

Los cuartiles son tres valores representados por Q1, Q2 y Q3 que dividen a la población en cuatro partes iguales, cada uno de ellos contiene el 25% del total de los datos considerados, denominándose respectivamente primer cuartil =Q1, segundo cuartil =Q2 y tercer cuartil=Q3.

Si se considera una lista ordenada de todas las observaciones, es fácil observar los puntos que representarían gráficamente a los cuartiles.

Ubic
uno



C1: Ubiquemos en la ojiva porcentual el valor que le corresponde a cada uno de los cuartiles:

cuar
F.acumulada.

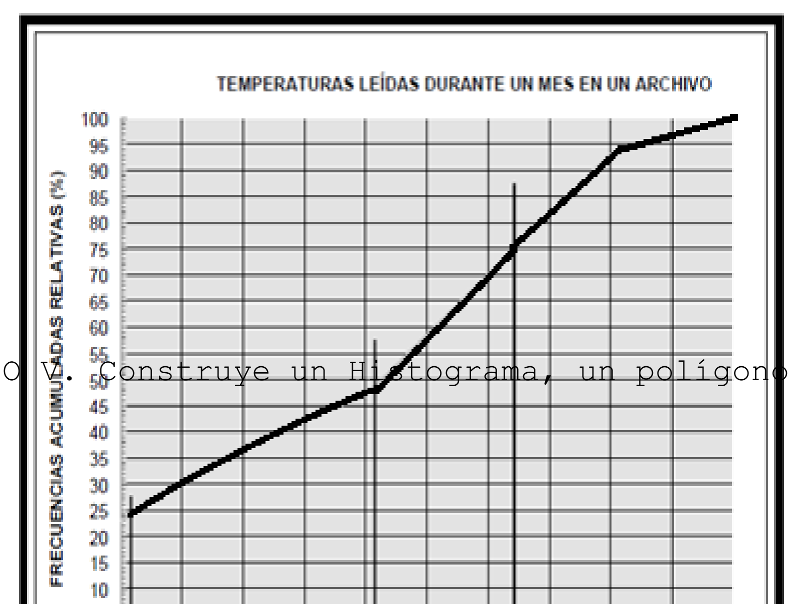
Fórmula para obtener la posición del cuartil $\frac{N \bullet K}{100}$, donde N = número total de datos, K= porcentaje correspondiente

Luego

C1: Li + $\dfrac{\frac{N \bullet K}{100} - fac\,anterior}{fi} \bullet a_i$ = 8+ $\frac{7{,}5-7}{4} \bullet 4$=8,5

Fórmula de cálculo del cuartil:
Li+ $\dfrac{\frac{N \bullet K}{100} - fac\,anterior}{fi} \bullet a_i$

Observa el gráfico y compara los cálculos:



EJERCICIO V. Construye un Histograma, un polígono de frecuencias y una ojiva porcentual MARCANDO LOS CUARTILES en las siguientes tablas de distribución de frecuencias.

ESTATURA DE LOS JUGADORES DE FUTBOL DE UNA ESCUELA DEPORTIVA						
Estatura (cm)	Fi	Xi	Fac	Fr	Fr %	Fra %
[150,155[	7					
[155,160[	10					
[160,165[	15					
[165,170[	12					
[170,175[	6					

b a.)

DISTANCIA RECORRIDA POR BUSES DE UNA COMPAÑÍA						
Distancia (km)	Fi	Xi	Fac	Fr	Fr %	Fra %
[0,250[	7					
[250,500[	10					
[500,750[	15					
[750,1000[	1					

HISTOGRAMA

Polígono de frecuencias

OJIVA CON LOS
CUARTILES

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS:

Bibliografía

Agencia Calidad, E. i. (2015).

http://archivos.agenciaeducacion.cl/TIMMS_presentacion_BAJA.pdf. Santiago Chile.

Agencia de Calidad de la Educación, C. R. (2015). *Informe Nacional Pisa y Timss 2015.* Santiago.Chile: http://www.agenciaeducacion.cl/multimedia/resultados-pisa-chile-2015/.

Agencia de calidad, R. N., & Resultados nacionales e internacionales. (2018). *Evaluaciones nacionales e internacionales de aprendizaje,período 2004-2016.* Santiago de Chile: http://archivos.agenciaeducacion.cl/Panorama_Evaluaciones_nacionales_e_internacionales_V03_01MAR.pdf.

Batanero, C., Ortiz, J. J., & Serrano, L. (2006). *INVESTIGACIÓN EN DIDÁCTICA DE LA PROBABILIDAD.* España: Universidad de Granada.

Bonacina, M., Teti, C., Haida, A., Bortolato, S., & Philippe, V. (16 de Noviembre de 2014). *http://funes.uniandes.edu.co/5639/.* Recuperado el 30 de Junio de 2017, de https://www.google.cl/search?q=Chevallard.+(2007).+Estructura+de+los+recorridos+de+Estudios+e+Investigaci%C3%B3n.&oq=Chevallard.+(2007).+Estructura+de+los+recorridos+de+Estudios+e+Investigaci%C3%B3n.&aqs=chrome..69i57.8925j0j4&sourceid=chrome&ie=UTF-8#q=U

Chevallard. (1.999). El análisis de las prácticas docentes. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 221-266.

Chevallard. (2004). *La place des mathématiques vivantes dans l'éducation secondaire.* Cantal, Francia: © CRM.

Chevallard. (2007). *Estructura de los recorridos de Estudios e Investigación.*

Chevallard. (2009). *La TAD face au professeur de mathématiques.* Toulouse, Francia: © CRM.

Chevallard, Bosch, Gascón, & y Sierra. (2014). *Las Matemáticas para la Enseñanza en una Formación del profesorado basado en el estudio de cuestiones.* España.

Chevallard, Y., Bosch, M., & Gascón, J. (2004). *La Praxeología local como unidad de análisis de los procesos didáticos.* España.

Corica, A. R., & Otero, M. R. (Noviembre de 2009). *http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1665-24362009000300002.* Recuperado el 30 de Junio de 2017

Del Pino, G., & Soledad, E. (2012). Educación estadística: relaciones con la matemática. *Pensamiento Educativo. Revista de investigación Latinoamericana.*

Estándares orientadores para carreras de Pedagogía en Enseñanza Media, M. d. (Mayo 2012). *Estándares orientadores para carreras de pedagogía en Educación Media.* Santiago de Chile:

LOM Ediciones Ltda., rescatado de http://portales.mineduc.cl/usuarios/cpeip/File/librosestandaresvale/libromediafinal.pdf.
Fonseca Bon, C., Pereira Añón, A., & Casas Miras, J. M. (Junio de 2011). *http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1665-58262011000100005.* Recuperado el 30 de Junio de 2017
Fonseca, C., Pereira, A., & Casas, J. M. (Junio de 2011). *http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1665-58262011000100005.* Recuperado el 30 de Junio de 2017
Foucault Michel, D. G. (1990). *¿Que es un dispositivo?, rescatado http://www.multimedia.pueg.unam.mx/lecturas_formacion/sexualidades/modulo_2/sesion_3/complementaria/Deleuze_Que_es_un_dispositivo.pdf.* Barcelona: Gedisa.
http://imagenesdelsur.cicbata.org/sites/default/files/Qu%C3%A9-es-un-dispositivo_Deleuze.pdf. (s.f.).
Mineduc. (2016). *Resultados SIMCE.* Santiago, Chile.
Mineduc. (2017). *Currículum en Linea,Programa de Estudio Matemática.* Santiago de Chile: http://www.curriculumenlineamineduc.cl/605/articles-34359_programa.pdf.
Mineduc, E. d. (2015). *Estandares de Aprendizaje Matemática II Medio.* Santiago de Chile: rescatado http://www.curriculumenlineamineduc.cl/605/articles-33859_recurso_91.pdf.
Ministerio de Educación, G. d. (2017). *Orientaciones para la apropiación curricular, 7° a 2° Medio.Rescatado http://media.mineduc.cl/wp-content/uploads/sites/28/2017/05/Orientaciones-apropiacion-BC-7%C2%BA-2%C2%BAM-web-corregido.pdf.* Santiago, Chile.
NCTM, 1989; NATIONAL CURRICULUM, 1999; NCTM, 2000;, & SINGAPORE, 2007; MINEDUC, 2012; 2013a). (2016). Exigencia cognitiva de las tareas sobre probabilidad en el currículo. *V Encuentro sobre Didáctica del Estadística, la Probabilidad y el Análisis de Datos.* Costa Rica.
Ortiz, J. J., & Batanero, C. (2010). *Investigaciones actuales en educación estadística y formación de profesores. Rescatado de http://www.ugr.es/~batanero/pages/ARTICULOS/LIBRO.pdf.* Granada, España: Universidad de Granada.
Otero, M. R., Fanaro, M. d., Corica, A. R., & LLanos, V. C. (2013). *La Teoría Antropológica de lo didáctico en el Aula Matemática.* Buenos Aires: Dunken.
Parra, V., Otero, M. R., & Ángeles, F. M. (2015). Recorrido de estudio e investigación codisciplinar a la microeconomía en el último año del nivel secundario. *Uno Revista de Didáctica de la Matemáticas*, 1-10.
Parra, V., Otero, M. R., & Ángeles, F. M. (2015). Recorrido de

estudio e investigación codisciplinar a la microeconomía en el último año del nivel secundario. *Uno Revista de Didáctica de la Matemática*, 1-10.

Rodriguez Gomez, G., Gil Flores, J., & García Jimenez, E. (1999). *Metodología de la investigación Cualitativa.* Málaga: Aljibe.

Sánchez, L. I., & Camacho, R. A. (2013). Nuevos objetos y nuevas ténicas para la enseñanza de la Matemática. *Revista de la Escuela de Ciencias de la Educación*, N°12, volumen 1, 115-131, rescatado de https://www.researchgate.net/publication/319101174_NUEVOS_OBJETOS_Y_NUEVAS_TECNICAS_PARA_LA_ENSENANZA_DE_LA_MATEMATICA.

Verónica, P., Otero, M. R., & Fanaro, M. d. (2015). *Recorrido y estudio de investigación codisciplinar al estudio de la microeconomía en el último año del nivel secundario.*