UNIVERSIDAD CATÓLICA DE LA SANTÍSIMA CONCEPCIÓN

FACULTAD DE EDUCACIÓN – FACULTAD DE INGENIERÍA

MAGÍSTER EN DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA

VISUALIZACIÓN PLANAR Y CONFIGURACIONES EN EL APRENDIZAJE DE LA CIRCUNFERENCIA EN FUTUROS PROFESORES DE MATEMÁTICA DESDE EL PUNTO DE VISTA ONTOSEMIÓTICO

AUTORA: NATALIA ELIZABETH PÉREZ CABRERA

PROFESOR GUÍA: DR. MARCO URIBE SANTIBÁÑEZ

TESIS PARA OPTAR AL GRADO DE MAGÍSTER EN DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA

SEPTIEMBRE 2019, CONCEPCIÓN- CHILE

Antonella Elizabeth, recuerda siempre que el futuro pertenece a aquellos que creen en la belleza de sus sueños.

AGRADECIMIENTOS

Agradezco a mi familia por el apoyo incondicional y brindarme así la posibilidad de ir cumpliendo uno a uno mis sueños.

A los futuros profesores de matemática que participaron en esta investigación, para todos ellos mis mejores deseos en el camino que han decidido emprender, no es una tarea fácil, pero es lejos una de las que entrega mayores satisfacciones.

Agradecida también de los profesores de la asignatura de geometría plana Mauricio Gallardo y Miguel Seron que me dieron acceso a su sala de clases para desarrollar esta investigación siempre con la mejor disposición.

Y en especial a mi profesor Marco Uribe por aceptarme como su alumna, acompañarme durante todo este proceso siempre con la mejor disposición, por ayudarme, apoyarme y aconsejarme a pesar de las eventualidades del proceso. Gracias por confiar en mi trabajo y llevar juntos el desarrollo de esta investigación ya que sin usted y su mirada más amplia y objetiva de las cosas esto no habría sido posible.

ÍNDICE DE CONTENIDOS

ÍNDICE DE TABLAS

ÍNDICE DE FIGURAS

ÍNDICE DE ESQUEMAS

RESUMEN

Esta investigación se enmarca en el contexto de la formación de futuros profesores de matemática de la carrera de pedagogía media en Matemáticas de la UCSC y tiene relación con el uso de la Visualización y Configuraciones geométricas presentes en los materiales de enseñanza (Libros) utilizados por los futuros profesores de matemática, así como la aparición de éstas frente a la realización de actividades evaluativas en la asignatura de Geometría Plana. En particular nos interesa conocer los elementos asociados a la acción del futuro profesor de matemática frente a actividades que requieran la visualización y las configuraciones geométricas para mejorar el aprendizaje de la geometría, potenciar conocimientos en geometría y facilitar la adquisición de herramientas geométricas.

A partir de lo anterior, esta investigación se focaliza en considerar la Visualización y las Configuraciones asociadas a la circunferencia, por lo que se abordan dos grandes ámbitos de interés: primeramente se hace un análisis exhaustivo del material bibliográfico utilizados por los futuros profesores de matemática y que están considerados como material fundamental en la bibliografía básica y complementaria del programa de la asignatura Geometría Plana: Se realiza una caracterización y tipología de los libros, se establece los campos de problemas que abordan los libros respecto de la circunferencia siguiendo el EOS (Enfoque Ontosemitico), se analizan los problemas y se estratifican los ejemplos y ejercicios de acuerdo a la taxonomía de Bloom con el propósito de establecer el nivel de profundidad de los aprendizajes geométricos desplegados en los libros. Se analizan los textos a través de los objetos primarios y visuales primarios del EOS. En segundo lugar, se diseña, valida y aplica un cuestionario a los futuros profesores de matemática con el propósito de establecer el uso de visualización y configuraciones en la resolución de problemas evaluativos: Se realiza una distribución de los aciertos y errores de las actividades evaluativas, se realiza un procesamiento epistémico asociado a la resolución de los ítems evaluados, se establece los tipos de configuraciones desplegadas a los ítems evaluados y finalmente se describen la tipología de errores presentados por los futuros profesores de matemáticas a través de los objetos primarios del EOS.

A partir del análisis y discusión de los resultados podemos indicar que si bien, la Visualización y las Configuraciones están declaradas en los planes y programas de estudios del

Mineduc, además indicadas como elementos importantes a desarrollar en los *Estándares Orientadores para la Formación de Profesores de Enseñanza Media*, en esta investigación se ha observado de manera parcial y poco sistemática el uso en futuros profesores de matemáticas de la Visualización y las Configuraciones como elementos que permitan mejorar el aprendizaje de la geometría, así como potenciar los conocimientos y desarrollar herramientas que faciliten la resolución de problemas geométricos.

ABSTRACT

This research is framed in the context of the formation of future mathematics professors of the UCSC Mathematics Pedagogy in Mathematics and is related to the use of visualization and geometric configurations present in the teaching materials (Books) used by students. future professors of mathematics, as well as the appearance of these against the realization of evaluative activities in the subject of Flat Geometry. In particular, we are interested in knowing the elements associated with the action of the future professor of mathematics against activities that require visualization and geometric configurations to improve the learning of geometry, enhance knowledge in geometry and facilitate the acquisition of geometric tools.

Based on the above, this research focuses on considering the Visualization and the Configurations associated with the circle, so two main areas of interest are addressed: first, an exhaustive analysis of the bibliographic material used by future mathematics teachers is made and which are considered as fundamental material in the basic and complementary bibliography of the program of the subject Flat Geometry: A characterization and typology of the books is carried out, the problem fields that the books address regarding the circumference following the EOS are established (Ontosemitic Approach), the problems are analyzed and the examples and exercises are stratified according to Bloom's taxonomy in order to establish the level of depth of the geometric learning displayed in the books. The texts are analyzed through the primary and visual primary objects of the EOS. Secondly, a questionnaire is designed, validated and applied to future mathematics teachers with the purpose of establishing the use of visualization and configurations in the resolution of evaluative problems: A distribution of the successes and

errors of the evaluation activities is made, Epistemic processing is carried out associated with the resolution of the evaluated items, the types of configurations deployed to the evaluated items are established and finally the type of errors presented by future math teachers through the primary objects of the EOS are described.

From the analysis and discussion of the results we can indicate that although, the visualization and the Configurations are declared in the plans and programs of studies of the Mineduc, also indicated as important elements to develop in the Guiding Standards for the Training of Teaching Teachers On the average, in this research the use in future mathematics teachers of Visualization and Configurations has been observed in a partial and unsystematic way as elements that improve the learning of geometry, as well as enhance knowledge and develop tools that facilitate resolution of geometric problems.

INTRODUCCIÓN

La Visualización ha sido un tema de interés en numerosas investigaciones en educación matemática, especialmente en el área de la geometría (Clemens (2017); Marmolejo y González (2012); Presmeg (1986), entre otros). Así se intenta analizar los procesos que generan los estudiantes para realizar ciertas actividades que requieran visualizar objetos geométricos y cómo se realizan determinadas configuraciones. Es fundamental el papel que ha significado el uso de la visualización en el aprendizaje de la geometría y su importancia se ve reflejada en lo establecido en el currículum chileno (2015). Por lo que se considera debiese establecerse de igual manera su presencia en la formación de futuros profesores de matemática, pero hay pocas investigaciones al respecto.

Es por esto que el objetivo principal de esta investigación se centra en Analizar el uso de la Visualización planar y las Configuraciones que aparecen en los textos bibliográficos y en la resolución de actividades evaluativas respecto del aprendizaje de la circunferencia en futuros profesores de matemática desde el punto de vista ontosemiótico, por lo que se ha establecido abordar la problemática de investigación a través del EOS que Godino y colaboradores vienen desarrollando para la Didáctica de las Matemáticas (Godino y Font, 2010) y así poder contribuir con información en el aprendizaje de la circunferencia, elementos y propiedades. Por lo que aplicaremos categorías de objetos matemáticos primarios que propone el EOS (lenguaje, conceptos, propiedades, procedimientos y argumentos) lo que servirá como base para describir el tipo de configuraciones cognitivas que ponen en evidencia los futuros profesores de matemática en la resolución de actividades en geometría y los errores asociados a la resolución de problemas.

Esta investigación se ha desarrollado en cinco capítulos:

En el capítulo I describimos los antecedentes del problema, las principales interrogantes de la investigación, su contextualización tanto en el currículum chileno, como en el contexto de la prueba de selección universitaria y los estándares para la formación de profesores, además de la fundamentación del problema de investigación de la Visualización y las Configuraciones geométricas presentes en textos escolares y universitarios. También se establece el propósito de la investigación y los objetivos a seguir.

Para el capítulo II se presenta el marco teórico siguiendo a lo establecido en el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática, el sistema de prácticas ligadas a campos de problemas, emergencia de los objetos matemáticos, primer nivel de configuraciones, segundo nivel de atributos contextuales, procesos, tipos de configuraciones entre otros.

En el capítulo III se establece la metodología a seguir, enfoque, tipo y diseño de la investigación como también la población objetivo y las técnicas e instrumentos de recopilación de la información a través de los textos seleccionados y del instrumento evaluativo generado.

Para el Capítulo IV se realiza el análisis de los resultados obtenidos en la información que entregan los textos estudiados y el instrumento evaluativo.

Finalmente en el capítulo V se presentan las conclusiones sobre los objetivos planteados, las proyecciones y limitaciones de esta investigación.

CAPÍTULO I

FORMULACIÓN GENERAL DEL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

1.1. Antecedentes del problema

Entre los siglos XVII y gran parte del XX la historia de las matemáticas puso en evidencia una “desvisualización” o “desespacialización” en la geometría (Davis, 1993). Esa tendencia a dejar de lado la visualización se debió a que se le supuso como un obstáculo para el desarrollo de las matemáticas y que no se consideraba necesaria, con la aparición de los computadores gráficos y los programas informáticos se desarrollaron estudios sobre el funcionamiento de la mente e hicieron que el interés de los investigadores en el campo de la educación matemática, por el papel e importancia que juega la visualización en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, creciera en los últimos decenios (Presmeg, 2006)

Muchos investigadores de finales del siglo XX, afirmaron se estaba viviendo una etapa de renacimiento de la visualización. Por lo que se fue generando una tendencia cada vez más fuerte a reconocer la gran importancia y el especial interés de la visualización en el aprendizaje y en la enseñanza de las matemáticas Arcavi (2003); Presmeg (2006); Duval (2003).

Si bien las figuras geométricas son un importante soporte intuitivo para el desarrollo de actividades geométricas, no es obvio ni espontáneo que en la resolución de un problema matemático los profesores y estudiantes hagan de ellas elementos claves para realizar exploraciones heurísticas. Por el contrario, investigaciones como la realizada por Marmolejo y Vega (2012) evidencian la complejidad frente a un aprendizaje específico, destacando los procedimientos cognitivamente potentes realizados de un grupo de estudiantes quienes participaron de una secuencia de enseñanza sobre maneras de transformar figuras geométricas y el desarrollo de actividades de comparación de figuras según cantidades de área.

Cabe señalar que los aportes de las investigaciones en educación matemática que se han realizado en torno a la visualización son variados. Entre ellos destacan los estudios sobre el papel que desempeña la visualización de las figuras geométricas en el desarrollo de otras actividades cognitivas como la del razonamiento deductivo (Sánchez, 2003), la argumentación (Mesquita , 1989), la modelación (Rivera & Becker, 2008) así como también dar cuenta del papel de la Visualización en el desarrollo de conceptos matemáticos en contextos educativos como la homotecia (Lemonidis, 1991) y el área (Outhred y Mitchelmore, 2000). Por otro lado, estudios sobre la incidencia que pueden tener los profesores en el desarrollo cognitivo gracias al uso de elementos visuales por parte de sus estudiantes fueron estudiadas por (Presmeg, 1986) y sobre el papel que juegan los materiales didácticos en entornos informáticos en el desarrollo de la visualización (Kordaki, 2003). Finalmente hay estudios respecto a cómo los manuales escolares promueven el aprendizaje a través de la visualización (Marmolejo y González, 2012).

A pesar de que se ha evidenciado estudios e investigaciones respecto del uso de la visualización se ha explorado muy poco sobre el efecto de la visualización en el aprendizaje de los futuros profesores de matemática y como éstos abordan la visualización y las configuraciones en la asignatura de geometría, en su formación académica y la necesidad de constituir la visualización como objeto de la enseñanza ya que se trata de una actividad cognitiva que de no orientarse adecuadamente, puede dificultar aún más el aprendizaje de las matemáticas y su labor como docente.

1.2. Principales interrogantes de la investigación

1.2.1. Contextualización del problema de investigación

En Chile, de acuerdo a lo establecido por el Ministerio de Educación (2015) la asignatura de matemática se divide en cuatro ejes temáticos: Números, Álgebra, Geometría y Datos y Azar, que se comienzan a abordar desde la enseñanza básica (niños de 6 a 12 años), en particular el eje de geometría y de acuerdo a las bases curriculares se establece que los estudiantes desarrollen sus capacidades espaciales ya que ellas les permite comprender de mejor manera el espacio y sus formas. En enseñanza media (estudiantes de 12 a 18 años) al finalizar el ciclo de formación, los estudiantes deben ser capaces de apreciar y utilizar de manera adecuada y precisa las propiedades y relaciones geométricas, tendrán que ser competentes en mediciones geométricas y deberán relacionar la geometría con los números y el álgebra de manera armoniosa y concreta. Este eje presenta las razones trigonométricas para que los alumnos tengan más herramientas para la resolución de problemas. Más aún, propone que los estudiantes comprendan las representaciones de coordenadas en el plano cartesiano y usen destrezas de visualización espacial. En este proceso de aprendizaje, los estudiantes deben utilizar diferentes instrumentos de medida para visualizar ciertas figuras 2D o 3D y se recomiendan tanto las construcciones manuales como las tecnológicas. Todo esto con el fin de que los estudiantes logren un desarrollo del razonamiento que se traduzca en comprender el espacio y sus formas, además de brindar herramientas creativas que se puedan traducir en un lenguaje universal.

Por otro lado, las universidades chilenas miden los conocimientos básicos requeridos por los estudiantes para el ingreso a sus casas de estudios en la prueba de selección universitaria (PSU), teniendo como referencia los Objetivos Fundamentales y los Contenidos Mínimos Obligatorios planteados en el Marco Curricular, en particular la PSU de Matemática elaborada por el DEMRE (DEMRE, 2017) es una prueba de razonamiento matemático, donde se evalúan las habilidades cognitivas, los modos de operación y los métodos generales aplicados a la resolución de problemas. En los contenidos a medir se encuentra el eje temático de geometría que corresponde a un 27% de ítems de la prueba (20 preguntas de un total de 75) en la prueba que mide habilidad cognitiva y de éste ítem considerando el informe presentado por DEMRE el desempeño se presenta en términos porcentuales como el promedio de respuestas correctas en cada área que son geometría posicional (11 o 12 preguntas) y geometría proporcional (8 o 9 preguntas) donde en la primera el 31% de las preguntas fueron bien contestadas mientras que en la segunda 39% de las preguntas fueron acertadas, una de las dificultades que se observa desde el informe emanado del ministerio es que la visualización durante el desarrollo de tareas geométricas que no han sido abordadas por el currículum chileno generaría bajos resultados en este eje.

Finalmente los estudiantes que ingresan a las carreras de pedagogía en matemática de las universidades chilenas deben cumplir con estándares disciplinarios para la enseñanza de la matemática en educación media (Ministerio de Educación, 2012) los que corresponden a la identificación de los conocimientos mínimos e imprescindibles que cada profesor o profesora debe saber en el ámbito de su disciplina y de la enseñanza de la misma, así como las competencias genéricas, disposiciones y actitudes profesionales necesarias para desempeñarse eficazmente en los seis niveles escolares que comprende la Educación Media, la elaboración de los estándares fue encomendada a centros especializados pertenecientes a distintas instituciones universitarias contando con la participación de un equipo de asesores expertos en el área y en formación inicial de profesores de Educación Media, por lo que los estándares pueden ser concebidos como un instrumento de referencia para las instituciones formadoras de profesores. Su valor reside en que informan de una manera precisa y transparente los conocimientos esperados de los estudiantes que ingresan a las carreras de pedagogía, sin interferir en la libertad académica de las instituciones de educación superior. Éste documento es un instrumento que facilita la orientación y el seguimiento de los logros alcanzados a través del proceso formativo y que permitirá diagnosticar las necesidades de reforzamiento y formación continua, de manera de apoyar a las instituciones en el desafío que significa en la actualidad formar profesores de calidad. En este contexto y en particular, en el eje de Geometría el documento menciona que aborda la visualización dinámica de la Geometría mediante el uso de procesadores geométricos, facilitando conjeturar propiedades y apoyando el desarrollo de la intuición geométrica. Si bien la visualización se encuentra establecida dentro de los estándares disciplinarios sería interesante ver cómo es abordado dentro del aula por los futuros profesores de matemática durante su formación académica.

Según la investigación de Clemente, Llinares y Torregrosa (2017) los resultados indican que los futuros profesores de matemática deben llegar a conocer la geometría en el ámbito curricular de la educación primaria, de forma que les permita ir más allá de simplemente reconocer propiedades y hechos geométricos en las figuras geométricas. De ésta manera, el profesor debe ser consciente del papel que desempeña la visualización en el aprendizaje de la geometría, ésta le puede ayudar a gestionar de mejor manera las dificultades que emergen de sus estudiantes. Más aún, de acuerdo a Martín (2015) el problema de la calidad de los aprendizajes, con gran fuerza en la educación superior, precisa de una atención más profunda y centrada en todos los actores del proceso de enseñanza y aprendizaje.

Cabe mencionar que investigaciones como las de Soto-Andrade (2008) muestran que, a pesar de que el razonamiento visual está contemplado en los currículos, en general, los profesores lo siguen presentando como un argumento auxiliar o introductorio, un accesorio al que no asignan la importancia que debería tener. Como consecuencia, los alumnos no lo consideran como un tipo de razonamiento básico para su formación ni como una acción del todo válida para hacer matemáticas.

Un análisis más exhaustivo de diversas mallas curriculares ofertadas por instituciones de educación superior muestra que los estudiantes de pedagogía en matemática deben cursar alrededor de 50 asignaturas obligatorias de las cuales entre el 5% y 9% corresponde a asignaturas específicas de Geometría (2 a 4 asignaturas) las que son establecidas según la casa de estudio y en general cuando a los alumnos se les enseña un concepto matemático este se le presenta como un ente abstracto y adquiere el estatus de objeto matemático. Por ello, en matemáticas conceptuar objetos matemáticos siguiendo a Duval (1999) significa pasar por los distintos tipos de registros de representación, "Las representaciones semióticas son aquellas producciones constituidas por el empleo de signos (enunciado en lenguaje natural, fórmulas algebraicas, gráficos, figuras geométricas, entre otras) no parecen ser más que el medio del cual dispone un individuo para exteriorizar sus representaciones mentales. Las representaciones semióticas estarían subordinadas por entero a las representaciones mentales y no cumplirían más que funciones de comunicación. Las representaciones no solamente son necesarias para fines de comunicación, sino que son igualmente esenciales para la actividad cognitiva del pensamiento".

1.2.2. La Geometría en el currículum chileno

Las Bases Curriculares (2015) constituyen, de acuerdo a la Ley General de Educación establecida en el año 2009 (Ley N° 20.370), el documento principal del currículum nacional. Su concepción se enmarca en lo que establece nuestra Constitución y en lo que ha sido nuestra tradición educativa. Por una parte, cumple la misión de ofrecer una base cultural común para todo el país, mediante Objetivos de Aprendizaje establecidos para cada curso o nivel. De esta forma, asegura que todos los alumnos participen en una experiencia educativa similar y se conforme un bagaje cultural compartido que favorece la cohesión y la integración social. Por otra parte, se reconoce que esta base curricular admite ser complementada; por ende, se entrega a los establecimientos educacionales la libertad de expresar su diversidad, construyendo, a partir de ella, sus propuestas de acuerdo a sus necesidades y a las características de su proyecto educativo.

En particular en el eje de geometría, se espera que los estudiantes desarrollen sus capacidades planares y espaciales, que entiendan que ellas les permiten comprender el plano, el espacio y sus formas. Para lograr esto, los alumnos comparan, miden y estiman magnitudes, y analizan propiedades y características de diferentes figuras geométricas de dos y tres dimensiones. En este eje, la habilidad de representar juega un rol importante. Los estudiantes deben describir posiciones y movimientos, usando coordenadas y vectores, tienen que obtener conclusiones respecto de las propiedades y las características de lugares geométricos, de polígonos y cuerpos conocidos, por medio de representaciones. Deben transitar desde un ámbito bidimensional a uno tridimensional por medio de caras, bases, secciones, sombras y redes de puntos. Los alumnos aprenderán a calcular perímetros, áreas y volúmenes al resolver problemas técnicos y cotidianos. Al final de este ciclo, deberán ser capaces de apreciar y utilizar de manera adecuada y precisa las propiedades y relaciones geométricas, tendrán que ser competentes en mediciones geométricas y deberán relacionar la geometría con los números y el álgebra de manera armoniosa y concreta. Este eje presenta por primera vez las razones trigonométricas para que los alumnos tengan más herramientas para la resolución de problemas. Más aún, propone que los alumnos comprendan las representaciones de coordenadas en el plano cartesiano y usen destrezas de visualización espacial. En este proceso de aprendizaje, los estudiantes deben utilizar diferentes instrumentos de medida para visualizar ciertas figuras 2D o 3D y se recomiendan tanto las construcciones manuales como las tecnológicas.

1.2.3. La geometría en el contexto de la prueba de selección universitaria (PSU)

Las universidades chilenas miden los conocimientos básicos requeridos por los estudiantes para el ingreso a sus casas de estudio a través de la prueba de selección universitaria (PSU), teniendo como referencia los Objetivos Fundamentales y los Contenidos Mínimos Obligatorios planteados en el Marco Curricular. En particular la PSU de Matemática elaborada por el DEMRE (2017) es una prueba de razonamiento matemático, donde se evalúan las habilidades cognitivas, los modos de operación y los métodos generales aplicados a la resolución de problemas. La figura 1 muestra las especificaciones para la admisión 2017, en la que se observa el porcentaje de ítems de la prueba por eje temático y los rangos porcentuales de ítems de la prueba por Habilidad Cognitiva (DEMRE, 2016).

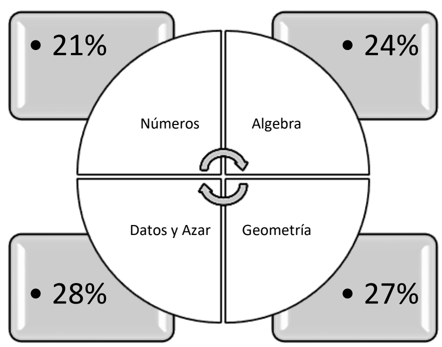


Figura 1: Resumen ejes temáticos para la admisión 2017

Para su elaboración, la Prueba de Selección Universitaria (PSU) presenta las tres grandes etapas de desarrollo mediante procesos estandarizados, comunes y que se repiten anualmente bajo las mismas condiciones. Estos procesos son llevados a cabo por el Departamento de Evaluación, Medición y Registro Educacional (DEMRE) y refieren a la construcción de ítems, ensamblaje de pruebas de pilotaje y ensamblaje de pruebas oficiales.

Si bien la PSU consta de 75 preguntas las cuales se dividen en ejes temáticos, el área de geometría corresponde a un 27% de ítems (20 preguntas) y de este ítem considerando el informe presentado por DEMRE (2017) se divide en geometría posicional (11 o 12 preguntas) y geometría proporcional (8 o 9 preguntas). Por lo que una mejora en el uso de la visualización y las configuraciones permitiría mejorar la efectividad de respuestas correctas en estos ítems.

1.2.4. La Geometría y los estándares en la formación de profesores

La promulgación de los estándares para la formación de docentes en nuestro país (Estándares orientadores para carreras de pedagogía en educación media, 2012) se realizó en el año 2012 los cuales fueron elaborados a partir del año 2010 por encargo del Ministerio de Educación, esto a través del Centro de Perfeccionamiento, Experimentación e Investigaciones Pedagógicas (CPEIP), a centros especializados de la Universidad de Chile y la Pontificia Universidad Católica de Chile.

Respecto a los responsables de cada estándar creado, la Universidad de Chile mediante el Centro de Investigación Avanzada en Educación (CIAE) y el Centro de Modelamiento Matemático (CMM), se encargaron de las disciplinas de Lenguaje y comunicación y de Matemática respectivamente.

Por su parte, los estándares pedagógicos fueron establecidos por estos mismos centros sobre la base de los estándares pedagógicos para las carreras de Pedagogía en Educación Básica, con las respectivas adecuaciones para el nivel de Educación Media.

En la elaboración de estos documentos participaron docentes especialistas en las áreas disciplinarias específicas y académicos vinculados a los proceso de formación además de evaluadores docentes, con las más diversas influencias experiencias y perspectivas, representando la diversidad del que hacer nacional en al campo educativo.

De acuerdo a lo señalado en el informe redactado por la conducción técnica del Centro de Perfeccionamiento, Experimentación e Investigaciones Pedagógicas del Ministerio de Educación de Chile a los resultados de esta consulta se agregaron las sugerencias de los consultores internacionales y de 45 profesionales del Ministerio de Educación, quienes actuaron como contraparte técnica y desarrollaron un trabajo permanente de orientación y colaboración con los equipos responsables de la elaboración de los estándares. Esta contraparte estuvo constituida por profesionales del Programa de Fomento a la Calidad de la Formación Inicial de Docentes, Programa Inicia, del CPEIP, junto con un conjunto de profesionales especialistas-asesores, procedentes de distintas universidades del país. Como etapa final, se constituyó una Mesa Ministerial con la finalidad de revisar, ajustar y aprobar la versión definitiva del documento para su publicación.

Respecto a la utilidad que el Ministerio y las casas de estudio le dan a estos estándares se manifiesta que servirán como una orientación acerca de los conocimientos y habilidades que debería manejar el egresado de pedagogía para lograr enseñar estas disciplinas. Claramente los estándares se conciben como un instrumento de apoyo de las instituciones formadoras en las diferentes disciplinas, además de esto ser un parámetro público de referencia para orientar lo esperado en la formación de estos profesionales.
Los estándares también serán concebidos como elementos referenciales para los procesos nacionales de evaluación de egresados y egresadas de Pedagogía en Educación Media, antes de iniciar su desempeño profesional.

Por otra parte los estudiantes que postulen a las carreras de Pedagogía en Educación Media podrán utilizar estos estándares para su propia orientación, teniendo una visión del conjunto de conocimientos y habilidades profesionales, como también, sobre el compromiso moral propio de cada profesor y profesora de enseñanza media. Podrán disponer de referencias sobre lo que se debe esperar de ellos como futuros profesionales en cada uno de sus estudios. Finalmente estos estándares servirán para comunicar a la sociedad la visión y competencias que el profesional de la docencia debe poseer para ingresar a la enseñanza en la educación media.

Respecto a la clasificación de los estándares, estos se agrupan en dos líneas absolutamente transversales que en base a lo expuesto por los expertos de la Universidad de Chile y su centro de modelación matemático se deben contemplar para la enseñanza:

Estándares pedagógicos*:*

Corresponden a áreas de competencia necesarias para el adecuado desarrollo del proceso de enseñanza, independientemente de la disciplina que se enseñe: conocimiento del currículo, diseño de procesos de aprendizaje y evaluación para el aprendizaje. Se incluye en ellos, la dimensión moral de su profesión: que los futuros profesores y profesoras estén comprometidos con su profesión, con su propio aprendizaje y con el aprendizaje y formación de sus estudiantes. También, se describen las habilidades que deben mostrar para revisar su propia práctica y aprender en forma continua. Así mismo, los futuros profesores deben estar preparados para gestionar clases, interactuar con los estudiantes y promover un ambiente adecuado para el aprendizaje. Finalmente, se señalan aspectos de la cultura escolar que el futuro docente debe conocer, así como estrategias para la formación personal y social de sus estudiantes. Los estándares pedagógicos son diez y se describen a continuación:

Estándar 1: Conoce a los estudiantes de Educación Media y sabe cómo aprenden.

Estándar 2: Está preparado para promover el desarrollo personal y social de los estudiantes.

Estándar 3: Conoce el currículo de Educación Media y usa sus diversos instrumentos curriculares para analizar y formular propuestas pedagógicas y evaluativas.

Estándar 4: Sabe cómo diseñar e implementar estrategias de enseñanza aprendizaje adecuadas para los objetivos de aprendizaje y de acuerdo al contexto.

Estándar 5: Está preparado para gestionar la clase y crear un ambiente apropiado para el aprendizaje según contextos.

Estándar 6: Conoce y sabe aplicar métodos de evaluación para observar el progreso de los estudiantes y sabe usar los resultados para retroalimentar el aprendizaje y la práctica pedagógica.

Estándar 7: Conoce cómo se genera y transforma la cultura escolar.

Estándar 8: Está preparado para atender la diversidad y promover la integración en el aula.

Estándar 9: Se comunica oralmente y por escrito de forma efectiva en diversas situaciones asociadas a su quehacer docente.

Estándar 10: Aprende en forma continua y reflexiona sobre su práctica y su inserción en el sistema educacional.

Estándares disciplinarios para la enseñanza:

Estos estándares disciplinarios se dividen y definen las competencias específicas para enseñar cada una de las áreas: Lenguaje y Comunicación; Matemática; Historia, Geografía y Ciencias Sociales; Biología; Física; y Química. En cada caso, los estándares sugieren qué conocimientos y habilidades deben evidenciar los futuros profesores y profesoras en la disciplina respectiva y cómo ésta se enseña, incluyendo el conocimiento del currículo específico, la comprensión sobre cómo aprenden los estudiantes cada disciplina y la capacidad para diseñar, planificar e implementar experiencias de aprendizaje, así como para evaluar y reflexionar acerca de sus logros. En particular para esta investigación interesan los estándares disciplinarios del eje de geometría que son los estándares disciplinarios desde el 11 al 16:

Estándar 11: Es capaz de conducir el aprendizaje de los conceptos elementales de la Geometría. El futuro profesor o profesora está capacitado para planificar, conducir y evaluar el aprendizaje de alumnos y alumnas en temas referidos a los elementos básicos de Geometría tales como punto, recta, plano, espacio, trazo, ángulo; figuras planas tales como polígonos y circunferencia, y cuerpos geométricos tales como prismas, pirámides y cuerpos redondos, así como las nociones de congruencia y semejanza. Es capaz de diseñar actividades para el aprendizaje usando procesador geométrico. Conoce y comprende la geometría de nivel escolar desde un punto de vista superior, analizando críticamente enunciados de propiedades y definiciones sobre elementos primarios de la geometría plana y del espacio. Sabe cómo promover en los estudiantes el desarrollo de habilidades de visualización, resolución de problemas, indagación y argumentación.

Estándar 12: Es capaz de conducir el aprendizaje de transformaciones isométricas y homotecias de figuras en el plano. El futuro profesor o profesora está preparado para planificar, conducir y evaluar procesos de aprendizaje de alumnos y alumnas en temas relativos a transformaciones isométricas y homotecias del plano. Es capaz de conducir el aprendizaje de los estudiantes en la realización de las construcciones geométricas con regla y compás de figuras elementales, justificando y explicando los procedimientos mediante lenguaje geométrico. Utiliza procesador geométrico para lograr la comprensión de los estudiantes en los temas de transformaciones del plano y construcciones geométricas. Sabe cómo promover en los estudiantes habilidades de análisis, resolución de problemas y argumentación.

Estándar 13: Es capaz de conducir el aprendizaje de los estudiantes en temas referidos a medida de atributos de objetos geométricos y el uso de la trigonometría. El futuro profesor o profesora está capacitado para planificar, conducir y evaluar los procesos de aprendizaje de alumnos y alumnas en temas referidos a medida de atributos de objetos geométricos, así como la deducción y uso de fórmulas para su cálculo. Es capaz de promover el aprendizaje del teorema de Pitágoras y los teoremas básicos de trigonometría, enfatizando en la resolución de problemas, el desarrollo de las habilidades de cálculo, modelación y argumentación. Reconoce las complejidades conceptuales involucradas en estos contenidos y sabe dar explicaciones rigurosas pero adecuadas al nivel escolar de sus estudiantes.

Estándar 14: Es capaz de conducir el aprendizaje de la Geometría analítica plana. El futuro profesor o profesora está capacitado para planificar, conducir y evaluar procesos de aprendizajes de alumnos y alumnas en temas de geometría analítica referidos a la descripción de lugares geométricos del plano tales como recta, circunferencia, elipse, parábola e hipérbola. Utiliza la traslación y rotación de ejes, así como coordenadas polares y descripciones en ecuaciones paramétricas en el estudio de curvas planas y en la determinación de lugares geométricos. Sabe cómo promover en sus estudiantes el desarrollo de habilidades de visualización, indagación, argumentación y resolución de problemas geométricos.

Estándar 15: Es capaz de conducir el aprendizaje de la Geometría del espacio usando vectores y coordenadas. El futuro profesor o profesora está capacitado para planificar, conducir y evaluar procesos de aprendizajes de alumnos y alumnas, en temas referidos a elementos de geometría cartesiana y vectorial del espacio, tales como ecuaciones vectoriales y cartesianas de planos y rectas, promoviendo el desarrollo de habilidades de visualización, indagación, argumentación y resolución de problemas. Es capaz de demostrar propiedades y resolver problemas que involucren rectas, planos, cuadráticas, superficies regladas y de revolución. Conoce como se articulan los conceptos relacionados con vectores con otros contenidos presentes en el currículo escolar, particularmente en física.

Estándar 16: Comprende aspectos fundantes de la Geometría euclidiana y algunos modelos básicos de geometrías no euclidianas. El futuro profesor o profesora comprende la independencia del V Postulado de Euclides y cómo surgen otros modelos geométricos. Comprende aspectos básicos de la geometría proyectiva, tales como puntos al infinito, razón doble o cuaternas armónicas; aspectos básicos de la geometría esférica, tales como área y ángulos, y de igual forma, elementos básicos de la geometría hiperbólica a través del modelo de Poincaré, revelando sus similitudes y diferencias con la geometría euclidiana. Conoce hitos importantes en la historia de las ideas geométricas y su relación con otros ámbitos de la cultura universal, tales como el arte.

1.3. Fundamentación del problema de investigación

1.3.1. La enseñanza de la geometría en la educación media

El propósito formativo del que se ocupa el currículum chileno en el sector de matemática (Ministerio de Educación, 2009) es enriquecer la comprensión de la realidad, facilitar la selección de estrategias para resolver problemas y contribuir al desarrollo del pensamiento crítico y autónomo en todos los estudiantes, sean cuales sean sus opciones de vida y de estudios al final de la experiencia escolar.

Aprender matemática proporciona herramientas conceptuales para analizar la información cuantitativa presente en las noticias, opiniones, publicidad y diversos textos, aportando al desarrollo de las capacidades de comunicación, razonamiento y abstracción e impulsando el desarrollo del pensamiento intuitivo y la reflexión sistemática.

El currículum chileno enfatiza los aspectos formativos y funcionales de la matemática por lo que los aprendizajes y el conocimiento matemático que conforman los Objetivos Fundamentales y Contenidos Mínimos Obligatorios fueron organizados, de acuerdo con una progresión ordenada, en cuatro ejes: Números, algebra, datos y azar y geometría que articulan la experiencia formativa de los alumnos a lo largo de los años escolares, en particular este último eje se orienta inicialmente al desarrollo de la imaginación espacial, al conocimiento de objetos geométricos básicos y algunas de sus propiedades. Propone relacionar formas geométricas en dos y tres dimensiones, la construcción de figuras y de transformaciones de figuras y la noción de medición en figuras planas. Progresivamente se introduce el concepto de demostración y se amplía la base epistemológica de la geometría, mediante las trasformaciones rígidas en el plano, los vectores y la geometría cartesiana. De este modo se dan diferentes enfoques para el tratamiento de problemas en los que interviene la forma, el tamaño y la posición.

A lo largo de todo el currículum se busca definir objetivos y proponer contenidos que apelen a las bases del razonamiento matemático, en particular a la resolución de problemas, incluyendo el desarrollo de habilidades tales como la búsqueda y comparación de caminos de solución, análisis de los datos y de las soluciones, anticipación y estimación de resultados, búsqueda de regularidades y patrones, formulación de conjeturas, formulación de argumentos y diversas formas de verificar la validez de una conjetura o un procedimiento, el modelamiento de situaciones o fenómenos, para nombrar competencias centrales del razonamiento matemático. Se propone seleccionar situaciones, problemas y desafíos de modo que se favorezca la integración de las diferentes dimensiones de la matemática, para que alumnas y alumnos adquieran una visión integrada del conocimiento matemático y estén en condiciones de resolver problemas, establecer relaciones y argumentar acerca de su validez.

Para ello los profesores deben promover la disposición para enfrentar desafíos y situaciones nuevas; las capacidades de comunicación y de argumentación y el cultivo de una mirada curiosa frente al mundo que los rodea.

Los Objetivos Fundamentales y Contenidos Mínimos Obligatorios incluyen el uso de tecnologías digitales, de Internet y de software especializados en números, álgebra, geometría y análisis de datos. En particular, procesadores simbólicos y geométricos, graficadores, simuladores y software estadísticos. Estas tecnologías, además de contribuir a presentar la Matemática en una mayor diversidad de medios y modos de apelar al interés y facilitar las tareas de exploración por parte de los estudiantes.

Los Objetivos Fundamentales y Contenidos Mínimos que se presentan en la tabla 1 y tabla 2 en el eje de geometría, orientan la elaboración de programas de estudios, que serán el punto de partida para la planificación de clases. En su implementación debe resguardarse un equilibrio de género, entregando a alumnos iguales oportunidades de aprendizaje. Asimismo deben considerarse las diferencias individuales, de modo de ofrecer a todos ellos desafíos relevantes y apropiados.

Tabla 1: *Bases curriculares 7° básico a 2° medio*

Nivel	**Objetivos de Aprendizaje**
Séptimo básico	10. Descubrir relaciones que involucran ángulos exteriores o interiores de diferentes polígonos. 11. Mostrar que comprenden el círculo: • Descubriendo las relaciones entre el radio, el diámetro y el perímetro del círculo. • Estimando de manera intuitiva el perímetro y el área de un círculo. • Aplicando las aproximaciones del perímetro y del área en la resolución de problemas geométricos en otras asignaturas y en la vida diaria. • Identificándolo como lugar geométrico. 12. Construir objetos geométricos de manera manual y/o con software educativos. • Líneas, como las perpendiculares, las paralelas, las bisectrices y alturas en triángulos y cuadriláteros. • Puntos, como el punto medio, el centro de gravedad, el centro del círculo inscrito y del circunscrito de un triángulo. • Triángulos y cuadriláteros congruentes. 13. Desarrollar y aplicar la fórmula del área de triángulos, paralelogramos y trapecios.

	14. Identificar puntos en el plano cartesiano, usando pares ordenados y vectores de forma concreta (juegos) y pictórica.
Octavo básico	11. Desarrollar las fórmulas para encontrar el área de superficies y el volumen de prismas rectos con diferentes bases y cilindros: • Estimando de manera intuitiva área de superficie y volumen. • Desplegando la red de prismas rectos para encontrar la fórmula del área de superficie. • Transfiriendo la fórmula del volumen de un cubo (base por altura) en prismas diversos y cilindros. • Aplicando las fórmulas a la resolución de problemas geométricos y de la vida diaria. 12. Explicar, de manera concreta, pictórica y simbólica, la validez del teorema de Pitágoras y aplicar a la resolución de problemas geométricos y de la vida cotidiana de manera manual y/o con software educativo. 13. Describir la posición y el movimiento (traslaciones, rotaciones y reflexiones) de figuras 2D, de manera manual y/o con software educativo, utilizando: • Los vectores para la traslación. • Los ejes del plano cartesiano como ejes de reflexión. • Los puntos del plano para las rotaciones.

	14. Componer rotaciones, traslaciones y reflexiones en el plano cartesiano y en el espacio, de manera manual y/o con software educativo, y aplicar a la simetría de polígonos y poliedros y a la resolución de problemas geométricos relacionados con el arte.
Primero medio	6. Desarrollar la fórmula de los valore del área y del perímetro de sectores y segmentos circulares respectivamente, a partir de ángulos centrales de 60°, 90°, 120° y 180°, por medio de representaciones concretas. 7. Desarrollar las fórmulas para encontrar el área de la superficie y el volumen del cono: • Desplegando la red del cono para la fórmula del área de superficie. • Experimentando de manera concreta para encontrar la relación entre el volumen del cilindro y del cono. • Aplicando las fórmulas a la resolución de problemas geométricos y de la vida diaria. 8. Mostrar que comprenden el concepto de homotecia: • Relacionándola con la perspectiva, el funcionamiento de instrumentos ópticos y el ojo humano. • Midiendo segmentos adecuados para determinar las propiedades de la homotecia. • Aplicando las propiedades de homotecia en la construcción de objetos, de manera manual y/o con software educativo. • Resolviendo problemas de la vida cotidiana y de otras asignaturas.

	9. Desarrollar el teorema de Tales mediante las propiedades de la homotecia, para aplicarlo en la resolución de problemas. 10. Aplicar propiedades de semejanza y de proporcionalidad a modelos a escala y otras situaciones de la vida diaria y otras asignaturas. 11. Representar el concepto de homotecia en forma vectorial, relacionándolo con el producto de un vector por un escalar, de manera manual y/o con software educativo.
Segundo medio	7. Desarrollar las fórmulas del área de la superficie y del volumen de la esfera: • Conjeturando la fórmula. • Representando de manera concreta y simbólica, de manera manual y/o con software educativo. • Resolviendo problemas de la vida diaria y de geometría. 8. Mostrar que comprenden las razones trigonométricas de seno, coseno y tangente en triángulos rectángulos: • Relacionándolas con las propiedades de la semejanza y loa ángulos. • Explicándolas de manera pictórica y simbólica, de manera manual y/o con software educativo. • Aplicándolas para determinar ángulos o medidas de lados. • Resolviendo problemas geométricos y de otras asignaturas.

	9. Aplicar las razones trigonométricas en diversos contextos en la composición y descomposición de vectores y determinar las proyecciones de vectores.

Tabla 2*: Objetivos fundamentales y contenidos mínimos obligatorios de la educación media en chile establecidos en el currículum chileno en el eje de geometría*

Nivel	**Objetivos Fundamentales**	**Contenidos mínimos obligatorios**
Tercero medio	5. Comprender la geometría cartesiana como un modelo para el tratamiento algebraico de los elementos y relaciones entre figuras geométricas	10. Deducción de la distancia entre dos puntos en el plano cartesiano y su aplicación al cálculo de magnitudes lineales en figuras planas 11. Descripción de la homotecia de figuras planas mediante el producto de un vector y un escalar; uso de un procesador geométrico para visualizar las relaciones que se producen al desplazar figuras homotéticas en el plano 12. Determinación de la ecuación de la recta que pasa por dos puntos 13. Deducción e interpretación de la pendiente y del intercepto de una recta con el eje de las ordenadas y la relación de estos valores con las distintas formas de la ecuación de la recta

		14. Análisis gráfico de las soluciones de sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas y su interpretación a partir de las posiciones relativas de rectas en el plano: condiciones analíticas del paralelismo, coincidencia y de la intersección entre rectas
Cuarto medio	4. Comprender que puntos, rectas y planos pueden ser representados en el sistema coordenado tridimensional y determinar la representación cartesiana y vectorial de la ecuación de la recta en el espacio. 5. Determinar áreas y volúmenes de cuerpos geométricos generados por rotación o traslación de figuras planas en el espacio	5. Deducción de la distancia entre dos puntos ubicados en un sistema de coordenadas en tres dimensiones y su aplicación al cálculo del módulo de un vector. 6. Identificación y descripción de puntos, rectas y planos en el espacio; deducción de la ecuación vectorial de la recta y su relación con la ecuación cartesiana. 7. Formulación y verificación, en casos particulares, de conjeturas respecto de los cuerpos geométricos generados a partir de traslaciones o rotaciones de figuras planas en el espacio 8. Resolución de problemas sobre áreas y volúmenes de cuerpos generados por rotación o traslación de figuras planas.

Un estudio realizado por Pavéz, Sánchez y Jiménez (2009) mencionan que las configuraciones geométricas forman parte fundamental de la enseñanza de la matemática y en particular del eje de estudio “Geometría”. Comienza desde temprana edad con el estudio de las figuras geométricas planas y el descubrimiento de sus propiedades existen algunas configuraciones geométricas que gozan de cierta importancia, dada la cantidad de aplicaciones que posee, por ejemplo el Teorema de Pitágoras es una configuración geométrica que se estudia desde la Enseñanza Básica y que continúa su estudio en aplicaciones de los más diversos contextos. Luego, en segundo año medio se estudia la unidad llamada “La circunferencia y sus ángulos”, donde se pueden descubrir y demostrar de manera sencilla muchas configuraciones geométricas como el Teorema de las cuerdas o de las tangentes. De esta manera se observa que una simple construcción geométrica puede permitir generar conocimiento geométrico y algebraico de gran nivel. En tercero medio se continúa con la unidad “Más sobre triángulos rectángulos”, donde se retoma el estudio del Teorema de Pitágoras, sus demostraciones y generando tríos pitagóricos. Además se estudian las razones trigonométricas a partir de la necesidad de resolver diferentes situaciones problemáticas modelizadas en el triángulo rectángulo. Por último el estudio de los Teoremas de Euclides, los cuales se tratan más a fondo en su trabajo con la creación de sesiones de enseñanza y aprendizaje de este tema y que permiten resolver nuevos problemas y construir trazos con longitudes irracionales.

En cuarto medio se estudia la Geometría del espacio, específicamente los cuerpos generados por rotación o traslación de figuras en el espacio y los vectores y por último, la resolución de problemas gira en torno a las configuraciones geométricas por medio de situaciones de variados contextos: algebraicos-geométricos, mediciones de longitudes, demostraciones, entre otras.

Si bien el currículum chileno contempla aprendizajes mínimos obligatorios, la evaluación debería considerar tanto el proceso como el resultado, resultando un punto de interés indagar en qué es lo que realmente aprenden los estudiantes y futuros profesores de matemática chilenos y cómo al conocer los obstáculos que se pudieran presentar se pueden prevenir situaciones y mejorar los aprendizajes.

Es importante destacar de todo lo anterior que el uso de la visualización y configuraciones está presente dentro del currículum chileno, es considerado como un elemento importante y facilitador al momento de generar aprendizajes matemáticos de manera significativa.

1.3.2. La visualización y las configuraciones geométricas en los textos escolares y universitarios

Según la revisión de literatura que se ha realizado, los aportes que la investigación en educación matemática ha realizado en torno a cómo se presenta el contenido matemático en los manuales escolares son variados. Los textos escolares son uno de los materiales didácticos de mayor uso en la planificación, preparación y desarrollo de las clases de matemáticas (González y Sierra, 2004). Desempeñan un papel esencial en la articulación de las exigencias curriculares nacionales con la praxis educativa, al reflejar parcialmente las intenciones de los planes de estudio presentes en los documentos oficiales (Schmidt, 1996); además, son una fuente para identificar el contenido cubierto (Pepin, 2001) y el modo en que se presenta en el aula (Cobo y Batanero, 2004). Así los textos escolares deben reflejar los objetivos trazados en el currículum chileno y los estándares; allí se declara la importancia de la visualización y las configuraciones.

En este sentido, muchas investigaciones en educación matemática han desarrollado interés en estudiar cómo los libros de texto promueven la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas asumiendo como suya la responsabilidad de promover el desarrollo de la visualización y configuraciones o de recurrir a ellas para dotar de sentido el estudio de objetos matemáticos.

Los educadores en Chile, por su parte, cuentan con planes y programas bien definidos siendo una buena herramienta que les permitirá organizar las actividades de objetos matemáticos presentadas en los libros y en caso de que el texto escolar seleccionado no promueva la aplicación de alguno de los elementos de las categorías de análisis consideradas en la investigación, tendrán elementos que considerar para introducir nuevas tareas que si lo permitan.

Investigaciones como las realizadas por Love y Pimm (1996), Mesa (2010) y Lithner (2004), así como Marmolejo y González (2015), han puesto en evidencia que los libros de texto ejercen control sobre las maneras de proceder en el desarrollo de una actividad matemática, por lo que los textos escolares son un importantísimo referente a considerar para comprender muchos fenómenos asociados a la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, en particular las cuestiones relacionadas con objetos matemáticos y el rol que desempeña en ella la visualización y las configuraciones.

1.3.3. La visualización y las configuraciones geométricas como campo de estudio

Para definir el concepto de visualización se hace necesario considerar estudios como el de Vicente Carrión (1999) quien observa que cuando se mira un diagrama se habla de visualizar un concepto o un problema y no de visualizar un diagrama. Por otro lado, Soto-Andrade (2008), muestra que a pesar de que el razonamiento visual está contemplado en los currículos, en general, los profesores lo siguen presentando como un argumento auxiliar o introductorio, un accesorio al que no asignan la importancia que debería tener.

La importancia de la visualización se manifiesta en la mejora de la visión global e intuitiva y la comprensión en muchas de las áreas de las matemáticas Usiskin (1987); Yakimanskaya (1991); Gutiérrez, (1998). En la actualidad la visualización en el aprendizaje de las matemáticas no sólo es contemplada como una propuesta ilustrativa, sino que está siendo reconocida como una componente clave del razonamiento, la resolución de problemas y la demostración, como se puede observar en Arcavi (2003); León (2005); Battista (2007); Phillips, Norris y Macnab (2010) y Rivera (2011).

En esta investigación utilizaremos la noción de visualización dada por Cantoral y Montiel (2001) quienes definen como visualización a la habilidad para representar, transformar, generar, comunicar, documentar y reflejar información visual. En consecuencia, de esta noción podemos indicar que la visualización se trata de un proceso mental muy usado en distintas áreas del conocimiento científico, en particular el matemático. Ahora bien, la visualización no es un fin en sí mismo, es un medio para entender. Arcavi (2003) argumenta que la visualización puesta al servicio de la resolución de problemas puede también ir más allá de su papel procedimental e inspirar una solución general y creativa.

Siguiendo a Bishop (1989), las imágenes visuales o mentales, son aquellos objetos que se manipulan en la actividad de la visualización. Esa manipulación se realiza según dos tipos de procesos: el procesamiento visual (no ostensivo) que es el proceso de conversión de información abstracta o no figurativa en imágenes visuales, y el proceso de transformación de unas imágenes visuales ya formadas en otras. La interpretación de información figurativa hace referencia al proceso de interpretación de representaciones visuales para extraer la información que contienen. Esto incluye la manipulación y transformación de representación e imágenes visuales, que se pueden hacer ostensivas. Este proceso sería inverso del anterior. La noción de imagen visual es definida por Presmeg (1986) como un esquema mental (no ostensivo) que representa información visual o espacial (ostensiva). Además, señala que tales imágenes visuales se pueden tener en presencia del objeto perceptible o en su ausencia. Su definición también permite la posibilidad de que los símbolos matemáticos, verbales o numéricos, se puedan disponer espacialmente, de forma ostensiva o no ostensiva.

Otro concepto relevante es el que Hollebrands, Laborde y Stráber (2008) afirman que las configuraciones en geometría permiten un camino adicional en el aprendizaje ya que pueden presentar multitud de relaciones geométricas. En este sentido, la fortaleza del resolutor experto radica en sus habilidades para pasar de la configuración al discurso y reconocer formas y configuraciones vinculadas al razonamiento deductivo basada en conocimientos teóricos

Siguiendo a Fischbein (1993) quien mantiene que las figuras geométricas poseen, al mismo tiempo, aspectos figurales y conceptuales. En los problemas de probar es posible usar simultáneamente éstos aspectos, ya que las propiedades de las figuras geométricas (representaciones) proceden de las definiciones y relaciones geométricas usadas en su construcción. Por lo que en esta investigación siguiendo a Duval (1998) quien denomina aprehensión operativa a la modificación de una figura para considerar subconfiguraciones, añadiendo o quitando nuevos elementos geométricos, manipulando las diferentes partes de una configuración geométrica como un puzle para fijar la atención sobre subconfiguraciones particulares, o simplemente, fijando la atención sobre una parte específica de la configuración.

Por otra parte, con la aprehensión discursiva se asocian afirmaciones matemáticas a una configuración. Durante el proceso de resolución de un problema, los hechos geométricos identificados en la configuración se pueden relacionar con otros hechos geométricos y ser considerados premisas de alguna relación geométrica previamente conocida; es decir, generan una conjetura basada en lo visual que sugieren ideas que pueden ser usadas en la generación de relaciones deductivas.

1.4. Propósito de la investigación

En esta investigación nos proponemos estudiar el uso de la visualización planar en la circunferencia que presentan futuros profesores de matemática con las configuraciones utilizadas desde el punto de vista del Enfoque Ontosemiótico y la Instrucción Matemática (EOS) en el que se introducen categorías de objetos que ayudan a distinguir entre las entidades mentales (objetos personales) e institucionales (sociales o culturales). Además, la matemática se concibe desde tres puntos de vista complementarios: como actividad de solución de problemas (extra o intramatemáticos), lenguaje y sistema conceptual socialmente compartido y como un punto de vista complementario para identificar la diversidad de conocimientos que se ponen en juego en la realización de tareas de visualización y razonamiento, lo que puede permitir explicar las dificultades de los estudiantes en la realización de este tipo de tareas (Fernandez, Godino, y Cajaraville, 2012).

Así, surge la importancia de contar con información que permita identificar cómo se aborda la visualización y el uso de configuraciones de futuros profesores de matemática frente a la realización de actividades evaluadas sobre circunferencia en geometría plana.

Ésta información puede ser valiosa para describir e interpretar los hechos cognitivos ligados a la solución de tareas de visualización a través del EOS que puede permitir elaborar configuración epistémica asociada a la solución de tareas en geometría para estudiar las configuraciones cognitivas y formular potenciales conflictos o relaciones entre el uso de determinadas configuraciones geométricas frente a otras para la realización de tareas en geometría.

A partir de lo mencionado anteriormente, el aporte de este estudio estará orientado a analizar cómo piensa el futuro profesor de matemática frente a tareas de circunferencias en geometría, si bien el foco que tiene la mayoría de los programas del eje de geometría es desarrollar la capacidad de visualización no hay estudios que corroboren con certeza en la efectividad de lo establecido en los programas de estudio, por lo que los resultados de esta investigación podrían permitir una mejor formulación de las futuras prácticas de los profesores de matemática ya que de acuerdo a como se vinculan con su aprendizaje en la priorización de objetos matemáticos y visualizaciones para la resolución de actividades en geometría plana les permitirá desempeñarse en su práctica docente.

1.5. Objetivos de la investigación

Objetivo General

Analizar el uso de la Visualización planar y las configuraciones que aparecen en los textos bibliográficos y en la resolución de actividades evaluativas respecto del aprendizaje de la circunferencia en futuros profesores de matemática desde el punto de vista ontosemiótico.

Objetivos Específicos

a) Analizar la visualización y las configuraciones geométricas presentes en una muestra de libros de textos de educación básica, media y universitaria desde el punto de vista ontosemiótico.

b) Identificar elementos relacionados a la visualización y las configuraciones geométricas utilizadas por los futuros profesores de matemática en el desarrollo de actividades evaluadas sobre la circunferencia en geometría plana a través del enfoque ontosemiótico.

c) Establecer los tipos de configuraciones geométricas que ponen en juego los futuros profesores de matemática frente a la realización de actividades evaluativas mediante los objetos primarios visuales del enfoque ontosemiótico (EOS).

Supuestos de investigación

Si bien el desarrollo de la visualización está contemplado desde el inicio de la formación académica y se debe ir desarrollando en todo el proceso educativo, esto depende fundamentalmente de la gestión de la actividad matemática en el aula y de acuerdo con Duval (1998), la enseñanza y el aprendizaje de la geometría involucran, como mínimo, tres actividades cognitivas: la construcción, que alude al diseño de configuraciones mediado por instrumentos geométricos; el razonamiento relacionado con procesos discursivos y la visualización, cuya atención recae en las representaciones.
Por lo que nuestros supuestos son:

S_1: La articulación entre la visualización y las configuraciones utilizadas en tareas de circunferencias permiten un aprendizaje significativo.

S_2: Un conocimiento adecuado del objeto matemático del futuro profesor de matemática mejora la visualización y configuraciones frente a la realización de tareas de circunferencia en geometría.

CAPÍTULO II

MARCO TEÓRICO

Como se ha visto anteriormente, la visualización ha sido y sigue siendo un tema de especial interés dentro de la investigación en Educación matemática. La mayor parte de las investigaciones se orientan a describir estilos y estrategias cognitivas, así como la evolución de las capacidades mentales de los sujetos ante tareas que requieren visualización.

En esta investigación se explora la variedad de objetos y conocimientos que se ponen en juego ante tareas que requieren visualización usando las herramientas teóricas que Godino y colaboradores vienen desarrollando desde hace varios años y describen como "Enfoque Ontosemiótico" (EOS) del conocimiento y la instrucción matemática (Godino y Batanero, 1994,1998; Godino 2002; Godino, Batanero y Font, 2007,2009)

Consideramos que esta aproximación puede complementar las aportaciones realizadas desde otras perspectivas teóricas. En el EOS se introducen categorías de objetos que ayudan a distinguir entre las entidades mentales (objetos personales) y las institucionales (sociales o culturales). Además, la matemática se concibe desde tres puntos de vista complementarios: como actividad de solución de problemas (extra o intra- matemáticos), como lenguaje y como sistema conceptual socialmente compartido siguiendo a lo establecido por Godino y Batanero.

En este capítulo se presenta una síntesis de las nociones teóricas fundamentales del EOS que sirven de base para esta investigación.

2.1. El enfoque ontosemiótico del conocimiento matemático

La didáctica de la matemática estudia los procesos de enseñanza y aprendizaje de los saberes matemáticos, en los aspectos teórico-conceptuales y de resolución de problemas, tratando de caracterizar los factores que condicionan dichos procesos. Se interesa por determinar el significado que los alumnos atribuyen a los términos y símbolos matemáticos, a los conceptos y proposiciones, así como la construcción de estos significados como consecuencia de la instrucción.

Los postulados básicos del “enfoque ontosemiótico” del conocimiento y la instrucción matemática (EOS) según Godino, Batanero y Font (2007) se relacionan principalmente con la antropología, ontología y la semiótica, pero también se articulan de manera coherente supuestos socioculturales y psicológicos.

Según el EOS La matemática se concibe como una actividad humana, intencionalmente orientada a la solución de cierta clase de situaciones-problemas, realizada en el seno de instituciones o comunidades de prácticas. Dicha actividad está mediatizada y apoyada por los recursos lingüísticos y tecnológicos disponibles. De los sistemas de prácticas realizadas para resolver los problemas emergen dos categorías primarias de entidades: institucionales (sociales, relativamente objetivas) y personales (individuales o mentales). De esta manera se asume que la matemática es también un complejo de objetos culturales (institucionales), axiomática y deductivamente organizados. Se atribuye un papel esencial al lenguaje (en sus diversas modalidades), que tiene una función no se lo representacional sino también instrumental o constitutiva de los objetos matemáticos.

Para hacer operativos estos principios el EOS propone como herramientas analíticas el par de nociones. “sistema de prácticas operativas y discursivas” y “configuración ontosemiótica”, ambas en la doble versión personal e institucional. A continuación describimos brevemente estas nociones, además de la noción de función semiótica y los atributos contextuales, los cuales serán usados para el análisis de las tareas geométricas utilizada en esta investigación

2.1.1. Sistemas de prácticas operativas y discursivas ligadas a campos o tipos de problemas

Siguiendo a Godino y Batanero, 1994, p334 Consideraremos práctica matemática a toda situación o expresión (verbal, gráfica, etc.) realizada por alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución obtenida y validarla o generalizarla a otros contextos y problemas. Las prácticas pueden ser idiosincrásicas de una persona o compartidas en el seno de una institución.

Godino y Batanero (1994, 1998) han introducido las nociones de práctica personal, sistemas de prácticas personales y objeto personal como herramientas útiles para el estudio de cognición matemática individual. De manera dual, el sistema de prácticas consideradas como significativas para resolver un campo de problemas y compartidas en el seno de una institución y los objetos institucionales emergentes de tales sistemas se propone como nociones útiles para describir la cognición en sentido institucional o epistémico. De éstas nociones se derivan las de "significado de un objeto personal" y "significado de un objeto institucional", que se identifican con los sistemas de prácticas personales o institucionales, respectivamente. Estas nociones fueron propuestas con la finalidad de precisar y operativizar las nociones de "relación personal e institucional al objeto" introducida por Chavallard (1992).

La interpretación semiótica de las prácticas matemáticas, personales e institucionales, permite describir los procesos de aprendizaje en términos de acoplamiento de significados, como se indica en la parte central de la figura 2.

Con relación a los significados institucionales propone tener en cuenta los siguientes tipos:

Implementado: en un proceso de estudio específico es el sistema de prácticas efectivamente implementadas por el docente.

Evaluado: el subsistema de prácticas que utiliza el docente para evaluar los aprendizajes.

Pretendido: sistema de prácticas incluidas en la planificación del proceso de estudio.

Referencial: sistema de prácticas que se usa como referencia para elaborar el significado pretendido. En una institución de enseñanza concreta este significado de referencia será una parte del significado holístico del objeto matemático. La determinación de dicho significado global requiere realizar un estudio histórico – epistemológico sobre el origen y evolución del objeto en cuestión, así como tener en cuenta la diversidad de contextos de uso donde se pone en juego dicho objeto.

Respecto de los significados personales proponemos los siguientes tipos:

Global: corresponde a la totalidad del sistema de prácticas personales que es capaz de manifestar potencialmente el sujeto relativas a un objeto matemático.
Declarado: da cuenta de las prácticas efectivamente expresadas a propósito de las pruebas de evaluación propuestas, incluyendo tanto las correctas como las incorrectas desde el punto de vista institucional.

Logrado: corresponde a las prácticas manifestadas que son conformes con la pauta institucional establecida.

En el análisis del cambio de los significados personales que tiene lugar en un proceso de estudio interesará tener en cuenta los significados iniciales o previos de los estudiantes y los que finalmente alcancen.

Figura 2: Tipos de significados institucionales y personales

En la parte central de la figura 2 se indican las relaciones dialécticas entre enseñanza y aprendizaje, que supone el acoplamiento progresivo entre los significados personales e institucionales. Así mismo, la enseñanza implica la participación del estudiante en la comunidad de prácticas que soporta los significados institucionales, y el aprendizaje, en última instancia, supone la apropiación por el estudiante de dichos significados.

2.1.2. Emergencia de los objetos matemáticos

Tal como se ha dicho, en el EOS se asumen los presupuestos de la epistemología pragmatista y los objetos se derivan de las prácticas matemáticas. En concreto se considera que los objetos matemáticos son emergentes de sistemas de prácticas. Dicha emergencia es un fenómeno complejo cuya explicación implica considerar, como mínimo, dos niveles de objetos que emergen de la actividad matemática. En el primer nivel tenemos aquellas entidades que se pueden observar en un texto matemático (problemas, definiciones, proposiciones, etc.). En un segundo nivel tenemos una tipología de objetos que emerge de las distintas maneras de ver, hablar, operar, etc. sobre los objetos del nivel anterior; nos referimos a objetos personales o institucionales, ostensivos o no ostensivos, unitarios o sistémicos, etc.

2.1.3. Primer nivel: configuraciones de objetos intervinientes y emergentes de los sistemas de prácticas

Para la realización de una práctica matemática y para la interpretación de sus resultados como satisfactorios se necesita poner en funcionamiento determinados conocimientos por lo que intervienen objetos materiales (símbolos, gráficos etc.) - ostensivos - y mentales - abstractos, no ostensivos - (que evocamos en la actividad matemática) y que son representados en forma textual, oral, gráfica o incluso gestual. De los sistemas de prácticas matemáticas emergen nuevos objetos, que provienen de las mismas y dan cuenta de su organización y estructura (tipos de problemas, procedimientos, definiciones, propiedades, argumentaciones).

La noción de sistema de prácticas es útil para ciertos análisis de tipo macro didáctico, especialmente cuando se trata de comparar la forma particular que adoptan los conocimientos matemáticos en distintos marcos institucionales, contextos de uso o juegos de lenguaje. Para un análisis más fino de la actividad matemática es necesario introducir los seis tipos de entidades primarias que según Godino y Font (2010) la realización de una actividad en matemática se modela en términos de sistemas de prácticas operativas y discursivas, en consecuencia cuando un agente realiza y evalúa una práctica matemática activa un conglomerado de elementos formado por situaciones/problemas, lenguajes, conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos, articulado en la configuración de la figura ….. (Font y Godino, 2006, p 69) llamados *objetos primarios* los cuales definimos a continuación:

Elementos lingüísticos (términos, expresiones, notaciones, gráficos,...) en sus diversos registros (escrito, oral, gestual,...)

Situaciones – problemas (aplicaciones extra-matemáticas, tareas, ejercicios,...)

Conceptos- definición (introducidos mediante definiciones o descripciones)

Proposiciones (enunciados sobre conceptos,...)

Procedimientos (algoritmos, operaciones, técnicas de cálculo,...)

Argumentos (enunciados usados para validar o explicar las proposiciones y procedimientos, deductivos o de otro tipo,...).

Estos objetos primarios pueden ser observados en la figura 3 que presentamos a continuación:

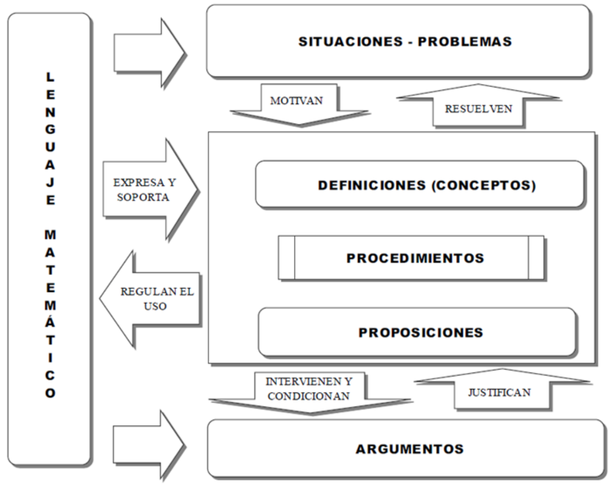


Figura 3: Configuración de Objetos primarios (Godino y Batanero, 2009)

Estos seis tipos de entidades primarias postuladas amplían la tradicional distinción entre entidades conceptuales y procedimentales, al considerarlas insuficientes para describir los objetos intervinientes y emergentes de la actividad matemática. Las situaciones/problemas son el origen o razón de ser de la actividad; el lenguaje representa las restantes entidades y sirve de instrumento para la acción; los argumentos justifican los procedimientos y proposiciones que relacionan los conceptos entre sí.

La consideración de una entidad como primaria no es una cuestión absoluta sino relativa, puesto que se trata de entidades funcionales y relativas a los juegos de lenguaje (marcos institucionales, comunidades de prácticas y contexto de uso) en que participan; tienen también un carácter recursivo, en el sentido de que cada objeto, dependiendo del nivel de análisis, puede estar compuesto por entidades de los restantes tipos(un argumento, por ejemplo, puede poner en juego conceptos, proposiciones , procedimientos, etc.)

Los objetos primarios están relacionados entre sí formando configuraciones, definidas como las redes de objetos intervinientes y emergentes de los sistemas de prácticas. Estas configuraciones pueden ser socio-epistémicas (redes de objetos institucionales) o cognitivas (redes de objetos personales)

2.1.4. Segundo nivel: atributos contextuales

Los objetos matemáticos que intervienen en las prácticas matemáticas y los emergentes de las mismas, pueden ser consideradas desde las siguientes facetas o dimensiones duales (Godino, 2002)

Personal- Institucional: Si los sistemas de prácticas son compartidas en el seno de una institución, los objetos emergentes se consideran “objetos institucionales”, mientras que si estos sistemas son específicos de una persona se consideran como “objetos personales” (Godino y Batanero, 1994). La cognición matemática debe contemplar las facetas personal e institucional, entre las cuales se establecen relaciones dialécticas complejas y cuyo estudio es esencial para la educación matemática. La “cognición personal” es el resultado del pensamiento y la acción del sujeto individual ante una cierta clase de problemas, mientras la “cognición institucional” es el resultado del diálogo, el convenio y la regulación en el seno de un grupo de individuos que forman una comunidad de prácticas.

Ostensivo- No ostensivo: Se entiende por ostensivo cualquier objeto que es público y que, por tanto, se puede mostrar a otro. Los objetos institucionales y personales tienen una naturaleza no ostensiva (no perceptibles por sí mismos). Ahora bien, cualquiera de estos objetos se usa en las prácticas públicas por medio de sus ostensivos asociados (notaciones, símbolos, gráficos,…). Esta clasificación entre ostensivo y no ostensivo es relativa al juego de lenguaje en que participan. El motivo es que un objeto ostensivo puede ser también pensado, imaginado por un sujeto o estar implícito en el discurso matemático (por ejemplo, el signo de multiplicar en la notación algebraica).

Expresión- Contenido: Antecedente y consecuente de cualquier función semiótica. La actividad matemática y los procesos de construcción y uso de los objetos matemáticos se caracterizan por ser esencialmente relacionales. Los distintos objetos no se deben concebir como entidades aisladas, sino puestas en relación unos con otros. La relación se establece por medio de funciones semióticas, entendidas como una relación entre un antecedente (expresión, significante) y un consecuente (contenido, significado) establecida por un sujeto (persona o institución) de acuerdo con un cierto criterio o código de correspondencia.

Extensivo- Intensivo: La dualidad se utiliza para explicar una de las características básicas de la actividad matemática, permite centrar la atención en la dialéctica entre lo particular y lo general, que sin duda es una cuestión clave en la construcción y aplicación del conocimiento matemático.

Unitario- Sistémico: En algunas circunstancias los objetos matemáticos participan como entidades unitarias (que se suponen son conocidas previamente), mientras que otras intervienen como sistemas que se deben descomponer para su estudio.

Estas facetas se presentan agrupadas en parejas que se complementan de manera dual y dialéctica. Se consideran como atributos aplicables a los distintos objetos primarios.

En la figura 4 se presentan las diferentes nociones teóricas que se han descrito. En el EOS la actividad matemática ocupa el lugar central y se modeliza en términos de sistemas de prácticas operativas y discursivas. De éstas prácticas emergen los distintos tipos de objetos matemáticos primarios, que están relacionados entre sí formando configuraciones. Por último, los objetos que intervienen en las prácticas matemáticas y los emergentes de las mismas, según el juego de lenguaje en que participan, pueden ser considerados desde las cinco facetas o dimensiones duales, lo cual lleva a la siguiente tipología de objetos secundarios: personal-institucional, unitario- sistémico, intenso-extensivo, expresión-contenido y ostensivo-no ostensivo.

2.1.5. Procesos

Tanto las dualidades como las configuraciones de objetos primarios se pueden analizar desde la perspectiva proceso-producto, lo cual lleva a los procesos indicados en la figura 4 La emergencia de los objetos de la configuración (problemas, definiciones, proposiciones, procedimientos y argumentos) tiene lugar mediante los respectivos procesos matemáticos de comunicación, problematización, definición, enunciación, elaboración de procedimientos (algoritmización, rutinización,...) y argumentación. Por otra parte, las dualidades dan lugar a los siguientes procesos cognitivos/ epistémicos: institucionalización – personalización; generalización – particularización; análisis/descomposición – síntesis/reificación; materialización /concreción – idealización/ abstracción; expresión/representación – significación.

La consideración de las facetas duales extensivo/intensivo, ostensivo/no ostensivo y unitario/sistémico permiten la delimitación de los procesos de particularización y generalización con respecto a los procesos de idealización y materialización (Font y Contreras, 2008).

Se trata de una delimitación importante que permite un análisis más detallado de cada uno de estos procesos y de su presencia combinada en la actividad matemática, y por tanto, clarificar la naturaleza del "objeto matemático" usualmente considerado como una entidad abstracta o ideal.

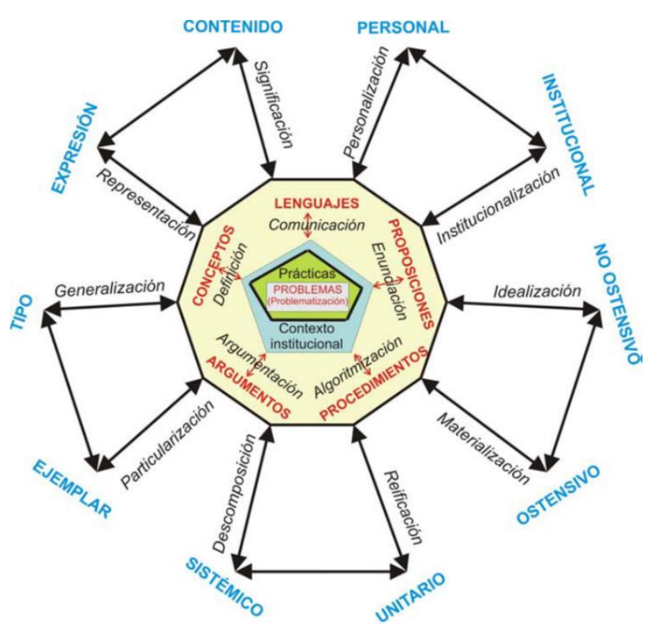


Figura 4: Configuración de objetos y procesos matemáticos (Godino, Batanero y Font, 2007)

2.1.6. Los significados como contenido de funciones semióticas

Uno de los objetivos iniciales del EOS era dar una respuesta útil para la educación matemática a la pregunta ¿cuál es el significado de un concepto? A lo que Godino y Batanero (1994, pp17-18) propusieron una respuesta pragmatista antropológica: El significado de un concepto (o de cualquier "objeto matemático") es el sistema de prácticas (operativas y discursivas) que un sujeto realiza para resolver un cierto tipo de problemas en las que dicho objeto interviene. Se establece de esta manera la función semiótica entre el objeto y el sistema de prácticas.

La descripción de la actividad matemática requiere el doble lenguaje de las prácticas y los objetos intervinientes en las mismas: no hay prácticas sin objetos, ni objetos sin prácticas. Estas dos categorías básicas de entidades se complementan con otra entidad relacional, la función semiótica que conecta los objetos que intervienen en las prácticas.

Así, los significados no son sólo "los sistemas de prácticas", sino "el contenido de cualquier función semiótica". Además, las funciones semióticas son un instrumento relacional que facilita el estudio conjunto de la manipulación de ostensivos matemáticos y del pensamiento que la acompaña, característico de las prácticas matemáticas.

La figura 4 que resume el sistema de objetos y procesos intervinientes y emergentes en las prácticas matemáticas, los cuales pueden participar como expresión, contenido o criterio de funciones semióticas. Se tiene de este modo un instrumento potente para el análisis de la práctica matemática y de los procesos de comunicación y significación implicados.

Uno de los propósitos de esta investigación es usar herramientas del EOS que permitan describir e interpretar los hechos cognitivos ligados a la solución de tareas en donde se haga presente la visualización desde una nueva perspectiva y por tanto ayudar a identificar nuevos fenómenos de carácter ontosemiótico.

2.1.7. Comprensión y conocimiento en el EOS

Básicamente hay dos maneras de entender la "comprensión": como proceso mental o como competencia (Font, 2001). Estos dos puntos de vista responden a concepciones epistemológicas que, como mínimo, son divergentes, por no decir que están claramente enfrentadas. Los enfoques cognitivos en la Didáctica de las Matemáticas, en el fondo, entienden la comprensión como "proceso mental". Los posicionamientos pragmatistas del EOS, en cambio, llevan a entender, de entrada, la comprensión básicamente como competencia y no tanto como proceso mental (se considera que un sujeto comprende un determinado objeto matemático cuando lo usa de manera competente en diferentes prácticas).

Ahora bien, el hecho de considerar que las funciones semióticas tienen un papel esencial en el proceso relacional entre entidades, o grupos de ellas, que se realiza en las prácticas matemáticas (dentro de un determinado juego de lenguaje), permite entender en el EOS la comprensión también en términos de funciones semióticas (Godino, 2003). En efecto, podemos interpretar la comprensión de un objeto O por parte de un sujeto X (sea individuo o institución) en términos de las funciones semióticas que X puede establecer, en unas circunstancias fijadas, en las que se pone en juego O como funtivo (expresión o contenido). Cada función semiótica implica un acto de semiosis por un agente interpretante y constituye un conocimiento. Hablar de conocimiento equivale a hablar del contenido de una (o muchas) función semiótica, resultando una variedad de tipos de conocimientos en correspondencia con la diversidad de funciones semióticas que se pueden establecer entre las diversas entidades introducidas en el modelo.

2.2. Perspectiva de la visualización en el marco del EOS

En este apartado se sintetiza el trabajo realizado por Godino, Cajaraville, Fernández y Gonzato (2011) en el que se analiza la visualización en el marco del EOS.

Como se ha indicado con anterioridad se considera que el análisis de la actividad matemática, de los objetos y procesos que intervienen en la misma, centra la atención inicial en las prácticas que realizan las personas implicadas en la solución de determinadas situaciones- problemas matemáticas. La aplicación de este planteamiento a la visualización lleva a distinguir entre “Prácticas visuales” y “prácticas no visuales” o simbólico/analíticas. Con dicho fin se fija la atención en los tipos de objetos lingüísticos (natural, icónico, simbólico) que intervienen en una práctica, los cuales son considerados visuales si ponen en juego la percepción visual.

Los diferentes tipos de objetos primarios que participan en una práctica matemática (conceptos, procedimientos, proposiciones, argumentos y situaciones – problemas) serán considerados como visuales siempre que se expresen mediante lenguajes visuales. Esto lleva a que la consideración de un objeto como visual lo será en relación al juego de lenguaje en que participe, de modo que si se expresa en lenguaje analítico será considerado como analítico. Con frecuencia las prácticas matemáticas y en consecuencia las configuraciones de objetos y procesos asociados, tendrán un carácter mixto (visuales- analíticas) y desde el punto de vista de la progresión del aprendizaje las conversiones entre componentes visuales y analíticos desempeñarán un papel importante.

Este análisis de la visualización tiene en cuenta la distinción peirciana entre tres tipos de signos (ícono, índice y símbolo). Atendiendo la relación que los signos tengan con el objeto, Peirce (1965) realiza la siguiente clasificación:

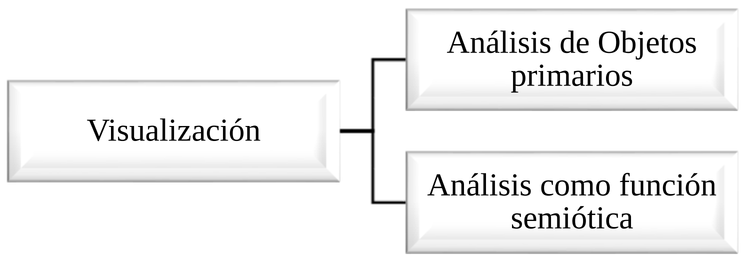
Iconos: Tienen una relación de semejanza, en tanto se parecen al objeto que representan. La relación con aquello a lo que se refieren es directa, por ejemplo pinturas, retratos, dibujos, figuras, mapas, etc. La representación muestra la estructura u organización del objeto.

Índices: La relación con los objetos que representa es de contigüidad (relación de causa-efecto) con respecto a la realidad. Por ejemplo un rayo (índice de tormenta), una huella (índice de que alguien pasó por ahí), etc.

Símbolos: Representa al objeto designado en virtud de un hábito o regla independiente de cualquier cualidad física. Ejemplo: palabras, logotipos, escudos, armas, señales de tráfico

Así la visualización será analizada desde dos puntos de vista como se muestra en el esquema 1:

Esquema 1: Fases para el análisis de la visualización en las actividades evaluadas



2.3. Tipos de configuraciones visuales

La consideración de un Objeto como visual o no visual es compleja en la literatura, por una parte aparecen los objetos físicos que se perciben con sentido de la vista siendo los primeros en ser considerados como "objetos visuales" por ejemplo una foto, un dibujo o cualquier otra inscripción icónica de los objetos físicos. Por otro lado la psicología se ha interesado por la naturaleza de las representaciones internas en la mente de las personas, como también las ideas y conceptualizaciones. De aquí viene el uso de nociones teóricas como "imágenes mentales", "esquemas e imágenes, etc." Las cuales no se pueden percibir directamente con la vista.

El EOS propone considerar objetos que intervienen en la práctica matemática, los medios de expresión lingüística, conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos. Las propias situaciones problemas o tareas matemáticas de cuya solución emergen objetos que intervienen en la práctica matemática los cuales deben ser visualizados (Figura 5)

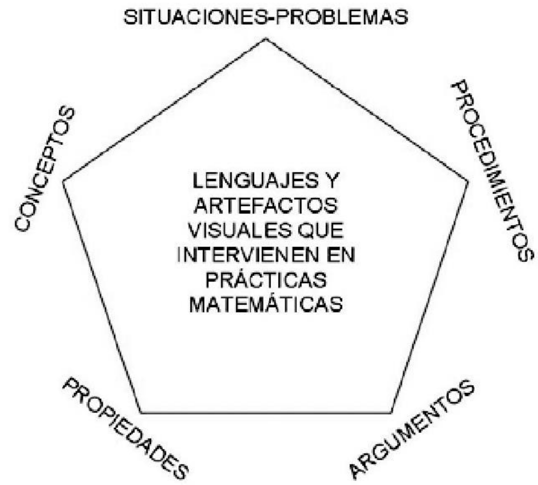


Figura 5: Visualización y objetos matemáticos

Por ende a continuación se describe una tipología de objetos visuales para cada una de las categorías de objetos matemáticos primarios:

Lenguaje Visual: Se trata de los medios de comunicación icónica, indexical y diagramática de la forma y de la posición relativa de objetos que representan la estructura de sistemas conceptuales como:

- Icónico: (fotografías, pictogramas, mapas,…)
- Manipulativo: (artefactos, cuerpos geométricos,…)
- Diagramáticos: (diagrama, grafos, esquemas, croquis,..)

Procedimientos: La siguiente relación incluye tipos básicos de operaciones, procedimientos o técnicas que se consideran visuales.

- Proyectar cuerpos en el plano, seccionar, rotas, simetrizar, trasladar, deslizar,…
- Construir sólidos a partir de sus proyecciones planas
- Transformar representaciones visuales mediante descomposición y recomposición de figuras
- Representar gráficamente relaciones.

Conceptos: Se entiende por concepto a un invariante o entidad cuyo significado es fijado por una definición o regla, por lo que se distinguirá:

- Conceptos de representación material(dibujo, imagen, modelos tridimencionales)
- Conceptos figurales: representados por medio de lenguaje visual como triángulo, prisma cuadrangular recto,…

Propiedades: Se trata de relaciones entre conceptos expresadas mediante proposiciones (enunciados cuya verdad o falsedad se debe establecer).Algunos tipos de proposiciones visuales que intervienen en la solución de tareas visuales y se expresan en lenguaje visual son:

- Propiedades de los procedimientos visuales utilizados por ejemplo la conservación de la forma y tamaño por movimientos rígidos.
- Propiedades del lenguaje visual utilizado como conservación de la forma en las proyecciones proporcionales, propiedades de isometrías (rotaciones, traslaciones, simetrías)
- Propiedades de los conceptos visuales

Argumentos visuales: La elaboración de un discurso justificativo de las proposiciones y de los procedimientos que requerirá dependiendo del caso, si se trata de:

- Naturaleza empírica presentación simple del objeto material correspondiente
- Argumentaciones deductivas discurso analítico que evoque las definiciones y teoremas previamente establecidos.

2.4. Investigaciones sobre visualización y representaciones geométricas

La visualización tiene matices y características diferentes según el tipo de representación semiótica que se considere (Duval, 2003). Por lo que según Marmolejo y Vega (2012) la atención recae en la visualización asociada a las figuras geométricas de naturaleza bidimensional. Asumiendo que la visualización es una actividad cognitiva compuesta por dos maneras de proceder sobre las figuras geométricas: una, la acción de discernir en una figura geométrica inicial (figura de partida) las transformaciones que permiten modificarla en otra (figura de llegada) (Duval, 2003) y dos, los cambios de focalización aplicados sobre la figura, sub-figuras y/o sub-configuraciones que conforman la figura de partida y que han de considerarse en el desarrollo y comprensión de la tarea propuesta.

No obstante el reconocimiento generalizado de lo anteriormente dicho en diferentes investigaciones, pone en evidencia que hacer de las figuras herramientas heurísticas potentes para la comprensión y la resolución de problemas geométricos está lejos de ser obvio y espontáneo (Duval, (1999); Padilla, (1992); Marmolejo, (2012)). Por el contrario, es necesario aprender a discriminar entre diferentes formas de ver para reconocer las que son pertinentes y potentes para la resolución de la actividad matemática planteada; es decir, es indispensable aprender no solo a detectar, sino también a aprovechar o vencer, según sea el caso, la presencia de factores que hacen posible discriminar sobre una figura las sub-figuras o sub-configuraciones pertinentes a la resolución del problema planteado.

Es por esto que Clemente, Llinares y Torregrosa (2017) en su investigación afirman que la percepción visual vinculada a las aprehensiones discursivas y operativas puede llegar a dificultar o favorecer el uso de determinados conceptos y propiedades geométricas necesarias para la resolución del problema.

Los maestros pueden proveer a sus alumnos de las destrezas necesarias para identificar subconfiguraciones en la figura inicial, que permitan activar los conocimientos de geometría oportunos para la resolución del problema. (Stylianides y Ball, 2008) La identificación de una figura prototípica en la configuración inicial tiene un efecto heurístico que activa determinados conocimientos de geometría, que favorecen el cambio del anclaje visual al anclaje discursivo en la resolución del problema. (Clemente, Llinares, y Torregrosa, 2017). Desde estos resultados se deriva la necesidad de enseñar a ver a los futuros profesores de matemática durante el aprendizaje de la geometría. Es decir, si bien investigaciones arrojan que es importante que los maestros deberían enseñar a sus alumnos a ver las configuraciones geométricas que pueden ser relevantes para la resolución de problemas, aún no hay información de que es lo que ocurre en la formación de los futuros profesores de matemática.

Es necesaria más investigación para apoyar esta línea de trabajo centrada en la relación entre la visualización, la generación del razonamiento configural y la resolución de problemas de probar en el sentido de aportar información específica para la toma de decisiones en la formación de maestros. (Clemente, Llinares y Torregrosa, 2017)

Según Fernandez, Godino y Cajaraville (2012) EOS permite describir e interpretar los hechos cognitivos ligados a la solución de tareas de visualización desde una perspectiva complementaria. Considerando que la epistemología y ontología que propone el EOS puede ayudar a superar una visión parcial y sesgada hacia el cognitivismo en las investigaciones didácticas por lo que el esquema de la configuración epistémica tiene por objeto visualizar la red de relaciones entre los distintos tipos de objetos primarios.

Finalmente, Clemente y Llinares (2015) en los datos obtenidos en su investigación muestran que, aunque los estudiantes para maestro puedan tener diferentes preferencias cognitivas para dar cuenta de cómo comunican la resolución de los problemas, lo que es necesario es que aprendan a reconocer los hechos geométricos en determinadas configuraciones, así como las proposiciones que permitan apoyar el desarrollo del razonamiento lógico, deberían ser considerados como aspectos constituyentes del conocimiento de geometría del maestro y la enseñanza de la geometría debe apoyar no sólo a que los alumnos descubran, visualicen, describan y representen conceptos y propiedades de las figuras geométricas en el mundo físico, sino también que puedan desarrollar destrezas de razonamiento lógico, por lo que es necesario que el maestro apoye el desarrollo de éstas destrezas pero para ello hay que indagar en lo que ocurre con los futuros profesores de matemática.

2.5. Aporte del uso de visualización y configuraciones geométricas

Esta investigación se centra en cómo los futuros profesores de matemática abordan una actividad evaluada que requiera el uso de visualización y de las configuraciones en geometría que permitan mejorar sus procesos cognitivos y adquirir herramientas que ayuden a desarrollar tareas dentro de la asignatura de geometría como también dentro del aula con sus futuros estudiantes, siendo un elemento importante dentro del proceso de enseñanza-aprendizaje. Además de que pueda servir como base para futuros diseños de unidades didácticas que quizás puedan incluir el uso de software o elementos manipulativos que ayuden a mejorar el uso de la visualización y de las configuraciones en geometría tanto de los futuros profesores de matemática como de sus estudiantes.

CAPÍTULO III

METODOLOGÍA DE LA INVESTIGACIÓN

3.1. Tipo y Diseño de la investigación

3.1.1. Enfoque de la investigación

El estudio de ésta investigación se abordará principalmente desde la perspectiva del análisis cualitativo pues en este contexto el investigador podrá desarrollar preguntas e hipótesis antes, durante o después de la recolección y el análisis de los datos. Con frecuencia, estas actividades sirven, primero, para descubrir cuáles son las preguntas de investigación más importantes; y después, para perfeccionarlas y responderlas. La acción indagatoria se mueve de manera dinámica en ambos sentidos: entre los hechos y su interpretación, y resulta un proceso más bien "circular" en el que la secuencia no siempre es la misma, pues varía con cada estudio. (Hernández, Fernández y Baptista, 2014)

Este estudio pretende analizar la visualización planar y las configuraciones geométricas en el aprendizaje de la geometría de futuros profesores de matemática de la Universidad Católica de la Santísima Concepción desde el punto de vista ontosemiótico.

3.1.2. Tipo de estudio y Diseño

El tipo de estudio es fenomenológico debido a que se enfoca en las experiencias individuales subjetivas de los participantes (Salgado, 2007). Es por esto que las experiencias que han tenido los Futuros profesores de matemática frente a actividades durante toda su formación académica y en particular en la asignatura de geometría plana les permitirá generar respuestas para la actividad evaluada de esta investigación lo que nos brindará información para analizar el uso de visualización planar y configuraciones geométricas en el aprendizaje de la circunferencia.

De acuerdo al objetivo del estudio su diseño será un estudio de caso el cual es un método de investigación cualitativo que se ha utilizado ampliamente para comprender en profundidad la realidad educativa de los futuros profesores de matemática. Para este estudio el interés radica en identificar e interpretar la presencia de visualización planar y configuraciones geométricas además de indagar en cómo son utilizadas en la comprensión de la circunferencia por los futuros profesores de matemática de la Universidad Católica de la Santísima Concepción frente a actividades evaluadas y establecer una categorización entre las variables utilizando el enfoque ontosemiótico.

Para ser más concreto, llamaremos casos a aquellas situaciones o entidades sociales únicas que merecen interés de investigación y su propósito fundamental es comprender la particularidad del caso en el intento de conocer cómo funcionan todas las partes que las componen y las relaciones entre ellas para formar un todo (Bisquerra, 2010). Establecer el uso de las configuraciones por parte de los futuros profesores de matemática permitirá generar actividades que mejoren y potencien el aprendizaje significativo de los conceptos, propiedades y relación de los elementos fundamentales de la circunferencia.

3.1.3. Población objetivo y su contexto educativo

Consideraremos como población objetivo en esta investigación a futuros profesores de la Carrera de Pedagogía en Educación Media en Matemática de la Universidad Católica de la Santísima Concepción que se encuentran en primer año de formación cursando la asignatura de Geometría Plana durante el segundo semestre del año 2017 y siguiendo la definición de Hernández, Fernández y Baptista (2014) en el proceso cualitativo será el grupo de personas sobre el cual se habrán de recolectar los datos.

De acuerdo a lo declarado en el programa de la asignatura el propósito del curso de geometría plana es proporcionar a los futuros profesores la competencia del método axiomático que le permite desarrollar un pensamiento sistemático y estructurado. Así mismo la geometría forma parte del lenguaje cotidiano ya que muchos términos geométricos como punto, recta, plano, triángulo, ángulo, centro, arco entre otros son de uso frecuente en nuestra comunicación

Las competencias genéricas y los niveles de dominio declarados en el programa y que tributan al modelo instruccional de la Universidad Católica de la Santísima Concepción se refieren a que el futuro profesor de matemática autoaprende y se perfecciona de manera continua y reconoce su propio estilo de aprendizaje e identifica formas y herramientas con las que se aprende. Mientras que las competencias específicas y su nivel de dominio el futuro profesor de matemática demuestra un dominio teórico y práctico de su especialidad para un ejercicio profesional acorde a las demandas del marco curricular nacional, conoce los contenidos matemáticos planteados en el currículum de la formación general y diferenciada de la educación media, reconoce el valor formativo y cultural de la matemática, su evolución histórica y sus aplicaciones como soporte en los procesos de enseñanza aprendizaje en diversos contextos y situaciones, conoce el valor formativo y cultural de la matemática para el ciudadano actual como soporte en los procesos de enseñanza aprendizaje en el ejercicio profesional o en diversos contextos y situaciones.

Lo declarado en las competencias específicas y niveles de dominio se traducen en los siguientes resultados de aprendizaje: domina el lenguaje, representaciones y del método axiomático, de modo que le permiten desarrollar el pensamiento sistemático y estructurado, aplica los principios, teoremas y operatoria básica a la resolución de problemas y utiliza recursos informáticos para la resolución de problemas mediante la aplicación de los elementos propios de la Geometría Plana. Los contenidos relacionados con esta investigación abordados en el curso de geometría plana son: rectas en el círculo, cuerdas, diámetro, arcos de circunferencia, intersección de una recta y de un círculo, secantes, tangentes, propiedades del ángulo inscrito y de las figuras inscritas.

Los futuros profesores de matemática que participaron en esta investigación corresponden a cuarenta y siete estudiantes de la carrera antes indicada los cuales están dividido en dos secciones que fueron desarrollados en forma coordinada por dos docentes disciplinares, es importante mencionar que todos ellos son parte de la investigación consciente de los alcances de este estudio.

3.2. Técnicas e instrumentos de recopilación de información

3.2.1. Textos

Definición de los textos y las técnicas a utilizar

Para esta investigación, se analiza el contenido referido a la circunferencia presente en una muestra de 23 libros de matemática y geometría, separados en tres categorías. En la primera categoría se han seleccionado 8 libros de matemática utilizados en séptimo y octavo año de educación básica (niños de 12 a 14 años de edad), en la segunda categoría son 11 libros utilizados en educación media (jóvenes de 14 a 18 años de edad) y para la tercera categoría se han seleccionado 4 libros de enseñanza superior (desde 18 años de edad). Es importante mencionar que para el análisis fueron consideradas las bases curriculares 2009 y 2015.

Luego de la selección de diferentes textos presentes en la educación chilena se han separado de acuerdo a las categorías establecidas anteriormente, asignándole I, II o III, seguido del nivel educacional asignando con EB a enseñanza básica, EM a enseñanza media o con una U a universitario y finalmente un número para identificar el libro, así como ejemplo la sigla IIEM4, quiere decir: categoría dos, enseñanza media, texto 4. También se indican los autores, editorial y año de publicación, además se realiza un esquema resumen que asigna a cada texto una sigla que servirá para facilitar la lectura posterior, lo que se encuentra en el capítulo de análisis de resultados.

Validación de los textos utilizados

En relación a la muestra de texto seleccionadas podemos obtener una visión general del concepto de circunferencia encontrados en ellos considerando elementos principales como definiciones, propiedades y teoremas que de acuerdo a las bases curriculares chilenas los autores han considerado apropiado tanto para la enseñanza en educación básica y educación media, además de observar si el uso de la visualización y configuraciones geométricas se encuentra presente y en caso de ser así cómo se encuentra abordado.

En cuanto a los textos universitarios utilizados nos interesa determinar si la selección se ajusta a los estándares pedagógicos disciplinarios proporcionando una muestra general de los textos sugeridos en la bibliografía del programa de la asignatura de geometría plana para los profesores de matemática en formación.

Finalmente nos interesa observar y describir los campos de problemas que son abordados por los textos seleccionados lo que permitirá tener los elementos necesarios para la construcción del instrumento evaluativo.

3.1.1. Instrumento

Definición de la creación instrumento y proceso de validación

Luego de toda la información recopilada en los textos analizados anteriormente se hará un levantamiento de información acerca de la Visualización y Configuraciones geométricas utilizadas por los futuros profesores de matemática de la UCSC y siguiendo lo establecido por Hernández, Fernández y Baptista (2010) es necesario diseñar este cuestionario de preguntas abiertas orientadas a clasificar las respuestas generadas por los estudiantes teniendo en cuenta los indicadores de las variables estudiadas.

El proceso de validación del instrumento evaluativo siguió las siguientes etapas: primero se realiza entrevistas con diferentes profesores de la UCSC que han dictado la asignatura de geometría plana en años anteriores, además, se agendan reuniones de trabajo con los dos docentes disciplinares actuales de la signatura de geometría plana quienes facilitan el programa y el syllabus utilizado por ellos para el desarrollo de la asignatura, proporcionando el cronograma con la calendarización de contenidos y evaluaciones del curso quienes también explican a la investigadora de este trabajo las características de los estudiantes de la asignatura, contenidos abordados y las actividades evaluadas junto con el nivel de exigencia que se han de realizar en el curso.
Con toda la información reunida y para generar la propuesta del instrumento se realiza en primera instancia una triangulación entre estándares pedagógicos, bases curriculares

y programa de la asignatura de geometría plana lo cual es alineado con el análisis de texto realizado que se describe en la sección siguiente, incluyendo también ejercicios aplicados en olimpiadas de matemática nacionales e internacionales para generar una cuidadosa selección las actividades evaluativas respecto de la circunferencias que se traducen en una propuesta inicial presentada y validada por la opinión de expertos disciplinares docentes de la UCSC quienes verifican la congruencia que existe entre el objetivo de la investigación y la propuesta presentada con las variables de este estudio. Luego de este cuidadoso proceso, la propuesta es presentada a los docentes que imparten la asignatura de geometría plana en la carrera de pedagogía en matemática de la UCSC que tras un minucioso análisis de la relación entre la propuesta con los objetivos del curso, las competencias y habilidades a desarrollar por los futuros profesores de matemática, validan las preguntas del cuestionario que consideran pertinentes y con el nivel apropiado para los estudiantes, considerando los conceptos teóricos del curso de geometría plana, lo que finalmente se traduce en el instrumento oficial que fue aplicado como evaluación en el curso de geometría plana 2017. Es importante mencionar que también se generó una carta de consentimiento que previamente es aprobada por los docentes de la asignatura de geometría plana en la que se informa a los estudiantes el nombre de la investigadora, el objetivo de la investigación y se solicita autorización para analizar la información entregada en sus respectivas evaluaciones siendo esta entregada al momento de la actividad evaluada a cada uno de los futuros profesores el día de la evaluación y así permitir el análisis posterior de las respuestas generadas. Tanto de la evaluación como la carta de consentimiento se encuentran en el anexo 1 y 2

Características y Aplicación del instrumento evaluativo

El instrumento final validado por opinión de expertos aplicado a los Futuros Profesores de Matemática consta de 6 ítem de desarrollo que abordan los diferentes campos de problemas establecidos anteriormente, contando con un tiempo de 90 minutos para su proceso.

El ítem 1 requiere definir el concepto de ángulo inscrito y semi inscrito por lo que aborda lo que en esta investigación hemos llamado Problema de los ángulos inscritos y circunscritos (CP4) y Problema de inscripción y circunscripción de la circunferencia en polígono (CP5***)***.

En el ítem 2 a partir de la imagen de dos semi circunferencias se solicita encontrar la medida de un ángulo particular abarcando el Problema de las medidas (CP3) y Problema de los ángulos inscritos y circunscritos (CP4).

Para el ítem 3 pide determinar la medida de un lado de un decágono regular inscrito en una circunferencia abarcando el Problema de las medidas (CP3), Problema de inscripción y circunscripción de la circunferencia en polígonos (CP5) y Problema de la construcción de elementos del círculo (CP8)

En el ítem 4 a partir de una imagen de un cuadrilátero circunscrito en una circunferencia se solicita encontrar el perímetro del cuadrilátero, abarcando el Problema de la tangente (CP1), Problema de las medidas (CP3) y Problema de inscripción y circunscripción de la circunferencia en polígonos (CP5).

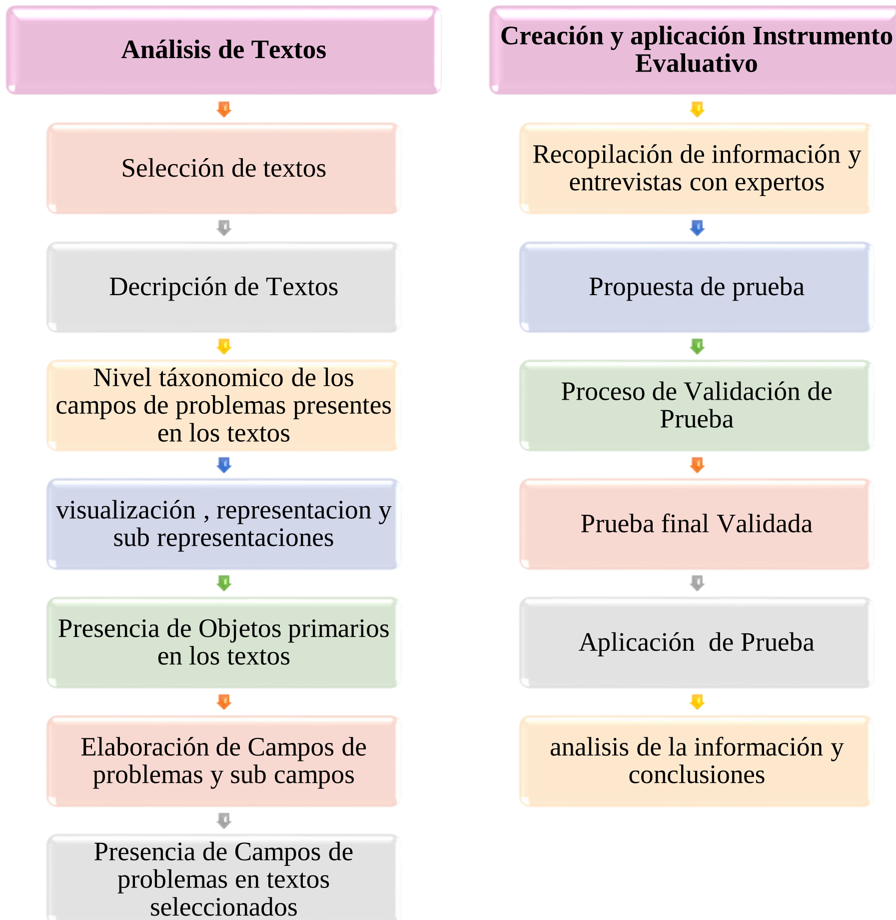
Para el ítem 5 se presenta una imagen de dos circunferencias congruentes con una recta tangente en común y se pide para un punto P particular demostrar que es punto medio. Por lo que este ítem considera el Problema de la tangente CP1, Problema de la distribución de puntos y rectas respecto de la circunferencia CP6, Problema de posicionamiento relativo de dos circunferencias CP7

Finalmente en el ítem 6 un cuadrado contiene dos circunferencias con centro sobre la diagonal del cuadrado además de ser circunferencias tangentes entre sí y con los lados del cuadrado, por lo que se solicita realizar una demostración particular abarcando el Problema de la tangente CP1, Problema de las medidas CP3, Problema de inscripción y circunscripción de la circunferencia en polígonos CP5, Problema de posicionamiento relativo de dos circunferencias CP7

3.3. Planificación de la investigación

Para la realización de esta investigación nos hemos centrado principalmente en dos etapas, por un lado está el cuidadoso análisis de los veintitrés textos seleccionados lo que da partida a la creación y aplicación del instrumento evaluativo como se detalla en el esquema 2.

Esquema 2: Etapas de la investigación fuente elaboración propia.



3.4. Estrategia de análisis de datos

Para el análisis de los datos, dividiremos la información en tres etapas siguiendo los objetivos específicos

Primero se genera una tipología de respuestas que llamaremos configuraciones cognitivas asociadas a la información entregada en la actividad evaluada realizada por los FPM.

Segundo el análisis del uso de la visualización y configuraciones de los FPM a través de los objetos visuales primarios

Y tercero se analizará la presencia de errores recurrentes por parte de los FPM asociados a los objetos primarios que plantea el EOS

3.5. Criterios de calidad de la investigación

Es posible encontrar en la literatura diversas formas respecto a cómo asegurar el rigor y la calidad de una investigación ya que se hace relevante la pertinencia de procesos que permitan asegurar la calidad de los resultados obtenidos, resguardando el rigor en la metodología y el tratamiento de los datos. Según Cornejo y Salas (2011) "Los criterios de calidad, dicen relación con la rigurosidad con que una investigación fue realizada. Por tanto, se definirá rigor como el establecimiento de parámetros que permitan acceder y asegurar la credibilidad, autenticidad, confianza e integridad de los resultados propuestos en una investigación."

Siguiendo a (2009) de modo, de asegurar la calidad en la presente investigación, se han establecido algunos parámetros mínimos para resguardar el proceso investigativo y lograr confianza e integridad en los resultados y conclusiones obtenidos.

Validez de constructo: Para esto se identifican las medidas operativas correctas para el concepto de circunferencia estudiado por lo que se recogieron datos a través de libros de texto y el instrumento evaluativo permitiendo establecer una cadena de evidencia lo que se efectuó a través de datos y la preparación de estos para su posterior análisis.

Validez interna: se trata de establecer una relación, en la que se cree que ciertas condiciones conducen a otras condiciones. Hacer concordancia de patrones, abordar respuestas rivales, establecer configuraciones cognitivas, desarrollar la construcción de la explicación. Estas tácticas se aplicaron en el análisis de datos, al considerar en esta investigación distintas categorías de análisis tanto para el análisis de texto y el instrumento de evaluación que permite generar la construcción de la explicación y conclusiones.

Validez externa: definir el dominio al que se pueden generalizar los hallazgos del estudio. En este sentido, esta investigación tiene como propósito analizar el uso de la visualización y las configuraciones en el contexto del curso de geometría plana para comprender el tipo de configuraciones cognitivas establecidas sin interferir ni modificarlo, sin embargo, puede proporcionar pautas a los docentes de manera que puedan generar o seleccionar actividades matemáticas que desarrollen el uso de la visualización en sus estudiantes.

CAPÍTULO IV

ANÁLISIS DE RESULTADOS

4.1. Análisis de textos

4.1.1. Caracterización de textos

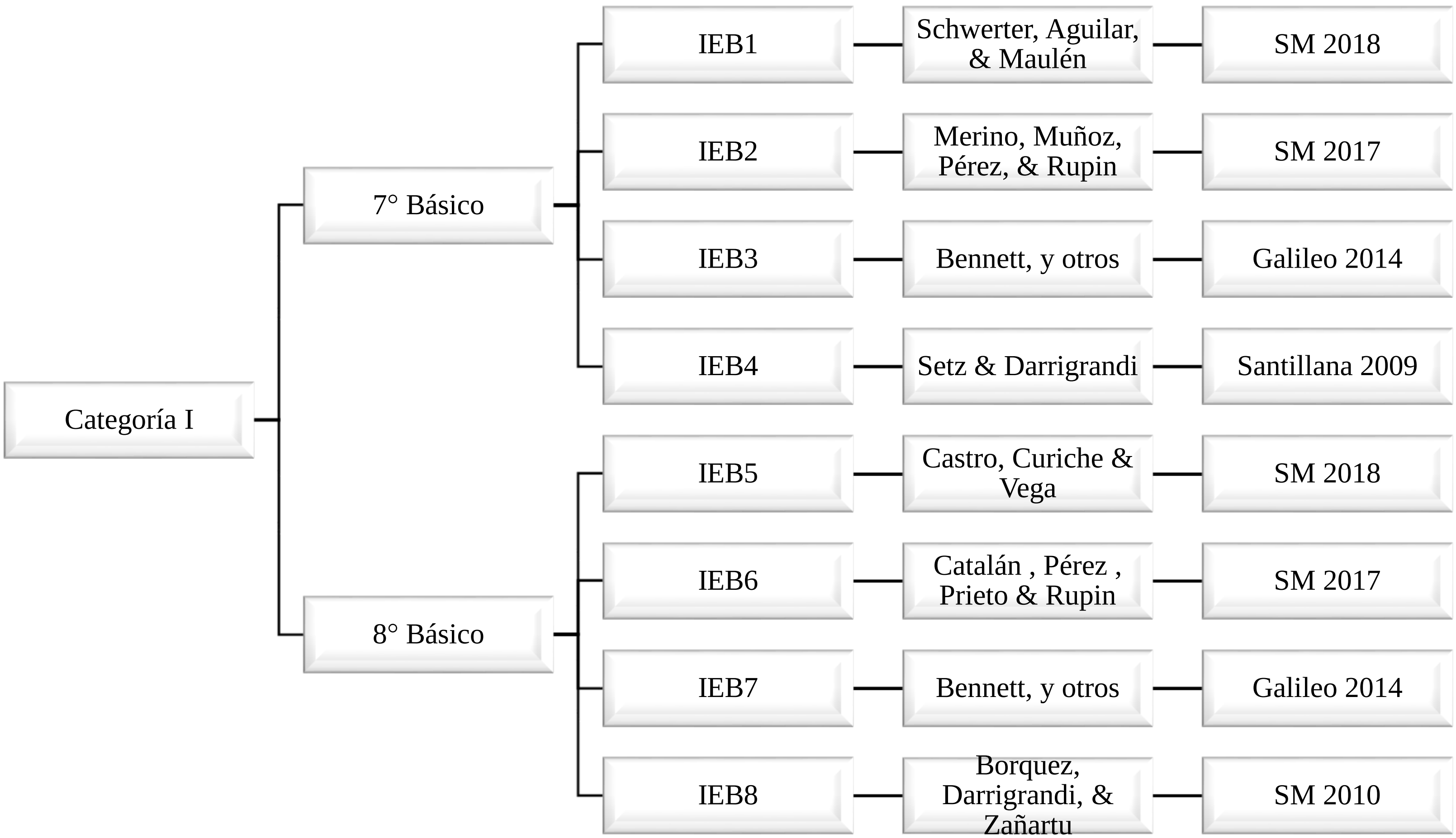
De los 23 textos analizados, se debe mencionar que están regidos por las bases curriculares chilenas dependiendo del año de actualización, como los textos son de diferentes años algunos son utilizados en la actualidad dentro de los establecimientos educacionales, mientras que otros ya quedaron fuera del sistema escolar chileno pues se ha modificado el orden de las unidades y niveles en los que se enseña el concepto de circunferencia y sus propiedades.

En general los textos constan de unidades que desglosan el concepto de circunferencia partiendo por la definición para luego seguir con el detalle de los elementos que la componen. Seguido de ejercicios que pueden ser resueltos o propuestos dependiendo de la editorial, lo que sí tienen todos en común es una sección referida netamente a la aplicación de los conceptos abordados y finalmente un resumen que lleva al cierre de la unidad con los conceptos abordados.

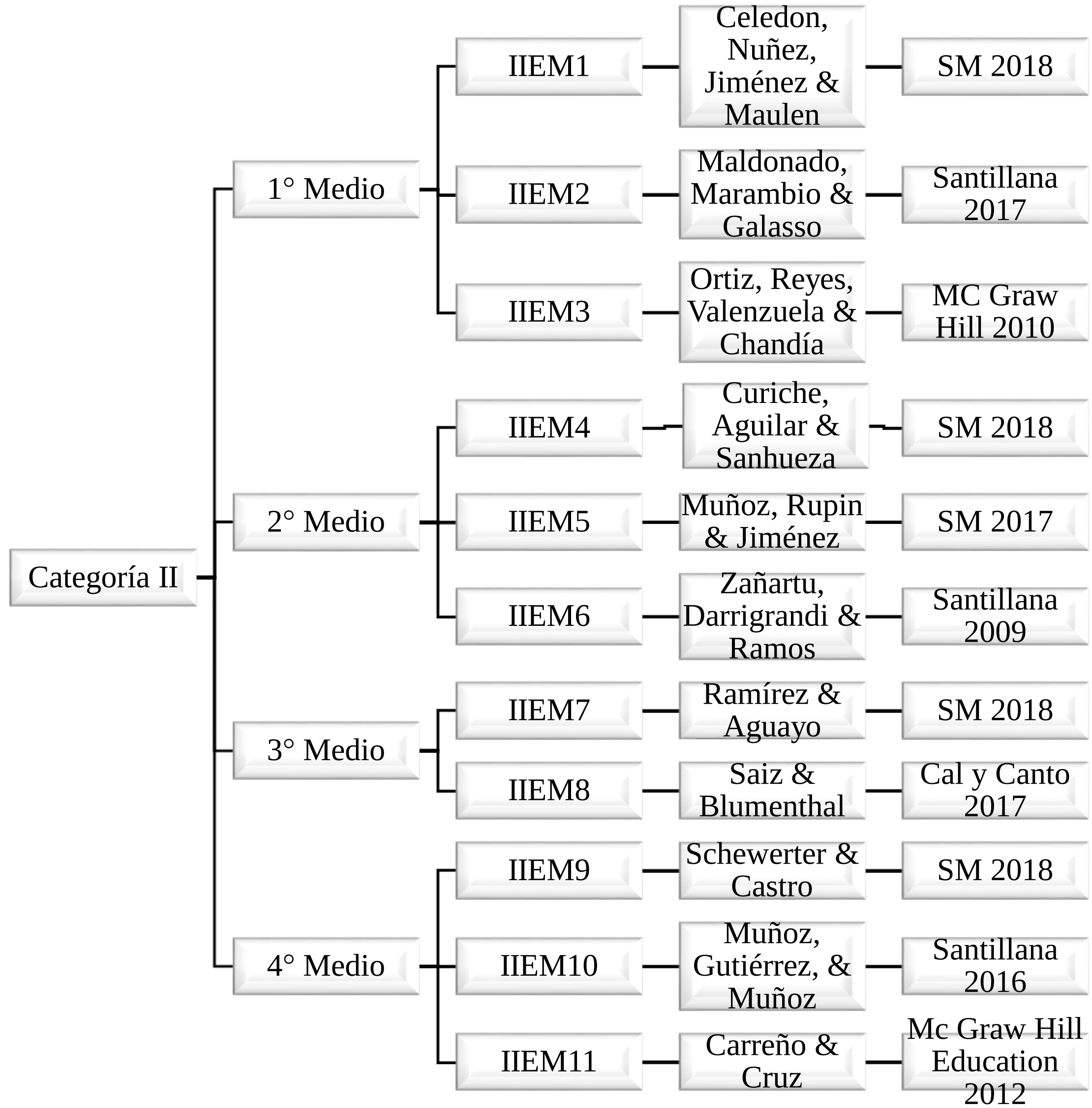
Luego de la recopilación de diferentes textos presentes en la educación chilena se ha seleccionado 23 libros de texto utilizados en éste análisis que han sido separados de acuerdo a las categorías establecidas anteriormente y además se ha realizado un esquema resumen que asigna a cada texto una sigla que servirá para facilitar la lectura posterior.

Así, de acuerdo a la categoría a la que pertenece el texto se le asigna I, II o III, seguido del nivel educacional asignando con EB a enseñanza básica, EM a enseñanza media o con una U a universitario y finalmente un número para identificar el libro, tomemos por modelo IIEM4, esto quiere decir: categoría dos, enseñanza media, texto 4. También se indican los autores, editorial y año de publicación. Para las Categoría I, II y III se establecen las siguientes clasificaciones presentadas en los esquemas 3,4 y 5 respectivamente:

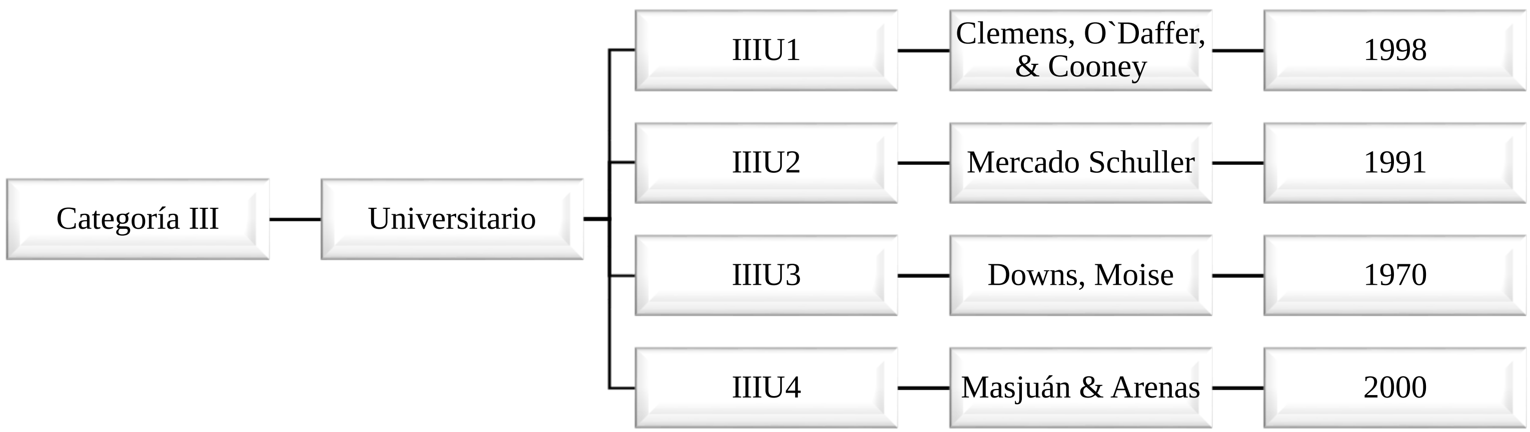
Esquema 3: Categoría I de textos analizados



Esquema 4: Categoría II de textos analizados



Esquema 5: Categoría III de textos analizados



Luego se generan campos de problemas los cuales se detallan a continuación, que sirve para el análisis posterior de esta investigación.

4.1.2. Análisis de texto a través de Campos de problema

Se realiza un análisis de cómo es abordado el concepto de circunferencia, elementos y propiedades en los textos seleccionados de los cuales de manera general hemos encontrado los siguientes campos de problema para los que se le ha asignado una sigla para facilitar su lectura más adelante.

CP1 *Problema de la tangente*: Establece las correspondencias que se obtienen al trazar rectas tangentes y secantes desde un punto exterior a la circunferencia

Ejemplo 1 (Nivel taxonómico de Bloom Análisis) Las rectas $\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{CD}$ son tangentes comunes a ambas circunferencias en los puntos A, C, D y B, como lo muestra la figura. Demuestre que $AB = CD$

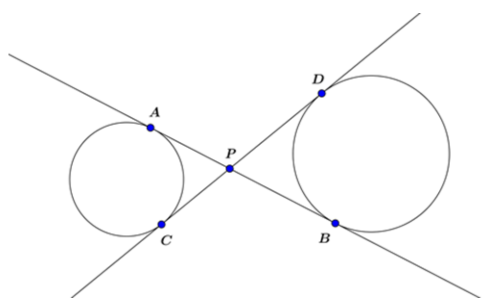
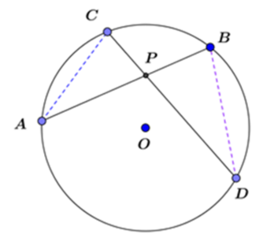


Figura 6: Fuente Carreño y Cruz, 2012, pág 283

CP2: *Problema de las cuerdas y potencias de un punto*: Determina las correspondencias que se obtienen al trazar cuerdas de una circunferencia

Ejemplo (Teorema de las cuerdas) **(Nivel taxonómico de Bloom Análisis)** Si dos cuerdas se intersectan al interior de la circunferencia, entonces el producto de la medida de los segmentos determinados en una de ellas es igual al producto de la medida de los segmentos determinados en la otra.



$$AP \cdot BP = CP \cdot DP$$

Figura 7 *Fuente Zañartu, Darrigrandi y Ramos, 2009, pág 199*

CP3: *Problema de las medidas:* Calcula longitudes, áreas, perímetros asociados a la circunferencia y sus elementos principales.

Ejemplo (Nivel taxonómico de Bloom Análisis) El diámetro de cada semicircunferencia pequeña es igual al radio de la semicircunferencia grande. Si el radio de la semicircunferencia grande es 2 ¿Cuál es el área de la región sombreada?

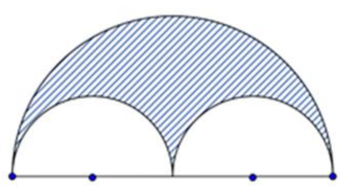


Figura 8: Fuente Downs, pág 527

Ejemplo (Nivel taxonómico de Bloom Análisis) Las semi-circunferencias trazadas en la figura tienen como diámetro los catetos del triángulo rectángulo ΔABC. Las áreas de las regiones son $x, y\ , z, m$ y n, como se indica. Demuestre que $x + y = z$

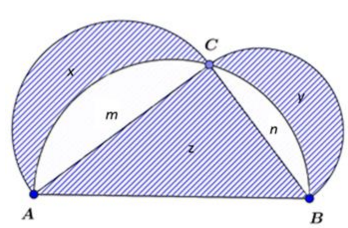


Figura 9: Fuente Downs, pág 527

CP4 *Problema de los ángulos inscritos y circunscritos*: Determina las propiedades de los ángulos inscritos y circunscritos en una circunferencia.

Ejemplo (Nivel taxonómico de Bloom Aplicación): En la figura, O_1 y O_2 son centros de dos semicircunferencias y el ángulo ABD mide 35°¿cuánto mide el ángulo DCB?

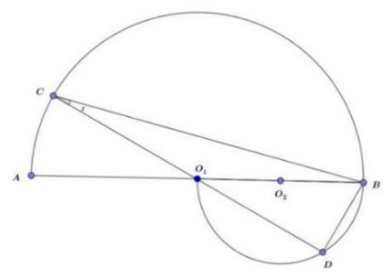


Figura 10: Fuente Carreño y Cruz, pág 311

CP5: *Problema de inscripción y circunscripción de la circunferencia en polígonos:* Establece las correspondencias que se obtienen al inscribir o circunscribir una circunferencia en polígonos.

Ejemplo (Nivel taxonómico de Bloom Aplicación): Construir un octágono regular de lado $a\ unidades$ inscrito en una circunferencia

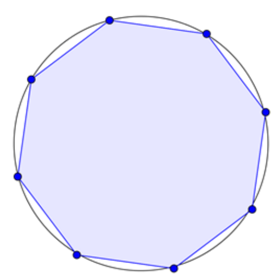
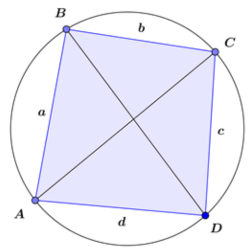


Figura 11: Fuente Shuller,1991, pág 63

Ejemplo (Teorema de Ptolomeo) **(Nivel taxonómico de Bloom Análisis)**: Demostrar que en todo cuadrilátero inscrito en una circunferencia, el producto sus diagonales es igual a la suma de los productos de los lados opuestos.



Demostrar: $AC \cdot BD = ac + bd$

Figura 12: Fuente CEPRE- UNI, Admisión 2010, Texto de Geometría, pág 18

CP6: *Problema de la distribución de puntos y rectas respecto de la circunferencia:* Distingue la distribución de puntos y rectas respecto de la circunferencia

Ejemplo: (Nivel taxonómico de Bloom Análisis) Dos puntos A y B están en el plano a una distancia de 10 m. Determinar los puntos que están a 7 m de A y a 5 m de B

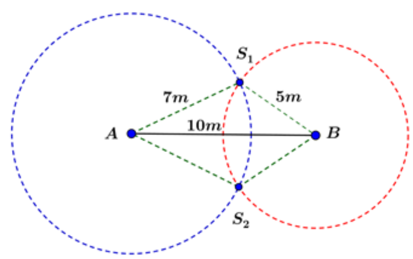


Figura 13: Fuente Shüler, 1991, pág 71

CP7 *Problema de posicionamiento relativo de dos circunferencias*: Utiliza características de posicionamiento entre circunferencias

Ejemplo (Nivel taxonómico de Bloom Aplicación): O_1 y O_2 son centros de circunferencias congruentes y $\overleftrightarrow{AB}$ es una tangente común. Demuestre que P es punto medio de $\overline{AB}$ y de $\overline{O_1O_2}$

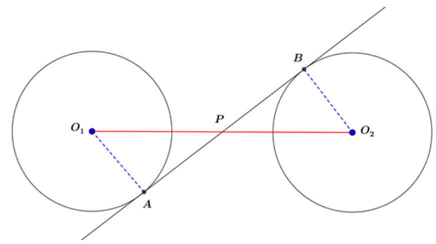


Figura 14: Fuente Carreño y Cruz, 2012, pág 283

CP8 *Problema de la construcción de elementos del círculo*: Construye con regla y compás de objetos geométricos asociados a la circunferencia

Ejemplo (Nivel taxonómico de Bloom Comprensión): Construir una circunferencia tangente a una recta dada *L* y que corte a una circunferencia dada ortogonalmente en un punto *P* dado de ella.

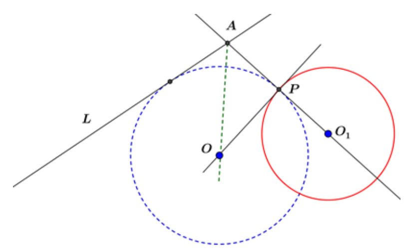


Figura 15: Fuente Schuler, 1991, pág. 143

CP9 *Problema de la modelación de situaciones reales*: Estructura y desarrolla situaciones de la vida real utilizando conceptos de circunferencia, propiedades y elementos.

Ejemplo (Nivel taxonómico de Bloom Síntesis): En una excavación un arqueólogo encontró un trozo de rueda. Ésta rueda puede reconstruirse determinando su radio original. Explíquese cómo puede realizarse esto.

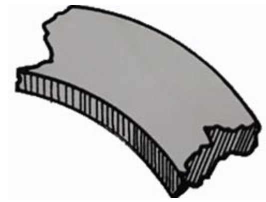


Figura 16: Fuente Clemens, O`Daffer y Cooney, 1998, pág. 357

Ejemplo (Nivel taxonómico de Bloom Síntesis): ¿Cómo puede emplearse una escuadra de carpintero para encontrar el centro de un disco? ¿Por qué funciona de este modo?

Figura 17: Fuente Clemens, O´Daffer y Coonney, 1998, pág. 371

CP10 *Uso de Tics en la construcción de figuras circulares*; Utiliza recursos tecnológicos para resolver diversas tareas geométricas relacionadas con la circunferencia

Ejemplo (Nivel taxonómico de Bloom Aplicación): Utilice geoegebra para resolver la siguiente tarea matemática, considere $\overline{AB}$ como el diámetro de la circunferencia centrada en C, siendo AP la recta tangente a la circunferencia en T y $\overline{AD}$ y $\overline{BP}$ son respectivamente perpendiculares a la recta tangente, verificar que:

a) $\overline{CD} = \overline{CP}$

b) Elabore una argumentación que verifique la información anterior

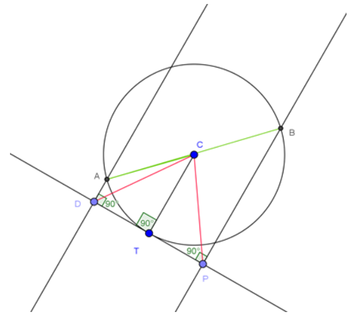


Figura 18: Fuente CEPRE- UNI, Admisión 2010, Texto de Geometría

Ejemplo (Nivel taxonómico de Bloom Aplicación): Utilizando geogebra construya un ΔABC isósceles de base $\overline{AB}$ y sea $\overline{CE}$ diámetro de la circunferencia circunscrita al ΔABC, verificar que

a) $\overline{AE} = \overline{BE}$

b) Elabore una argumentación que verifique la información anterior

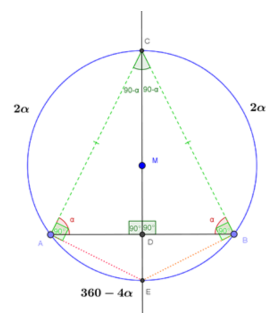


Figura 19: Fuente CEPRE- UNI, Admisión 2010, Texto de Geometría

Teniendo como base lo anterior se ha elaborado una tabla para cada una de las categorías asignadas a los diferentes textos que permite apreciar los campos de problemas presentes, de esta forma obtener una mirada en primera instancia de forma general de cada uno de los textos en el sentido de que si es abordado el concepto de la circunferencia, elementos y propiedades en los diferentes niveles de la educación chilena como también una mirada particular.

Tabla 3*: Resumen de campos de problemas presentes en textos categoría I*

		Texto							
		IEB1	IEB2	IEB3	IEB4	IEB5	IEB6	IEB7	IEB8
Campos de Problema	CP1								
	CP2	x						x	
	CP3	x	x	x		x	x	x	x
	CP4	x							
	CP5	x	x				x		x
	CP6	x	x	x				x	x
	CP7	x	x				x		
	CP8	x	x						
	CP9	x	x				x	x	
	CP10	x	x						x

Para la categoría I comprendida en los 8 textos escolares de séptimo y octavo año de educación básica, se observa que el campo de problema que es abordado con mayor reiteración tiene relación a Problema de las medidas (CP3), seguido del Problema de la distribución de puntos y rectas respecto de la circunferencia (CP6).

Es importante mencionar que IEB1 es el texto que aborda casi en su totalidad los campos de problemas propuestos, seguido de IEB2, siendo ambos textos de la editorial SM años 2018 y 2017 respectivamente encontrándose con las bases curriculares actualizadas, por lo que se esperaría que en IEB5 también de Editorial SM año 2018 ocurriese lo mismo, pero no es el caso, ya que hay una considerable ausencia de los campos de problemas estudiados y de esta manera es interesante analizar en qué niveles académicos se da mayor relevancia al concepto de la circunferencia junto con sus propiedades y teoremas o de qué forma es abordado a lo largo de la Educación Básica chilena. Posteriormente es en IEB4 de editorial Santillana año 2009 donde en particular no se encuentran presentes los campos de problemas estudiados, se debe considerar que éste texto está regido por las bases curriculares que no se encuentran actualizadas.

En general se observa que los contenidos y las actividades diseñadas a los estudiantes asociadas a los campos de problemas presentes en este análisis parten indicando lo que se aprenderá en la unidad o en la actividad, seguido de un repaso de conceptos previos para luego presentar la definición explicita de los conceptos a estudiar, luego hay una serie de ejercicios resueltos que dan pie a los ejercicios y problemas propuestos, finalizando con una síntesis de la unidad, además, si bien en los textos analizados hay una serie de imágenes que incorporan representaciones, éstas contienen información o datos a utilizar anexo a la figura para la resolución de problemas por lo que da poco espacio a que el estudiante pueda inferir o identificar los objetos matemáticos presentes, debido a que sólo se establecen una serie de ejercicios de operatoria algebraica que permita realizar cálculos con los que se supone lograr el aprendizaje significativo de el o los conceptos sobre circunferencia, sus elementos y propiedades.

Finalmente llama la atención la poca concordancia de los textos analizados frente las bases curriculares quienes señalan aprendizajes significativos con actividades que permitan el desarrollo paulatino de la circunferencia, sus elementos y propiedades, en el sentido de que como mencionamos anteriormente las actividades en su gran mayoría son sólo de operatoria algebraica careciendo de actividades que requieran la realización de demostraciones por parte de los estudiantes y por lo mismo es importante mencionar que sólo en IEB8 de edición Santillana año 2010 quien no está con las bases curriculares actualizadas fue el único texto en el que se puede observar este tipo de actividades, pero resueltas.

Para la categoría II se realiza un análisis de los campos de problemas presentes en los 11 textos de educación media seleccionados, lo que es detallado en la tabla 4 que presentamos a continuación

Tabla 4*: Resumen campos de problemas presentes en textos categoría II*

		Textos										
		IIEM1	IIEM2	IIEM3	IIEM4	IIEM5	IIEM6	IIEM7	IIEM8	IIEM9	IIEM10	IIEM11
Campos de Problemas	CP1					x	x					x
	CP2					x	x					x
	CP3	x	x		x	x	x				x	x
	CP4			x		x	x					x
	CP5	x		x		x			x		x	x
	CP6					x	x					x
	CP7	x	x	x								x
	CP8											x
	CP9	x	x				x				x	
	CP10	x										x

A diferencia de la categoría I, en la categoría II los campos de problemas se encuentran presentes con más reiteración, encontrando mayor coincidencia entre los textos a aquellos que tienen relación al Problema de las medidas (CP3), seguido del Problema de inscripción y circunscripción de la circunferencia en polígonos (CP5).

Referente a los textos IIEM5 de editorial SM año 2017 regido por las bases curriculares actualizadas e IIEM6 de editorial Santillana año 2009 regido por las bases curriculares sin actualizar, ambos utilizados en segundo año de educación media en el sistema municipal de educación chilena es donde se encontraron ejercicios y problemas con situaciones que abordaban con más reiteración los campos de problemas. Seguido de IIEM1 de editorial SM año 2018 utilizado en 1° año de educación media.

El texto IIEM11 de editorial Mc Graw Hill Education año 2012 es donde se han encontrado casi en su totalidad los campos de problemas, *pero carece de* Problemas de la modelación de situaciones reales *(CP9). Es importante comentar que* es un caso particular ya que este texto es utilizado desde 7°año básico a 4° año de educación media por un colegio de tipo particular *y para su adquisición es necesario que sea comprado y no es entregado por el estado*, así que para su uso sólo tiene acceso un grupo minoritario de estudiantes chilenos.

Referente a los textos IIEM7 utilizado en 3° año de educación media e IIEM9 utilizado en 4° año de educación media, ambos de editorial SM 2018, es en donde el concepto de la circunferencia no es abordado por lo que no fue posible encontrar los campos de problema estudiados.

En general se observa que los contenidos y las actividades diseñadas a los estudiantes asociados a los campos de problema son abordados mayormente en primer y segundo año de educción media donde las actividades están diseñadas de manera que primero se parte de una autoevaluación inicial o un repaso de conceptos que los estudiantes debiesen haber aprendido anteriormente, luego son presentadas las definiciones seguido ejercicios resueltos para luego dar inicio al trabajo individual de los estudiantes con ejercicios propuestos los que presentan variadas imágenes con información anexa como también situaciones que requieren que el estudiante sea capaz de inferir información dentro del enunciado para luego realizar su propio esquema de las imágenes teniendo que recurrir al uso de la visualización y configuraciones para dar respuesta a los problemas planteados. Es importante mencionar que los textos de todas formas siguen dando relevancia al hecho de realizar los ejercicios con una operatoria algebraica.

Finalmente en los textos utilizados en tercer y cuarto año de educación media los campos de problemas no se encuentran tan presentes ya que ahí se trabaja en otros conceptos y lo poco que se infiere sobre la circunferencia tiene relación con actividades que trabajan con cuerpos geométricos por lo que principalmente el estudiante debe recordar lo que se encuentra relacionado con la definición de radio, diámetro, perímetro, sector circular y área. Lo que llama bastante la atención en estos textos es que si bien como hemos comentado no se trabajan los campos de problemas explícitamente lo poco que se encontró requiere de bastante uso de la visualización y configuraciones para la realización de los ejercicios.

Por todo lo anterior y de acuerdo a la información adquirida es que ya hemos detectado en los niveles educacionales en donde mayormente encontramos campos de problemas referidos a contenidos sobre circunferencia, sus elementos y propiedades de forma general para los estudiantes chilenos es en 7° año de educación básica, 1° y 2° año de educación media. Donde a medida que se avanza en los niveles se le da mayor énfasis a la utilización de imágenes que requieran el uso de visualización y configuraciones para llevar a cabo el desarrollo de las actividades propuestas.
Luego hay un porcentaje minoritario de estudiantes que siguen con el aprendizaje de matemáticas ingresando a carrera de pedagogía en Educación Media en Matemática para los que se sugieren textos en la bibliografía del programa de la asignatura referida a geometría particularmente estudiaremos los que resumimos a continuación en la tabla 5 frente a los campos de problemas.

Tabla 5*: Resumen campos de problemas presentes en textos categoría III*

		Texto			
		IIIU1	*IIIU2*	*IIIU3*	*IIIU4*
Campos de Problemas	*CP1*	x	x	x	x
	CP2	x	x	x	x
	CP3	x	x	x	x
	CP4	x	x	x	x
	CP5	x	x	x	x
	CP6	x	x	x	x
	CP7	x	x	x	x
	CP8	x	x	x	x
	CP9	x		x	
	CP10				

A diferencia de las categorías I y II, en ésta categoría los textos abordan prácticamente todos los campos de problemas, excepto el Problema de la modelación de situaciones reales (CP9) ausente en IIIU2 y IIIU4.

Como dato curioso, es importante mencionar que estrictamente hablando, si se vuelve a imprimir o divulgar una texto sin cambios se denomina reimpresión; si, por el contrario, sufre algún tipo de modificación sustancial, como ampliaciones, revisiones, correcciones, supresiones, añadidos u otra modificación cualquiera, se denomina nueva edición o reedición y todos los textos seleccionados en ésta categoría son ediciones en las cuales aún no se ha incorporado el uso de Tics, es por esto que respecto al Uso de Tics en la construcción de figuras circulares ***(***CP10) éste campo de problema no se encuentra presente en los textos y los estudiantes independiente que nos encontremos en el año 2018 siguen con una metodología de estudio tradicional heredada la que aún no se acomoda a la tecnología.

Por lo anterior es que a continuación se ha realizado un resumen de los textos analizados en las categorías sobre el nivel en el que son abordados cada uno de estos campos de problemas de acuerdo a los niveles establecidos en la Taxonomía de Bloom.

4.1.3. Análisis de texto a través de la taxonomía de Bloom

Los otros campos de problemas no se ven mayormente observados, por lo que se espera que a medida que los estudiantes avanzan de nivel en la educación chilena puedan ser mayormente desarrollados y abordados. Es por esto que se ha decidido indagar aún más en cada uno de los textos pertenecientes a la categoría I sobre el nivel taxonómico en el que son abordados cada uno de estos campos de problemas presentes de acuerdo a los niveles establecidos en la Taxonomía de Bloom que es detallado en la tabla 6, pero previamente especificaremos los siguientes criterios considerados de acuerdo a lo establecido en la figura 6

Figura 20: Estructura jerárquica de la taxonomía de Bloom

Tabla 6*: Resumen Campos de problemas y nivel de taxonomía en textos categoría I*

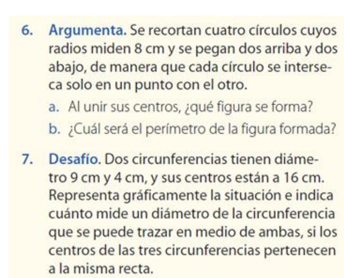
		Campos de Problemas									
Texto Categoría I	*Nivel Taxonómico*	*CP1*	*CP2*	*CP3*	*CP4*	*CP5*	*CP6*	*CP7*	*CP8*	*CP9*	*CP10*
IEB1	Conocimiento		x	x	x	x	x				x
	Comprensión							x			
	Aplicación								x		
	Análisis									x	
	Síntesis										
	Evaluación										

IEB2	Conocimiento							x	x		x
	Comprensión			x		x	x				
	Aplicación									x	
	Análisis										
	Síntesis										
	Evaluación										
IEB3	Conocimiento			x			x				
	Comprensión										
	Aplicación										
	Análisis										
	Síntesis										
	Evaluación										
IEB5	Conocimiento										
	Comprensión										
	Aplicación			x							
	Análisis										
	Síntesis										
	Evaluación										
IEB6	Conocimiento										
	Comprensión							x			
	Aplicación			x		x					
	Análisis									x	
	Síntesis										
	Evaluación										
IEB7	Conocimiento		x				x				
	Comprensión										
	Aplicación			x						x	
	Análisis										
	Síntesis										
	Evaluación										
IEB8	Conocimiento						x				
	Comprensión										
	Aplicación			x		x					x
	Análisis										
	Síntesis										
	Evaluación										

De acuerdo a la tabla 6, los campos de problemas mayormente abordados son los referidos al Problema de las medidas (CP3) y las actividades desarrolladas por los textos sólo se encuentran a nivel de conocimiento y aplicación, seguido del Problema de la distribución de puntos y rectas respecto de la circunferencia (CP6) en donde los ejercicios propuestos están a nivel de conocimiento.

Cabe destacar que referente al Problema de la modelación de situaciones reales (CP9) en IEB1 (texto utilizado en 7° año de educación básica de editorial SM 2018) e IEB6 (texto utilizado en 8° año de educación básica de editorial SM 2017) se encontraron problemas a nivel de análisis, lo cual resulta contradictorio en el sentido de que éstos son ejercicios aislados, de hecho son presentados como "desafíos" que en general quedan a criterio del estudiante su realización frente a una unidad completa que contiene ejercicios en su mayoría de aplicación.
En general los ocho textos estudiados en la primera categoría abordan los conceptos relacionados con la circunferencia, sus elementos y propiedades en los niveles taxonómico más bajos, por lo que podemos resumir que en los textos los conceptos se encuentran presentados mediante definiciones y representaciones en imágenes las que en su mayoría contienen toda la información explícitamente, para luego establecer actividades que requieren de la realización de operatoria algebraica y finalmente obtener un resultado numérico, careciendo de actividades que induzcan al desarrollo de la visualización y el uso de configuraciones y subconfiguraciones.

Como en los ocho textos de la categoría I existe una carencia de los campos de problemas planteados en esta investigación, es que resulta de interés analizar que ocurre con la categoría II referente a algunos los textos utilizados por estudiantes chilenos de educación media frente a la utilización de la visualización y configuraciones.



6. **Argumenta.** Se recortan cuatro círculos cuyos radios miden 8 cm y se pegan dos arriba y dos abajo, de manera que cada círculo se interseca solo en un punto con el otro.
   a. Al unir sus centros, ¿qué figura se forma?
   b. ¿Cuál será el perímetro de la figura formada?
7. **Desafío.** Dos circunferencias tienen diámetro 9 cm y 4 cm, y sus centros están a 16 cm. Representa gráficamente la situación e indica cuánto mide un diámetro de la circunferencia que se puede trazar en medio de ambas, si los centros de las tres circunferencias pertenecen a la misma recta.

Figura 21: Fuente Texto Estudiante de Matemática 7° básico, pág. 205 (IEB2)

Por todo lo anterior es que a continuación en la tabla 7 se encuentra un resumen de los textos analizados en la categoría II frente el nivel taxonómico en el que son abordados cada uno de estos campos de problemas de acuerdo a los niveles establecidos en la Taxonomía de Bloom.

Tabla 7: *Resumen campos de problemas y nivel de taxonomía en textos categoría II*

		Campo de Problema									
Texto Categoría II	*Nivel Taxonómico*	*CP1*	*CP2*	*CP3*	*CP4*	*CP5*	*CP6*	*CP7*	*CP8*	*CP9*	*CP10*
IIEM1	Conocimiento										
	Comprensión										
	Aplicación			x		x		x		x	x
	Análisis										
	Síntesis										
	Evaluación										
IIEM2	Conocimiento										
	Comprensión										
	Aplicación			x				x		x	
	Análisis										
	Síntesis										
	Evaluación										
IIEM3	Conocimiento				x						
	Comprensión					x		x			
	Aplicación										
	Análisis										
	Síntesis										
	Evaluación										
IIEM4	Conocimiento										
	Comprensión										
	Aplicación			x							
	Análisis										
	Síntesis										
	Evaluación										
IIEM5	Conocimiento										
	Comprensión				x						
	Aplicación	x	x	x		x	x				
	Análisis										

	Síntesis										
	Evaluación										
IIEM6	Conocimiento										
	Comprensión										
	Aplicación	x	x	x	x		x				
	Análisis									x	
	Síntesis										
	Evaluación										
IIEM8	Conocimiento										
	Comprensión										
	Aplicación					x					
	Análisis										
	Síntesis										
	Evaluación										
IIEM10	Conocimiento										
	Comprensión										
	Aplicación			x		x				x	
	Análisis										
	Síntesis										
	Evaluación										
IIEM11	Conocimiento										
	Comprensión										
	Aplicación										
	Análisis	x	x	x	x	x	x	x	x		x
	Síntesis										
	Evaluación										

De acuerdo a la tabla 7, en general los textos abordan los conceptos relacionados con la circunferencia a nivel taxonómico de aplicación, lo cual se encuentra en un nivel más alto que la categoría I.

Sólo en IIEM11 de editorial Mc Graw Hill Education año 2012 es donde los ejercicios están a nivel taxonómico de análisis que, si bien, no es el más alto de los niveles de la taxonomía de Bloom, pero si se encuentra por sobre los demás textos analizados, además de presentar ejercicios que requieren la realización de demostraciones por parte de los estudiantes lo que con lleva obligatoriamente a la utilización de visualización y configuraciones para llevar a cabo las situaciones planteadas y obtener los resultados solicitados.

Finalmente de los textos 11 textos analizados en esta categoría podemos indicar que hay una carencia del campo de problema referido al Uso de Tics en la construcción de figuras circulares (CP10) lo que de cierta forma también consideramos que es importante de considerar ya que hoy en día vivimos en un mondo que función a base de tecnología por lo que se esperaría que el tipo de enseñanza y aprendizaje evolucionara de acuerdo a los tiempos para hacer más interesante el aprendizaje para los estudiantes.

A continuación se realiza tabla 8 en la que se considera el nivel taxonómico en el que es abordado cada uno de los campos de problemas establecidos en la categoría III.

Tabla 8*: Resumen campos de problemas y nivel de taxonomía en textos categoría III*

		Campos de Problemas									
Texto Categoría III	*Nivel Taxonómico*	*CP1*	*CP2*	*CP3*	*CP4*	*CP5*	*CP6*	*CP7*	*CP8*	*CP9*	*CP10*
IIIU1	Conocimiento										
	Comprensión										
	Aplicación			x	x	x		x	x	x	
	Análisis						x				
	Síntesis	x	x								
	Evaluación										
IIIU2	Conocimiento										
	Comprensión										
	Aplicación			x				x			
	Análisis				x	x	x		x		
	Síntesis	x	x								
	Evaluación										
IIIU3	Conocimiento										
	Comprensión										
	Aplicación							x	x		
	Análisis					x	x				
	Síntesis	x	x	x	x					x	
	Evaluación										

IIIU4	Conocimiento										
	Comprensión										
	Aplicación				x		x		x		
	Análisis					x		x			
	Síntesis	x	x	x							
	Evaluación										

De los textos podemos indicar que en su mayoría se centran en presentar teoremas, corolarios, definiciones, seguido de una serie de ejercicios propuestos y resueltos, para luego seguir con un listado de actividades en que los estudiantes realicen demostraciones utilizando todos los conceptos desarrollados para la compresión de la unidad.

En particular se ha observado que en su mayoría para IIIU1 los campos de problemas abordados se encuentran a nivel de aplicación, mientras que en IIIU2 es a nivel de análisis. A diferencia de IIIU3 y UUU4, los campos de problemas son abordados a nivel síntesis perteneciendo a los más altos de la taxonomía.

En general los textos presentan una metodología tradicional de aprendizaje la que requiere que los estudiantes tengan un trabajo autónomo en donde sean ellos los principales protagonistas teniendo que recurrir a todo lo estudiado previamente en enseñanza básica y media, incluso de ser necesario investigar o consultar para resolver los ejercicios propuestos los cuales requieren de la utilización de imágenes o de la construcción de ellas, además de visualizar y recurrir a las configuraciones, para la resolución de los problemas.

4.1.4. Análisis de texto a través de los objetos primarios

El EOS ofrece una clasificación de objetos definidas como *situación-problema*, *lenguaje*, *conceptos*, *proposiciones*, *procedimientos* y *argumentos* que en este estudio son utilizadas en el análisis de los 23 textos seleccionados. En particular para este estudio definiremos:

Situación-problema son todas las aplicaciones extra-matemáticas o matemáticas que en el caso de la enseñanza corresponde a las tareas, ejercicios o actividades planteadas que inducen una actividad matemática.

Lenguaje son los términos, expresiones y notaciones que se utilizan para representar los datos del problema, las operaciones realizadas con ellos, los objetos matemáticos utilizados y la solución encontrada. En nuestro estudio serán los términos, expresiones y notaciones matemáticas utilizadas en el trabajo con la circunferencia (∟ ángulo recto, ∡ ángulo, ⊥ perpendicular, , ∥ paralelo, etc…) así como los términos específicos de sus elementos (cuerda, radio, diámetro, recta tangente, recta secante, ángulo inscrito, ángulo circunscrito, entre otras) y finalmente las representaciones de cada una de ellas.

Conceptos son evocados implícita o explícitamente por el estudiante cuando realiza una acción con la intención de resolver la situación o problema planteado. Vienen especificados por su definición en el tema y de ser necesario el estudiante habrá de recordar si se refiere a conceptos iniciales (como por ejemplo ángulo) o asimilar si se trata de conceptos nuevos (como recta tangente a una circunferencia).

P*roposiciones o propiedades* son los enunciados que se realizan sobre el objeto matemático y las relaciones de este objeto con otros lo que producirá un enriquecimiento en su significado. Un ejemplo en este estudio es “En todo cuadrilátero inscrito en un circunferencia, los ángulos opuestos son suplementarios”

P*rocedimientos* son el conjunto de operaciones, algoritmos, técnicas de cálculo, que permiten resolver la tarea propuesta y que llegan a automatizarse para tipos específicos de problemas. En nuestro caso podemos destacar la predicción de acuerdo a la representación en la circunferencia como por ejemplo “la medida de todo ángulo semi-inscrito en una circunferencia es igual la mitad del arco que lo determina”.

Argumentos son los enunciados emitidos para validar o explicar los resultados obtenidos, o propiedades utilizadas en el transcurso de la resolución, así como las propiedades o teoremas introducidos por el profesor. Por ejemplo teorema de un ángulo inscrito, teorema de ángulos en la circunferencia, ángulo interior de una circunferencia, ángulo exterior de una circunferencia, entre otros.

Las relaciones que se establecen en la enseñanza y aprendizaje o en la solución de problemas entre varios de estos elementos primarios, dan lugar a entidades más complejas, que el EOS denomina *configuraciones* y es por ello que indaga sobre su presencia en los textos seleccionados para cada objeto primario y así se desarrolla la tabla 9 que resume lo anteriormente mencionado para cada una de las categorías.

Tabla 9*: Resumen análisis de texto a través de los objetos primarios*

Categoría	Texto	Lenguaje	Concepto	Propiedades	Procedimientos	Argumentos
I	IEB1	x	x	x	x	x
	IEB2	x	x	x	x	x
	IEB3	x	x			
	IEB4	-	-	-	-	-
	IEB5	x	x			
	IEB6	x	x			
	IEB7	x	x	x	x	
	IEB8	x	x	x	x	x
II	IIEM1	x	x	x	x	x
	IIEM2	x	x	x	x	x
	IIEM3	x	x			
	IIEM4	x	x			
	IIEM5	x	x	x	x	x
	IIEM6	x	x	x	x	x
	IIEM7	-	-	-	-	-
	IIEM8	x	x			
	IIEM9	-	-	-	-	-
	IIEM10	x	x			
	IIEM11	x	x	x	x	x
III	IIIU1	x	x	x	x	x
	IIIU2	x	x	x	x	x
	IIIU3	x	x	x	x	x
	IIIU4	x	x	x	x	x

En general se observa que los textos estudiados tanto para la categoría I y II abordan el lenguaje en forma de símbolos e imágenes y los conceptos aparecen como definiciones aisladas (radio, diámetro, cuerda, etc...) dentro de su propuesta como apoyo al aprendizaje en la educación chilena. Además en ambas categorías carecen de propiedades, procedimientos y argumentos.

Particularmente los Textos IEB1, IEB2 de séptimo año básico y IEB8 de octavo año básico de la categoría I pertenecen a la misma editorial SM y cuentan con la presencia de todos los objetos primarios, mientras que para la categoría II los textos que reúnen estas características pertenecen a editoriales variadas por ejemplo en IIEM1 (Editorial SM) y IIEM2 (Editorial Santillana) ambos para primer año de educación media, IIEM5 (Editorial SM), IIEM6 (Editorial Santillana) abordados en segundo año de educación media y IIEM11 (Mc Graw Hill Education) que es un caso particular de texto utilizado en una institución particular pagada en toda la educación media.

Todo lo anterior se contrapone con los textos de la categoría III utilizados por los FPM dentro de los textos sugeridos a la asignatura de geometría plana encontramos que todos los textos estudiados abordan los objetos primarios.

4.1.5. Análisis de texto a través de los objetos visuales primarios

En esta investigación la visualización también será analizada desde el punto de vista de los objetos primarios que plantea el EOS por lo que para indagar su presencia se sigue una tipología de Objetos Visuales Primarios propuesta por Godino y Cajaraville (2012) que ha sido adecuada al objeto de estudio de esta investigación referido a la circunferencia, elementos y propiedades que definimos a continuación.

Lenguaje Visual: Se trata de los medios de comunicación icónica, indexical y diagramática de la forma y de la posición relativa de objetos en el plano o que representa la estructura de sistemas conceptuales. Para esta investigación lo definiremos como sigue*:*

- *Lenguaje Icónico (LI):* fotografías, pictogramas, planos, mapas,…

- *Lenguaje Diagramático (LD):* diagrama, esquemas, croquis,…

- *Lenguaje manipulativo (LM)*: artefactos, regla, compás, transportador,…

Conceptos visuales: Se entiende por concepto a un invariante o entidad cuyo significado es fijado por una definición o regla. En el estudio de la geometría es necesario distinguir entre:

- *Conceptos de representación material (CRM):* dibujo, imagen, modelos bi-dimensionales

- *Conceptos de representaciones figurales (CRF)*: circunferencia, cuadrilátero, polígono,…

Propiedades Visuales: Se trata de relaciones entre conceptos expresados mediante proposiciones (esto es, enunciados cuya verdad o falsedad se debe establecer). Algunos tipos de proposiciones visuales o propiedades que intervienen en la solución de tareas visuales y se expresan en lenguaje visual:

- *Propiedades de los procedimientos visuales (PPV)*: por ejemplo ángulos que los subtiende un mismo arco son congruentes.

- *Propiedades del lenguaje visual utilizado (PLV)*: por ejemplo dos circunferencias son concéntricas si tienen el centro en común.

- *Propiedades de los conceptos visuales (PCV)*: por ejemplo el radio mide la mitad del diámetro.

Procedimientos u Operaciones Visuales: La siguiente relación incluye tipos básicos de operaciones. Procedimientos o técnicas que se consideran visuales:

- *Proyectar* representaciones en el plano (PRP), seccionar, trasladar, deslizar,….

- *Construir* representaciones planas (CRP) de la circunferencia, elementos y polígonos inscritos y circunscritos

- *Transformar* representaciones (TR) visuales mediante descomposición y recomposición de figuras
- *Representar* gráficamente relaciones (RGR) en la circunferencia

Argumentos o Justificaciones Visuales: La elaboración de un discurso justificativo de las proposiciones y de los procedimientos requerirá según el caso de:

- *Argumentación Deductiva Formal* (ADF) (discurso analítico que evoque las definiciones y teoremas previamente establecidos)

- *Argumentación Deductiva Informal* (ADI)(Presentación del objeto material correspondiente si se trata de "propiedades" de naturaleza empírica)

Luego procedemos al análisis de la presencia o ausencia de los objetos visuales primarios en los textos seleccionados partiendo por el lenguaje que se describe en la tabla 10 que presentamos a continuación.

Tabla 10*: Resumen objetos visuales primarios presentes en los textos seleccionados*

Categoría	Texto	Lenguaje			Concepto		Propiedades			Procedimientos				Argumentos	
		LI	LD	LM	CRM	CRF	PPV	PLV	PCV	PRP	CRP	TR	RGR	ADF	ADI
I	IEB1	x	x	x	x	x	x	x	x		x		x		x
	IEB2	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x		x		x
	IEB3	x		x		x									
	IEB4	x	x	x		x									
	IEB5	x													
	IEB6	x				x									
	IEB7	x	x	x	x	x					x		x		
	IEB8	x	x		x	x			x		x				
II	IIEM1	x			x	x	x	x	x		x		x		
	IIEM2	x	x	x		x	x		x		x		x		x
	IIEM3	x		x		x									

	IIEM4	x	-	-		x									
	IIEM5	x	x		x	x	x	x	x		x		x		x
	IIEM6	x	x	x	x	x	x	x	x		x		x	x	
	IIEM7	-	-	-											
	IIEM8	x			x	x									
	IIEM9	-	-	-											
	IIEM10	x			x	x									
	IIEM11	x		x		x	x	x	x		x	x	x	x	
III	IIIU1	x	x	x	x	x	x	x	x		x		x	x	
	IIIU2	x		x		x	x	x	x		x		x	x	
	IIIU3	x	x	x	x	x	x	x	x		x		x	x	
	IIIU4	x		x		x	x	x	x		x		x	x	

Como mencionábamos en la descripción de la tabla 9 los textos abordan como objeto primario el lenguaje y los conceptos principalmente es sólo en algunos textos que se puede encontrar procedimientos , propiedades y argumentos, por lo que decidimos indagar aún más y ver como son abordados a nivel de visualización lo cual se encuentra resumido en la tabla 10.

En general el lenguaje es trabajado como lenguaje icónico (LI) (presentado con una imagen) y manipulativo (LM) (con la utilización de regla y compás para generar figuras). Los conceptos (CRF) son representados a través de figuras apoyados en el lenguaje icónico, al igual que las propiedades de los procedimientos visuales (PPV) y Propiedades de conceptos visuales (PCV). Los procedimientos utilizados son de Construcción de representación plana (CRP) y Representación Gráfica de relaciones (RGR).

Para la Argumentación tenemos evidencia que se favorece a la Argumentación deductiva informal (ADI) presentando mucho apoyo en las propiedades de naturaleza empírica, sólo en los textos utilizados por los FPM a nivel universitario es que se trabajan la argumentación formal

Todo lo anterior evidencia una fuerte tendencia al apoyo netamente en la imagen como tal a la cual le atribuyen procedimientos, propiedades y argumentos, existiendo una carencia del desarrollo de Argumentación formal.

4.2. Análisis de los resultados del instrumento de evaluación

4.2.1. Aplicación Instrumento de evaluación

Para el análisis nos centraremos en las respuestas generadas por 47 futuros profesores de matemática que rinden la actividad evaluativa quienes han accedido a dar su consentimiento para el análisis de las respuestas generadas para la actividad evaluativa. De los 6 ítems que contempla, sólo nos centraremos en el estudio de 2 ítems en particular, correspondiente al Ítem 2 e Ítem 3, esto debido a que consideramos son dos casos representativos diferentes de visualización ya que uno presenta después del enunciado con toda la información una imagen como apoyo para su desarrollo, en cambio el otro ítem es necesario que el futuro profesor de matemática sea quien a través de su lectura del enunciado sea capaz de generar un bosquejo y elaborar todo el proceso deductivo para generar la respuesta a la actividad evaluada planteada, pero de todas formas previamente daremos una mirada general de la distribución de respuestas generadas por los futuros profesores de matemática.

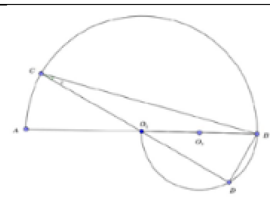
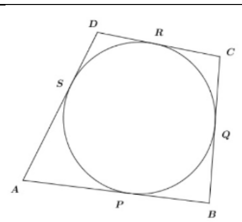
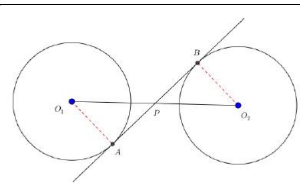
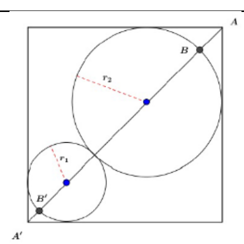
4.2.2. Distribución de respuestas por ítem

En primera instancia se observa en la tabla 11 el número de respuestas generadas a cada ítem por los futuros profesores de matemática, lo que permite tener una visión general del nivel de complejidad que presentó cada uno de ellos.

Globalmente se puede señalar que el instrumento evaluativo ha resultado complejo para los futuros profesores de matemática teniendo en cuenta que no fueron alcanzados los objetivos mínimos planteados para cada actividad evaluada y el bajo porcentaje de respuestas correctas asociadas a cada uno de los ítem . El ítem 2 es el que se encuentra mejor logrado obteniendo sólo un 38,29% de respuestas acertadas, seguido del ítem 3 con un 29,78%. El ítem 6 fue el que obtuvo menor cantidad de respuestas acertadas, lo que a su vez es preocupante porque todas las actividades planteadas cumplen con el nivel exigido para la asignatura de geometría plana y por ende se esperaba un mejor resultado.

Todo lo anterior motiva a un análisis de cómo están desarrollando las actividades evaluadas, las relaciones que puedan establecerse, el uso de configuraciones asociadas, cuáles son los errores y posibles conflictos que impiden la adecuada realización de la actividad.

Tabla 11*: Distribución de aciertos y errores por ítem de las actividades evaluadas*

Ítem	Dibujo	Respuesta correcta	%	Responde medianamente	%	Responde incorrectamente	%	No responde	%
1	debe ser identificado por el FPM	8	17,02%	20	42,55%	18	38,29%	1	2,12%
2		18	38,29%	16	34,04%	8	17,02%	5	10,63%
3	Debe ser construido por el FPM	14	29,78%	7	14,89%	14	29,78%	12	25,53%
4		13	27,65%	4	8,51%	5	10,63%	25	53,19%
5		5	10,63%	15	31,91%	6	12,76%	21	44,68%
6		2	4,25%	0	0%	6	12,76%	39	82,97%

Si bien el ítem 2 sobresale con un 38,29% de respuestas correctas, aun así no alcanza a ser ni la mitad del total de futuros profesores que rindieron la actividad evaluada, mientras que por otro extremo está el ítem 6 que sólo alcanza a un 4,25% de futuros profesores de matemática que responden correctamente, quedando en evidencia el alto porcentaje de los futuros profesores de matemática que responde incorrectamente alcanzando un 29,78% en el ítem 1 y 3 respectivamente, o simplemente no da respuesta a la actividad evaluada llegando al 82,97% para el ítem 6, al 53,19% para el ítem 4 y 44,68% en el ítem 5, por ende no logra cumplir con los objetivos mínimos propuestos para el curso de geometría plana.

En consecuencia nos centramos en el análisis de los ítem 2, 3 para esta investigación y es por esto que se realizará un detalle de los objetos visuales primarios utilizados en la realización de estas actividades para cada uno de los ítems mencionados y estimar si es que hay información que nos permita tener una mirada de las razones que impiden llevar a cabo la actividad o aquellas características que ayudan a que los estudiantes logren terminar de forma correcta los ejercicios.

4.2.3. Procesamiento epistémico asociado a la resolución de los problemas en el instrumento por ítems

En ésta sección se realizará el análisis de los tipos de objetos y relaciones puestos en juego en la resolución de una actividad evaluada por parte de los futuros profesor de matemática.

En primer lugar platearemos cada ítems, daremos la solución experta y luego ésta configuración se utilizará como referencia para estudiar las configuraciones utilizadas por los futuros profesores de matemática, se identificarán los objetos primarios como lenguaje, conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos además de observar la presencia o ausencia de la visualización lo que equivale en el marco del EOS a elaborar la configuración epistémica asociada a la resolución de problema. Para facilitar la lectura al ítem 2 lo llamaremos A y al ítem 3 será B

Análisis Ítem A

En la figura O_1y O_2 son centros de dos semi circunferencias y el $\measuredangle ABD$ mide 35°, ¿Cuánto mide el $\measuredangle DCB$?

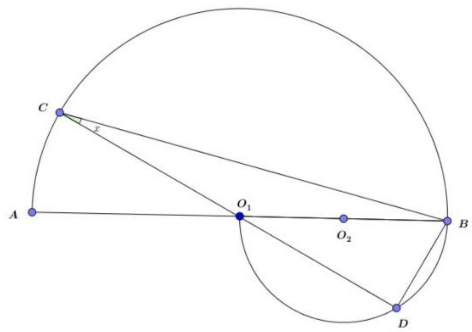


Figura 22: Enunciado sobre dos semi circunferencias

Solución experta

La solución del problema llamado experto en la tabla 12 está presentada bajo el modelo de afirmación y razón que puede ser encontrada en los textos Moise Downs y Mercado Shuler que también fueron analizados para esta investigación.

Tabla 12*: Solución experta ítem A*

Afirmación	**Razón**
1) $m\measuredangle ABD = 35°$	Información del enunciado
2) $\triangle\ O_1DB$ es rectángulo en D	Si un lado del triángulo inscrito en una semi circunferencia pasa por el diámetro de ésta, forma un triángulo rectángulo
3) $m\measuredangle BO_1D = 55°$	por 1), 2) y la suma de todos los ángulos interiores de un triángulo es 180°
4) $m\measuredangle BO_1D = m\measuredangle CO_1A = 55°$	los ángulos opuestos por el vértice tienen igual medida

5) $m\widehat{CA} = 55°$	La medida de un ángulo del centro de la circunferencia es igual a la medida del arco que lo subtiende
6) $m\measuredangle ABC = \frac{m\widehat{CA}}{2} = 27{,}5°$	Un ángulo inscrito en una circunferencia es la mitad del arco que lo subtiende
7) $\overline{O_1B} \cong \overline{O_1C}$	Ambos segmentos son radios de la semi circunferencia con centro O_1
8) $\triangle\ O_1BC$ es isósceles	por 7)
9) $m\measuredangle O_1CB = m\measuredangle O_1BC = 27{,}5°$	$\triangle\ O_1BC$ es isósceles

Objetos Visuales y relaciones primarias

A continuación se realizará un análisis de las configuraciones puestas en juego para a resolución del ítem 2 siguiendo a lo expresado por la solución experta a modo de ejemplo para que sea más fácil la compresión de los análisis posteriores.

Lenguaje: icónico ya que la figura es presentada explícitamente

Concepto: figurales, representados por medio del lenguaje visual como "triángulo", "triángulo inscrito", "triángulo rectángulo".

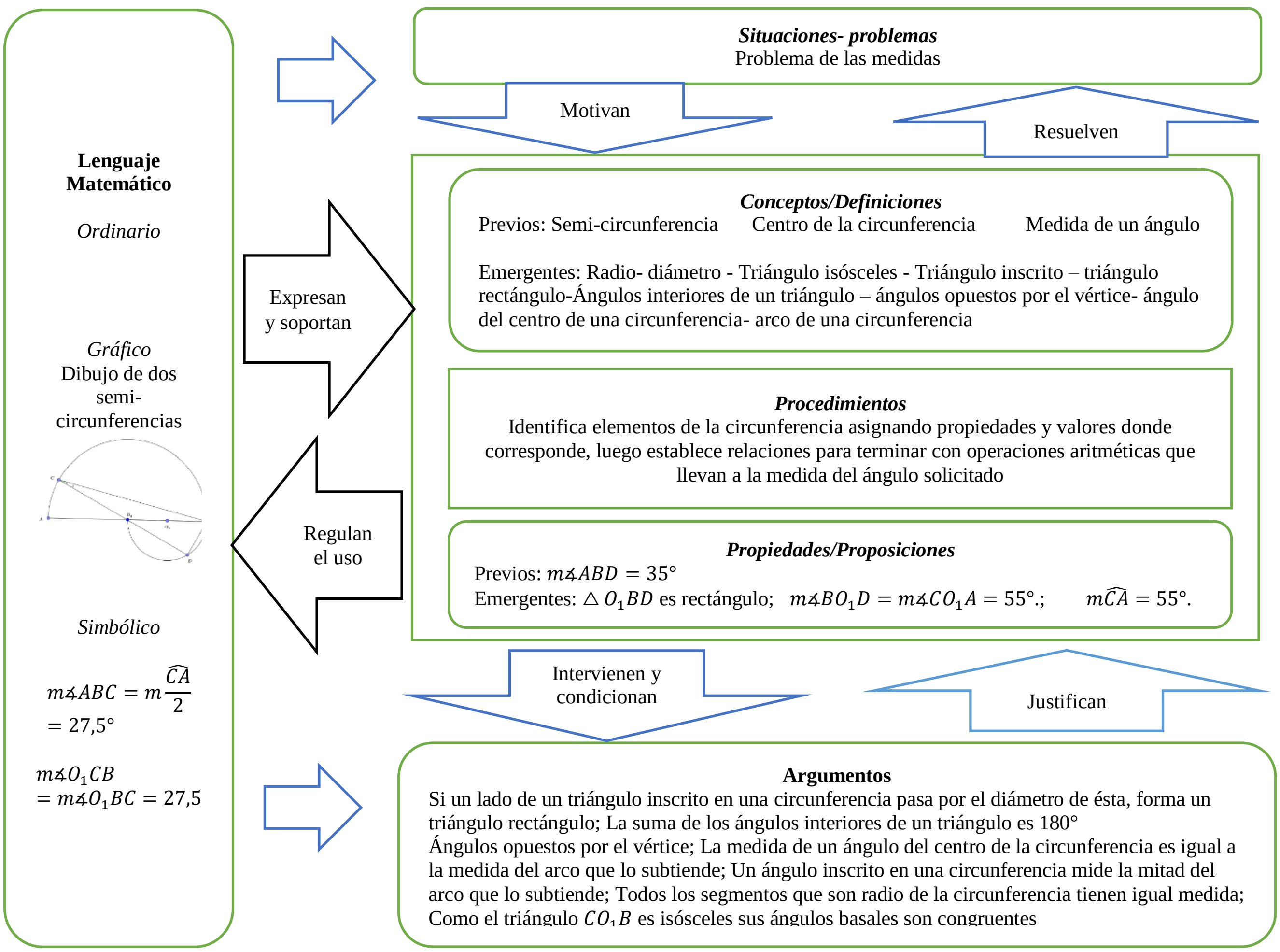
Proposición: Propiedades de los conceptos visuales como "$m\measuredangle ABD = 35°$", "$\triangle\ O_1DB$ es rectángulo en D",",$\overline{O_1B} \cong \overline{O_1C}$, $\triangle\ O_1BC$ es isósceles ,

Procedimientos: "$m\measuredangle BO_1D = m\measuredangle CO_1A = 55°$", "$m\widehat{CA} = 55°$", "$m\measuredangle ABC = \frac{m\widehat{CA}}{2} = 27{,}5°$", " $m\measuredangle O_1CB = m\measuredangle O_1BC = 27{,}5°$"

Argumentación: Argumentación Deductiva "Si un lado del triángulo inscrito en una semi circunferencia pasa por el diámetro de ésta, forma un triángulo rectángulo", "La medida de la suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180°" , "los ángulos opuestos por el vértice tienen igual medida", "La medida de un ángulo del centro de la circunferencia es igual a la medida del arco que lo subtiende", "Un ángulo inscrito en una semi circunferencia mide la mitad del arco que lo subtiende"

Por otro lado la información experta se puede representar las configuraciones a través de los objetos primarios como se muestra en el esquema 6:

Esquema 6: Configuraciones establecidas a través de la solución experta



El esquema de la configuración epistémica del cuadro anterior tiene por objeto visualizar la red de relaciones entre los distintos tipos de objetos primarios. Siguiendo a Fernandez, Godino y Cajaraville (2012), el lenguaje constituye el soporte de expresión de todas las demás entidades, ayudando a hacer ostensivos los restantes objetos puestos en juego en la resolución del problema planteado. Las situaciones promueven la actividad matemática que moviliza relacionalmente los conocimientos previos y hace emerger potencialmente conocimientos nuevos. Los argumentos deben explicar y validar las propiedades y procedimientos puestos en juego.

Es por todo lo anterior que en una primera instancia se presta atención a los procedimientos y respuestas generadas por los futuros profesores de matemática sobre los que se apoyan y son puestos en juego en la resolución de cada ítem en términos de configuraciones cognitivas asociadas a la tipología de respuestas presentes en el ítem A, donde se han identificado manera general 4 tipos de configuraciones cognitivas que se detallan a continuación:

Tipos de configuraciones asociadas al Ítem A

Del análisis de las respuestas de los FPM se pueden identificar cuatro tipos de configuraciones cognitivas que pasamos a describir.

Configuración Cognitiva 1 ítem A (CC1IA) Configuración deductiva.

Este tipo de configuración se basa en tener claro los conceptos de semi circunferencia, centro de la circunferencia y medida de un ángulo lo que da pie asignar valores y medidas tanto a los ángulos como arcos presentes, todo esto apoyado de la imagen que permite ir estableciendo relaciones con conceptos como Diámetro de una circunferencia, Ángulo inscrito en una circunferencia, Ángulos interiores de un triángulo, Suplemento de un ángulo y Arco de una circunferencia que emergen y se apoya de propiedades fundamentado con argumentos que son abordados efectivamente lo que le permite llegar a terminar la resolución del problema de manera correcta. El centro de atención está en la figura que permite ir deduciendo y argumentando.

A continuación se presenta una imagen con la respuesta entregada por uno de los futuros profesores de matemática al ítem A planteado, donde logra llegar a lo solicitado de manera correcta la configuración cognitiva 2:

En la figura O_1y O_2 son centros de dos semi circunferencias y el $\measuredangle ADB$ mide 35°. ¿Cuánto mide el $\measuredangle DCB$?

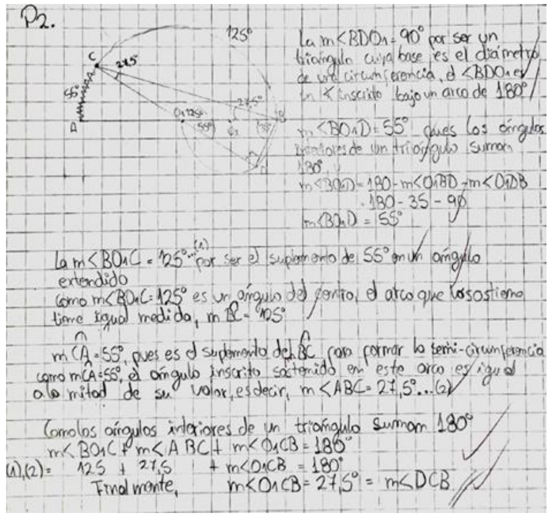


Figura 23: Respuesta generada por FPC a la CC1IA

De acuerdo a la información presente en la respuesta generada por el futuro profesor de matemática es que a continuación se realizará un esquema de configuración epistémica tienen por objeto visualizar la red de relaciones entre los distintos tipos de objetos primarios

Objetos y relaciones primarias

Lenguaje: icónico ya que la figura es presentada explícitamente

Concepto: figurales, representados por medio del lenguaje visual como "triángulo"

Proposición: Propiedades de los conceptos visuales como "$m\measuredangle BDO_1 = 90°$", "$m\measuredangle BO_1D = 55°$", "$m\measuredangle BO_1C = 125°°$

Procedimientos: "$m\measuredangle BO_1D = 180° - m\measuredangle O_1BD - m\measuredangle O_1DB = 180° - 35° - 90° = 55°$", "$m\widehat{CA} = 55°$", "$m\measuredangle BO_1C + m\measuredangle ACB + m\measuredangle O_1CB = 180°$", "$125° + 27{,}5° + m\measuredangle O_1CB = 180°$", "$m\measuredangle O_1CB = 27{,}5°$"

Argumentación: Argumentación Deductiva "por ser un triángulo cuya base es el diámetro de una circunferencia, el $\measuredangle BDO_1$ es un ángulo inscrito bajo el arco de 180°", "Los ángulos interiores de un triángulo suman 180°","El suplemento de 55° en un ángulo", "en un ángulo del centro, el arco que lo sostiene tiene igual medida", "el ángulo inscrito sostenido en este arco es igual a la mitad de su valor"

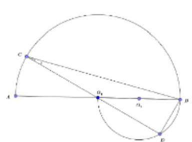
En el esquema 7 resumimos los objetos y relaciones primarias que ha puesto en juego uno de los futuros profesores de matemática en la resolución del problema planteado.

Esquema 7: Objetos y relaciones primarias puestas en juego por el FPM a la CC1IA

Lenguaje Matemático

Ordinario

Gráfico (icónico)



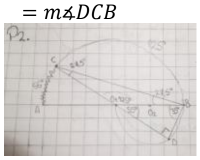
Simbólico

Como los ángulos interiores de un triángulo suman 180°

$m\measuredangle BO_1C + m\measuredangle ABC + m\measuredangle O_1CB = 180°$

$125° + 27{,}5° + m\measuredangle O_1CB = 180°$

$m\measuredangle O_1CB = 27{,}5° = m\measuredangle DCB$



Expresan y soportan

Regulan el uso

Situaciones- problemas
Problema de las medidas
Problema de los ángulos inscritos y circunscritos

Motivan

Resuelven

Conceptos/Definiciones

Previos: Semi-circunferencia-Centro de la circunferencia-Medida de un ángulo

Emergentes: Diámetro de una circunferencia- Ángulo inscrito en una circunferencia- Ángulos interiores de un triángulo- Suplemento de un ángulo- Arco de una circunferencia

Procedimientos

Como un lado de un triángulo inscrito en la semi circunferencia pasa por el diámetro este es rectángulo, por lo que se le asigna medida al ángulo $\measuredangle BDO_1$ de 90°

Se le asigna medida a $\measuredangle BO_1D = 55$ pues la suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180°

La medida de $\measuredangle BO_1C = 125°$ por ser el suplemento de un ángulo

Propiedades/Proposiciones

Previos :Los ángulos suplementarios suman 180°, La medida de un ángulo del centro de la circunferencia es igual a la medida del arco que lo subtiende, La medida de un ángulo inscrito en una circunferencia mide la mitad del arco que lo subtiende

Emergentes : $m\measuredangle BDO_1 = 90°$, $m\measuredangle BO_1D = 55°$, $m\measuredangle BO_1C = 125°$

Intervienen y condicionan

Justifican

Argumentos

Por ser un triángulo cuya base es el diámetro de una circunferencia

Los ángulos interiores de un triángulo suman 180°

Por ser el suplemento de un ángulo de 55°

Como $m\measuredangle BO_1C = 125°$ es un ángulo del centro, el arco que lo subtiende tiene igual medida, $m\widehat{BC} = 125°$

$m\widehat{CA} = 55°$, pués el suplemento de $m\widehat{BC}$ para formar la semi circunferencia y el ángulo inscrito sostenido en este arco es igual a la mitad de su valor, es decir $m\measuredangle ABC = 27{,}5°$

Configuración cognitiva 2 ítem A (CC2IA) Configuración informal apoyado de la imagen

Este tipo de configuración consiste en asignar medidas al $\measuredangle O_1DB$ y $\measuredangle O_1BD$ Luego por la adición de ángulos de un triángulo encuentra el valor del ángulo restante. Se debe considerar también los ángulos opuestos por el vértice y que la medida del ángulo del centro de una circunferencia es igual a la medida del arco que lo subtiende, como también que la medida de un ángulo inscrito en la circunferencia es la mitad de la medida del arco que lo subtiende.

El centro de atención está en la figura que permite ir deduciendo, pero se carece de propiedades y argumentación de manera ostensiva.

A continuación se presenta en la figura 24 la respuesta generada por uno de los FPM.

En la figura O_1y O_2 son centros de dos semi circunferencias y el $\measuredangle ADB$ mide 35°. ¿Cuánto mide el $\measuredangle DCB$?

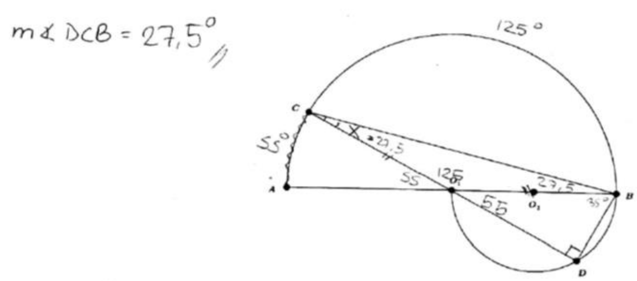


Figura 24: Respuesta generada por el FPM a la CC2IA

Objetos y relaciones primarias

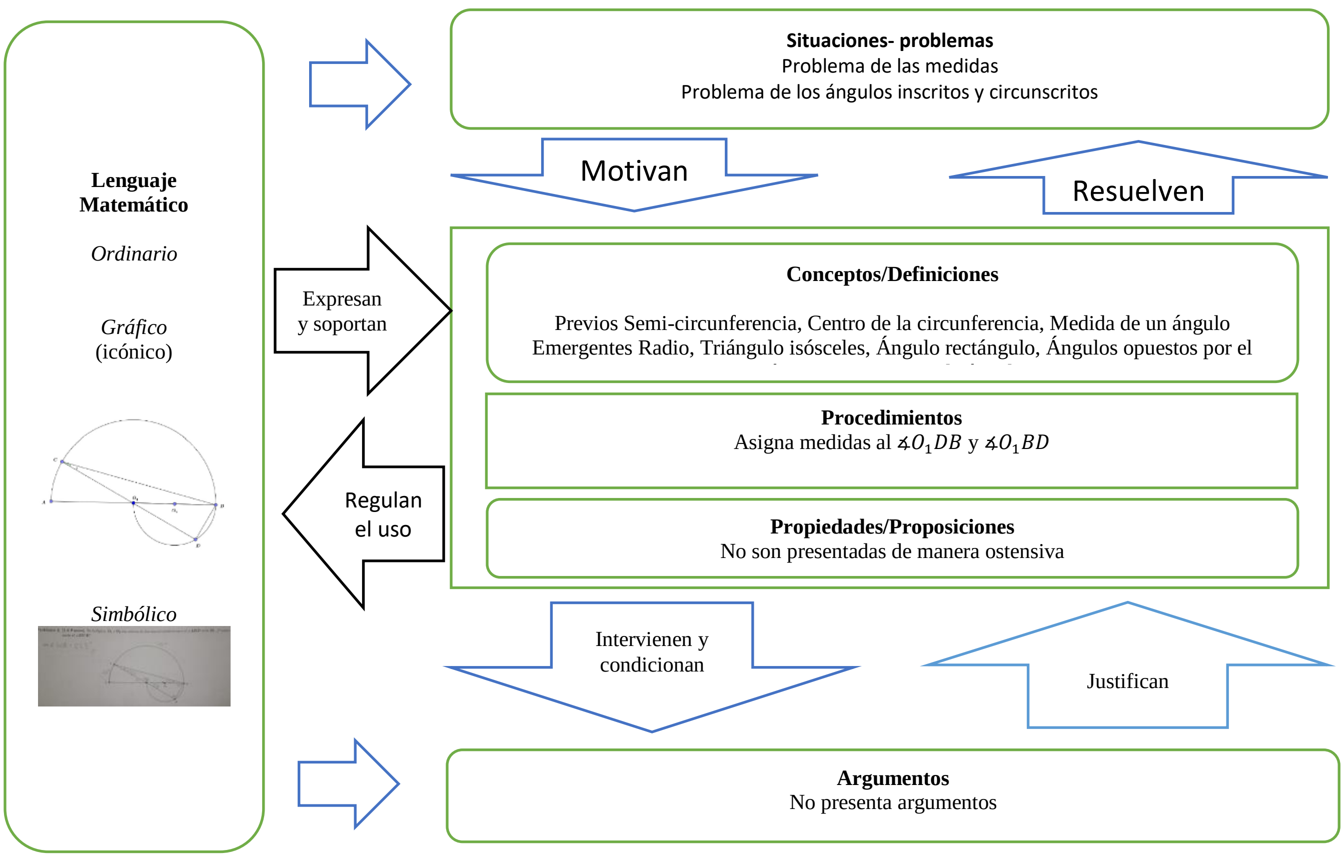
Lenguaje: icónico ya que la figura es presentada explícitamente

Concepto: figurales, representados por medio del lenguaje visual como “triángulo”

A continuación en la figura 24 se presenta la respuesta entregada por uno de los futuros profesores de matemática al ítem A planteado, donde solamente con la utilización de la figura como apoyo logra llegar a lo solicitado de manera correcta

En el esquema 8 resumimos los objetos y relaciones primarias que ha puesto en juego uno de los futuros profesores de matemática en la resolución del problema planteado.

Esquema 8: Objetos y relaciones primarias puestas en juego por el FPM a la CC2IA



En este caso el futuro profesor de matemática no presenta evidencia de las proposiciones y argumentos utilizados forma explícita, pero de acuerdo a como se apoya en la imagen, podemos inferir que asigna medidas al $\measuredangle O_1DB$ y $\measuredangle O_1BD$ Luego por la adición de ángulos de un triángulo encuentra el valor del ángulo restante. Posteriormente considera ángulos opuestos por el vértice y asume que la medida del ángulo del centro de una circunferencia es igual a la medida del arco que lo subtiende, de ahí considera que la medida de un ángulo inscrito en la circunferencia es la mitad de la medida del arco que lo subtiende. Finalmente trabaja con la medida de ángulos suplementarios para encontrar la medida de $\measuredangle CO_1B$, lo que permite concluir que la suma de los ángulos interiores de un triángulo es $180°$ por lo que la m$\measuredangle O_1CB$ es $27{,}5°$ que es el valor que se buscaba para dar solución al problema planteado.

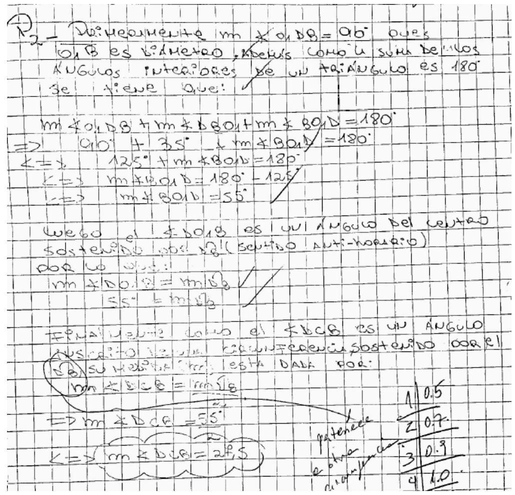
Configuración cognitiva 3 ítem A (CC3IA): Configuración con errores en propiedades establecidas.

Esta configuración se basa en conceptos de semi circunferencia, centro de la circunferencia y medida de un ángulo lo que da pie asignar valores y medidas tanto a los ángulos como arcos presentes apoyado de la imagen que permite ir estableciendo relaciones entre conceptos como diámetro de una circunferencia, ángulos interiores de un triángulo, ángulo inscrito en una circunferencia y arco de una circunferencia que emergen del apoyo con la figura, pero surge un detalle al atribuir propiedades a la $m\measuredangle DCB$ por considerarlo un ángulo inscrito en la circunferencia contenido en el arco $\widehat{DB}$ sin considerar que se trata de dos semi circunferencias diferentes. Error que impide llegar a la respuesta correcta

El centro de atención está en la figura presentada en el problema planteado, pero no se considera de forma clara las propiedades establecidas.

A continuación se presenta la figura 25 con la respuesta entregada por uno de los futuros profesores de matemática al CC3IA planteado, que si bien gran parte de lo realizado es correcto no logra llegar a lo solicitado.

En la figura O_1y O_2 son centros de dos semi circunferencias y el $\measuredangle ADB$ mide 35°. ¿Cuánto mide el $\measuredangle DCB$?



P2 – Primeramente $m\measuredangle O_1DB = 90°$ pues $\overline{O_1B}$ es diámetro, además como la suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180° se tiene que:

$m\measuredangle O_1DB + m\measuredangle DBO_1 + m\measuredangle BO_1D = 180°$

$\Rightarrow 90° + 35° + m\measuredangle BO_1D = 180°$

$\Leftrightarrow 125° + m\measuredangle BO_1D = 180°$

$\Leftrightarrow m\measuredangle BO_1D = 180° - 125°$

$\Leftrightarrow m\measuredangle BO_1D = 55°$

Luego el $\measuredangle DO_1B$ es un ángulo del centro sostenido por $\widehat{DB}$ (sentido anti-horario) por lo que:

$m\measuredangle DO_1B = m\widehat{DB}$

$55° = m\widehat{DB}$

Finalmente como el $\measuredangle DCB$ es un ángulo inscrito de una circunferencia sostenido por el $\widehat{DB}$ su medida está dada por:

$m\measuredangle DCB = \frac{m\widehat{DB}}{2}$

$\Rightarrow m\measuredangle DCB = \frac{55°}{2}$

$\Leftrightarrow m\measuredangle DCB = 27,5$

pertenece a otra circunferencia

1	0.5
2	0.7
3	0.9
4	1.0

Figura 25: Respuesta generada por el FPM a la CC3IA

De acuerdo a la información presente en la respuesta generada por el futuro profesor de matemática es que a continuación se realizará un esquema de configuración epistémica tienen por objeto visualizar la red de relaciones entre los distintos tipos de objetos primarios

Objetos y relaciones primarias

Lenguaje: icónico ya que la figura es presentada explícitamente

Concepto: figurales, representados por medio del lenguaje visual como "triángulo"

Proposición: Propiedades de los conceptos visuales como "$m\measuredangle O_1DB = 90°$", "$\overline{O_1B}$ es diámetro", "$\measuredangle DO_1B$ es un ángulo del centro", "$\measuredangle DCB$ es un ángulo inscrito de una circunferencia.

Procedimientos: "$m\measuredangle O_1DB + m\measuredangle DBO_1 + m\measuredangle BO_1D = 180°$", "$90° + 35° + m\measuredangle BO_1D = 180°$", "$m\measuredangle BO_1D = 180° - 125°$", "$m\measuredangle BO_1D = 55°$", "$m\measuredangle DCB = \frac{55°}{2} = 27,5°$"

Argumentación: Argumentación Deductiva "$\overline{O_1B}$es diámetro", "La suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180°", "$\measuredangle DO_1B$ es un ángulo del centro sostenido por $\widehat{DB}$(sentido anti horario)".

En el esquema resumimos los objetos y relaciones primarias que ha puesto en juego uno de los futuros profesores de matemática en la resolución del problema planteado.

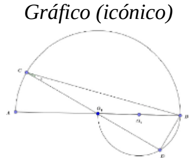
Esquema 9: Objetos y relaciones primarias puestas en juego por el FPM a la CC3IA

Lenguaje Matemático

Ordinario

Sentido anti-horario
Ángulo del centro sostenido

Gráfico (icónico)



Simbólico

$\measuredangle, \overline{CO_1}, =, °\widehat{AB}$
$m\measuredangle O_1DB + m\measuredangle DBO_1 + \measuredangle BO_1D = 180°$
$90° + 35° + \measuredangle BO_1D = 180°$
$125° + \measuredangle BO_1D = 180°$
$\measuredangle BO_1D = 180° - 125°$
$\measuredangle BO_1D = 55°$
$m\measuredangle DO_1B = m\widehat{DB}$
$55° = m\widehat{DB}$

Procedimiento erróneo (arco pertenece a otra circunferencia)

$m\measuredangle DCB = \frac{m\widehat{DB}}{2}$
$m\measuredangle DCB = \frac{55°}{2}$
$m\measuredangle DCB = 27{,}5°$

Expresan y soportan

Regulan el uso

Situaciones- problemas
Problema de las medidas
Problema de los ángulos inscritos y circunscritos

Motivan

Resuelven

Conceptos/Definiciones
Previos Semi-circunferencia, Centro de la circunferencia, Medida de un ángulo

Emergentes Radio, Triángulo isósceles, Triángulo inscrito, Ángulos interiores de un

Procedimientos

Asignar nombres cada ángulo y relacionarlo con las medidas
Se establece una ecuación que permite encontrar la medida a uno de los ángulos buscados.

Luego se vuelve a asignar una igualdad, entre la medida de un ángulo y un arco, pero el arco asignado pertenece a otra circunferencia por lo que no corresponde a la propiedad utilizado

Propiedades/Proposiciones

Previos La suma de ángulos interiores de un triángulo es 180°
Emergentes la medida del ángulo ODB es de 90°
$\measuredangle DBO_1$ es un ángulo del centro de la circunferencia

Intervienen y condicionan

Justifican

Argumentos
La medida del ángulo O_1DB=90° pues $\overline{O_1B}$ es diámetro

El futuro profesor de matemática asignar nombres cada ángulo y va relacionando con las medidas respectivas para luego establecer una ecuación que permite encontrar la medida a uno de los ángulos buscados, todo esto respaldado por conceptos previos, además de proposiciones emergentes que van respaldadas con argumentos y además se apoya en la figura. Posteriormente vuelve a asignar una igualdad, ahora entre la medida de un ángulo y un arco, pero no logra visualizar que el arco asignado pertenece a otra circunferencia por lo que llega a un resultado erróneo pues la propiedad utilizada no corresponde.

Configuración Cognitiva 4 ítem A (CC4IA): configuración con errores en la asignación de valores en la imagen

Se asignan valores a la semi circunferencia, centro de la circunferencia y medida de un ángulo, todo esto apoyado de la imagen, pero los valores y relaciones establecidas no son las correctas lo que genera errores que impide la argumentación al no tener claros los conceptos utilizados. El centro de atención está en la figura, pero es completada erróneamente.

A continuación se presenta una imagen con la respuesta entregada por uno de los futuros profesores de matemática ítem A planteado, donde logra llegar a lo solicitado de manera correcta la configuración cognitiva 4:

En la figura O_1y O_2 son centros de dos semi circunferencias y el $\measuredangle ADB$ mide 35°. ¿Cuánto mide el $\measuredangle DCB$?

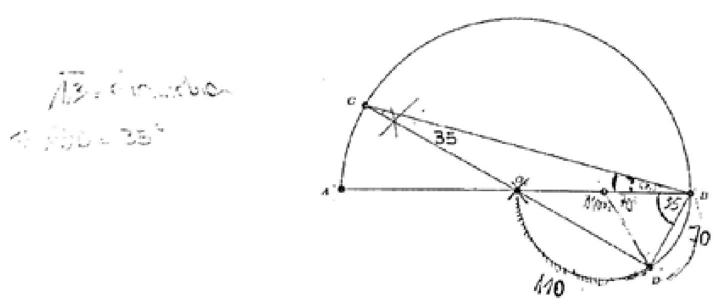


Figura 26: Respuesta generada por el FPM a la CC4IA

De acuerdo a la información presente en la respuesta generada por el futuro profesor de matemática es que a continuación se realizará un esquema de configuración epistémica tienen por objeto visualizar la red de relaciones entre los distintos tipos de objetos primarios

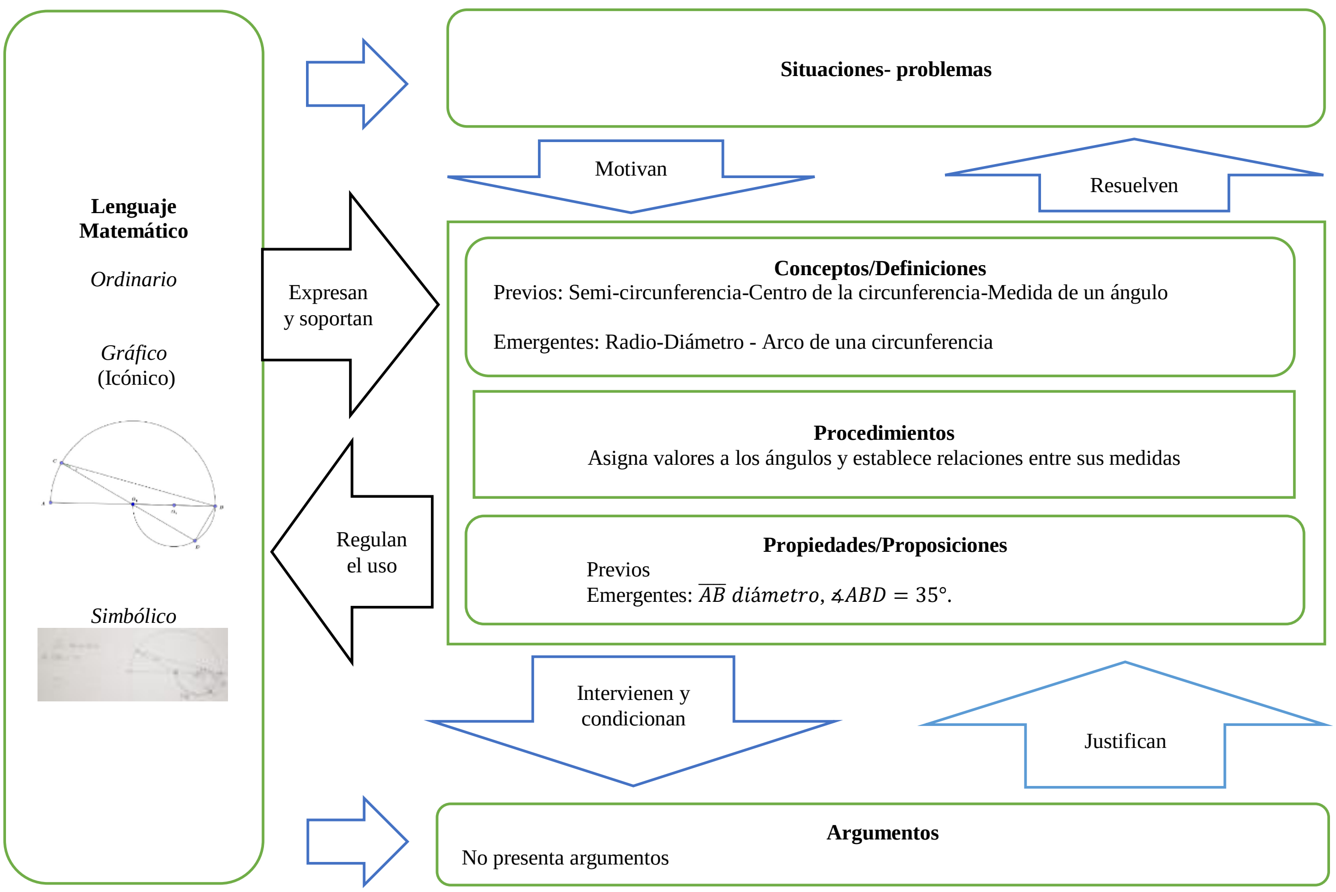
Objetos y relaciones primarias

Lenguaje: icónico ya que la figura es presentada explícitamente

Concepto: figurales, representados por medio del lenguaje visual como “triángulo”

En el esquema 10 resumimos los objetos y relaciones primarias que ha puesto en juego uno de los futuros profesores de matemática en la resolución del problema planteado.

Esquema 10: Objetos y relaciones primarias puestas en juego por el FPM a la CC4IA



Se observa que el futuro profesor de matemática asigna valores a la figura, pero se aprecia una confusión de los conceptos, lo que no le permite seguir adelante con el desarrollo ya que carece de proposiciones y argumentos que respalden lo que está intentando realizar.

Análisis de resultados de configuraciones cognitivas pata el ítem A

Dentro de las respuestas obtenidas por los estudiantes se observan 4 tipologías de configuraciones cognitivas, en el primer grupo designado con la sigla CC1IA el 23,4% (11 FPM) de los futuros profesores de matemática para dar solución al problema requiere de conocimientos previos que estén bien establecidos para utilizar definiciones, propiedades y argumentos que respalden los procedimientos realizados, además de notaciones y símbolos que incorporan en la figura, todo es trabajado de manera complementaria lo que permite llegar al resultado del problema planteado.

El segundo grupo designado como CC2IA equivalente al 14,89% (7 FPM) sólo da respuesta con la utilización de símbolos sobre la figura y carece de argumentación escrita en forma explícita, a simple vista se infiere la presencia de propiedades debido a que son necesarias para obtener ciertos valores. Llegando al resultado correcto del problema.

También hay un tercer grupo CC3IA correspondiente al 34,04% (16 FPM) que utiliza conceptos, definiciones, propiedades y argumentos, pero no logran llegar al resultado final al existir un error de propiedad utilizada ya que si bien un ángulo inscrito en una circunferencia mide la mitad del arco que lo subtiende, no consideran que necesariamente se debe tratar de la misma circunferencia para que sea válido, por lo que en este caso particular hay dos semi circunferencia por lo que no se puede utilizar esta propiedad.

El cuarto grupo de utilización CC4IA indica que el 17,02% (8 FPM) de los futuros profesores de matemática sólo tiene nociones de colocar valores en la figura y se evidencia la presencia de algunas definiciones utilizadas con aciertos y desaciertos, en su mayoría las argumentaciones presentes son erróneas, por lo que los futuros profesores no lograr dar respuesta al problema planteado

Finalmente podemos indicar que 10,63% de los futuros profesores de matemática no da respuesta al problema planteado, tampoco hay evidencia de las razones por las cuales no se responde ni se puede inferir si tienen claridad en los conceptos o son capaces de argumentar. **.**

Análisis Ítem B

Determinar la medida del lado de un dodecágono regular inscrito en una circunferencia de radio 3

Solución experta Ítem B

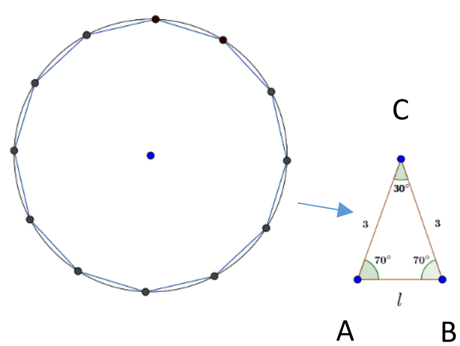


Figura 27: fuente elaboración propia

Tabla 13*: Solución experta ítem B*

Afirmación	**Razón**
1) Figura inscrita en una circunferencia con 12 lados de igual medida	Definición de un dodecágono regular
2) $\overline{AC} \cong \overline{BC}$	ambos segmentos son radios de la circunferencia

3) $\triangle ABC$ isósceles	Triángulo inscrito en el dodecágono regular y en la circunferencia
4) $\frac{360°}{12} = 30°$	El centro de la circunferencia se divide en 12 ángulos congruentes
5) $m\overline{AC} = m\overline{BC} = 3$	Los radios de una circunferencia tienen igual medida
6) $m\measuredangle CAB = m\measuredangle CBA = 75°$	por 3) 4) y la suma de los ángulos interiores de los ángulos interiores de un triángulo es 180°
7) $\frac{l}{sen\ 30°} = \frac{3}{sen\ 75°}$	teorema del seno para triángulos cualquiera
8) $l = 1{,}55$	por 7)

Objetos y relaciones primarias

A continuación se realizará un análisis de las configuraciones puestas en juego para a resolución del ítem B siguiendo a lo expresado por la solución experta.

Lenguaje: diagramático ya que es necesarios generar un croquis del dodecágono regular inscrito en la circunferencia.

Concepto: figurales, representados por medio del lenguaje visual como "triángulo", "dodecagono".

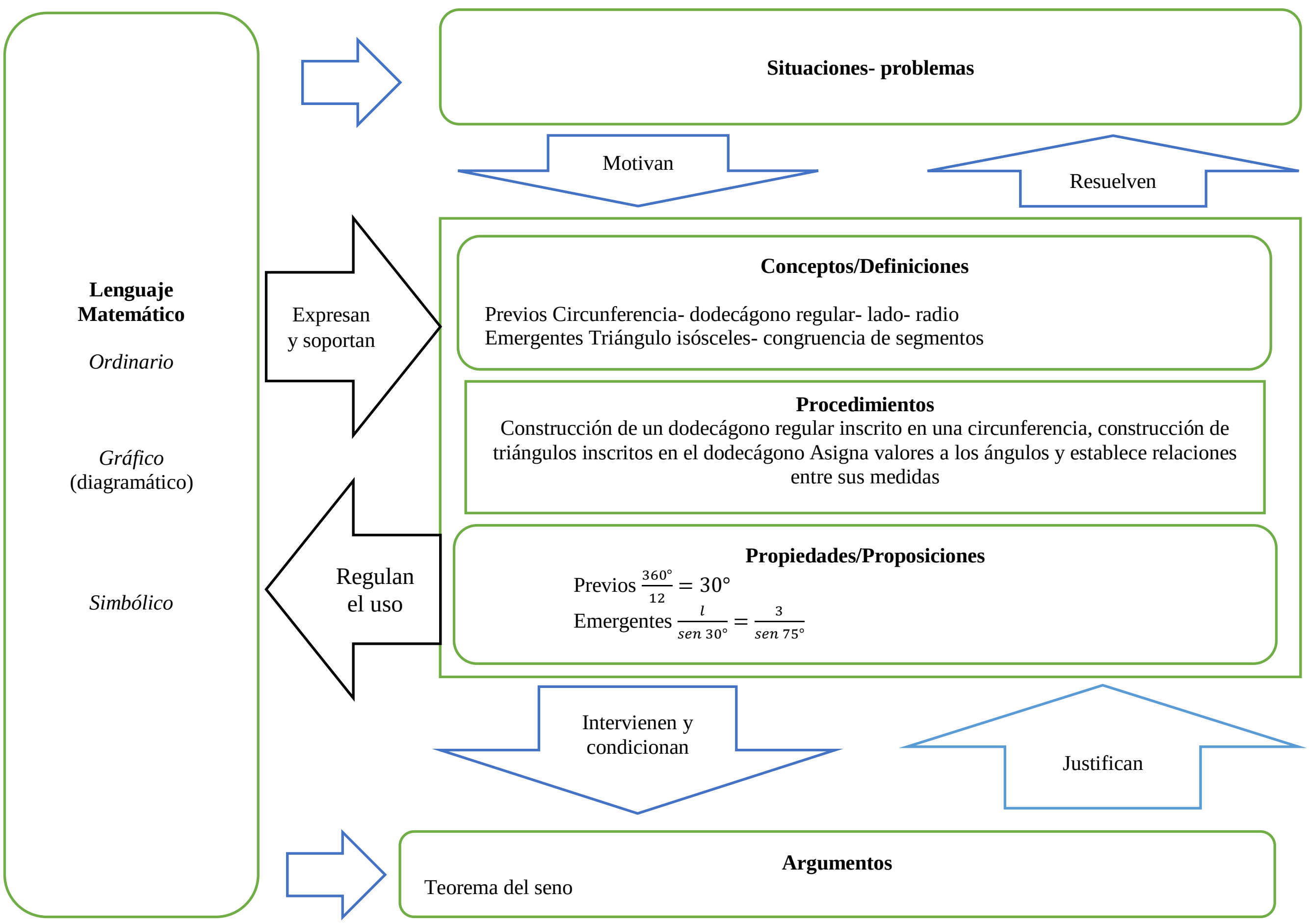
Proposición: Propiedades de los conceptos visuales como "$\overline{AC} \cong \overline{BC}$", "$\triangle ABC$ isósceles", "$m\measuredangle CAB = m\measuredangle CBA = 75°$", "$\frac{l}{sen\ 30°} = \frac{3}{sen\ 75°}$"

Procedimientos: "$\frac{360°}{12} = 30°$", "$l = 1{,}55$"

Argumentación: Argumentación Deductiva "Definición de un dodecagono regular", "Triángulo inscrito en el dodecágono regular y en la circunferencia", "El centro de la circunferencia se divide en 12 ángulos congruentes", "La suma de los ángulos interiores de los ángulos interiores de un triángulo es 180°", "Teorema del seno"

De forma más general también se puede representar las configuraciones a través de los objetos primarios como se muestra en el siguiente esquema:

Esquema 11: Configuraciones establecidas a través de la solución experta para el Ítem B



Es por todo lo anterior que en una primera instancia se presta atención a los procedimientos y respuestas generadas por los futuros profesores de matemática sobre los que se apoyan y son puestos en juego en la resolución del ítem B en términos de configuraciones cognitivas asociadas a la tipología de respuestas presentes donde se han identificado manera general 2 tipos de configuraciones cognitivas que se detallan a continuación:

Configuración cognitiva 1 ítem B (CC1IB): Aplicando teoremas

Se construye un dodecágono regular el cual se divide en doce triángulos congruentes para los cuales se atribuyen ciertas características, todo esto apoyado de la imagen. El centro de atención está en la figura y particularmente en los triángulos que se pueden trazar dentro del dodecágono regular ya que a través de ellos se le asignan valores que permiten deducir lo solicitado en el ítem B.

A continuación se presenta la figura 28 con la respuesta entregada por uno de los futuros profesores de matemática ítem B planteado, donde logra llegar a lo solicitado de manera correcta

Determinar la medida del lado de un dodecágono regular inscrito en una circunferencia de radio 3.

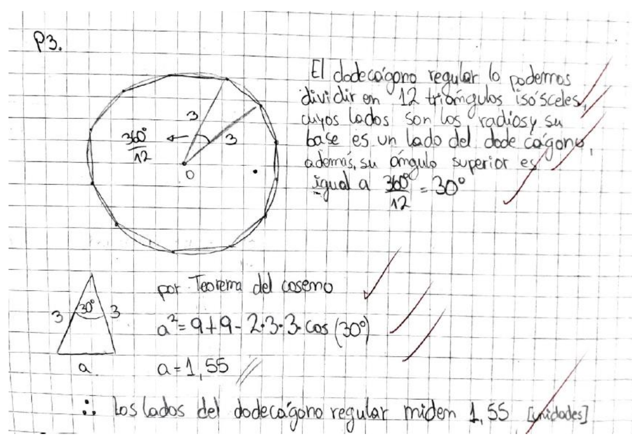


Figura 28: Respuesta generada por el FPM a la CC1IB

A continuación se realizará un análisis de la configuración epistémica generada por el futuro profesor de matemática que tiene por objetivo visualizar la red de relaciones entre los distintos tipos de objetos primarios visuales primarios utilizados

Objetos y relaciones primarias

Lenguaje: diagramático ya que se generó un croquis del dodecágono regular inscrito en la circunferencia, además de un triángulo isósceles sirve de apoyo para generar conjeturas.

Concepto: figurales, representados por medio del lenguaje visual como "dodecágono regular" "triángulos isósceles"

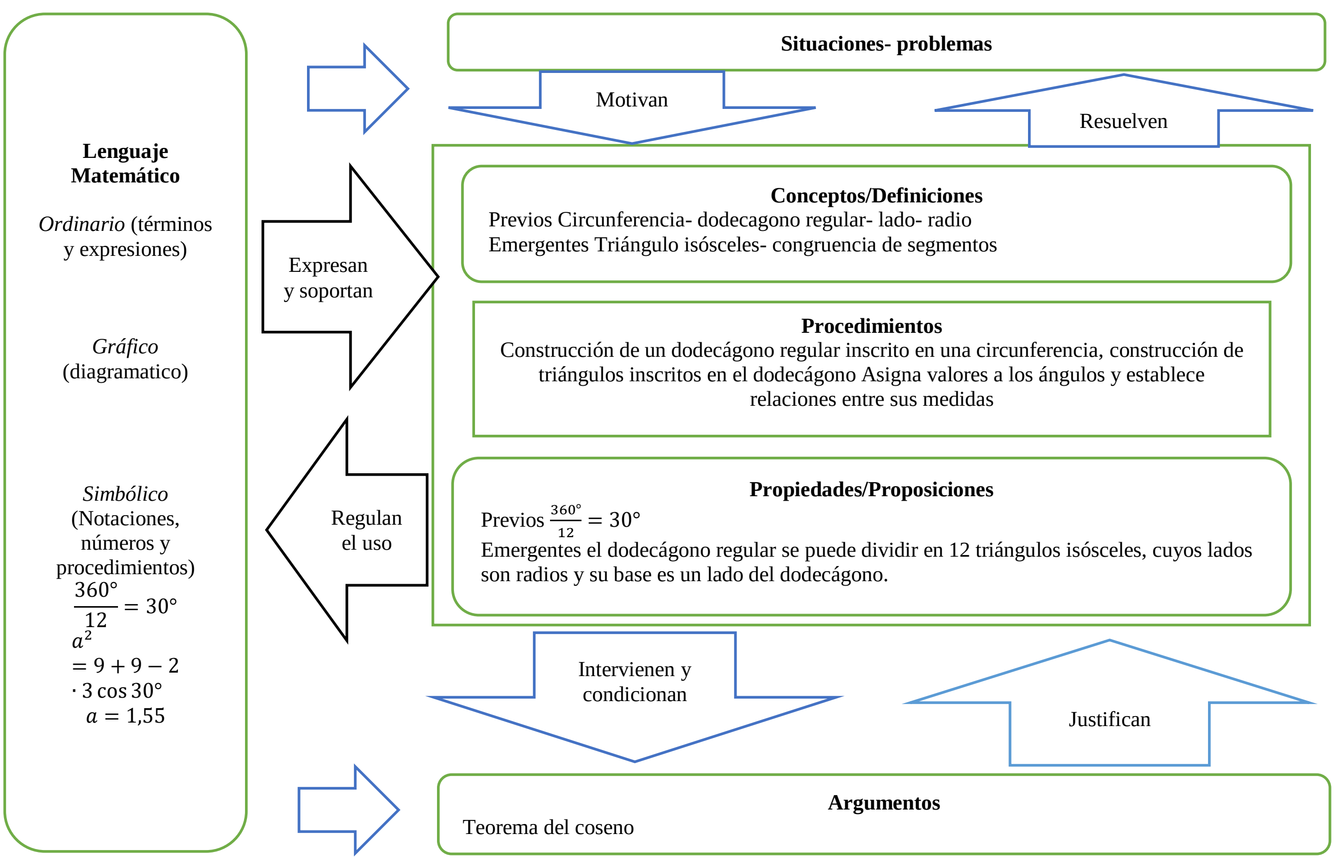
Proposición: Propiedades de los conceptos visuales "El dodecágono regular lo podemos dividir en 12 triángulos isósceles", "cuyos lados son los radios", "radio 3", "su base es un lado del dodecágono", "su ángulo superior es igual a 30°"

Procedimientos: "$a^2 = 9 + 9 - 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot \cos 30°$", " $\frac{360°}{12} = 30°$"

Argumentación: Argumentación Deductiva, "Teorema del coseno", "los lados del dodecágono regular miden 1,55 unidades"

En el esquema se resumen los objetos y relaciones primarias que ha puesto en juego uno de los futuros profesores de matemática en la resolución del problema planteado.

Esquema 12: Objetos y relaciones primarias puestas en juego por el FPM a la CC1IB



Ésta configuración cognitiva fue aplicada por los futuros profesores de matemática aplicando teorema del seno como se presenta en la siguiente imagen

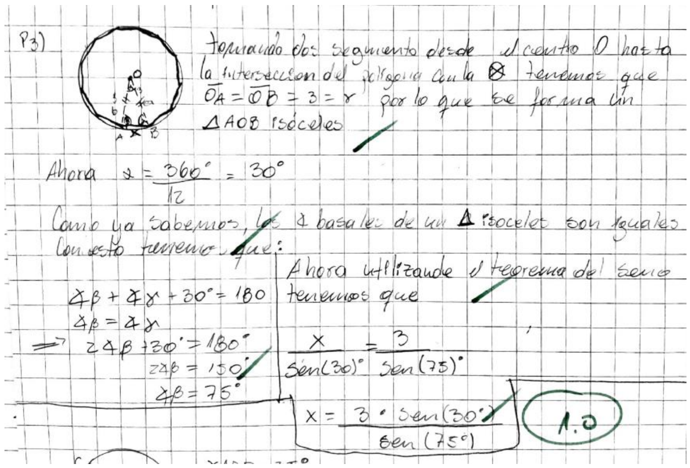


Figura 29: Respuesta generada por el FPM a la CC2IB

Objetos y relaciones primarias

Lenguaje: diagramático ya que se generó un croquis del dodecágono regular inscrito en la circunferencia, además de un triángulo isósceles inscrito en el dodecágono regular sirve de apoyo para generar conjeturas.

Concepto: figurales, representados por medio del lenguaje visual como “poligono” “triángulos isósceles”

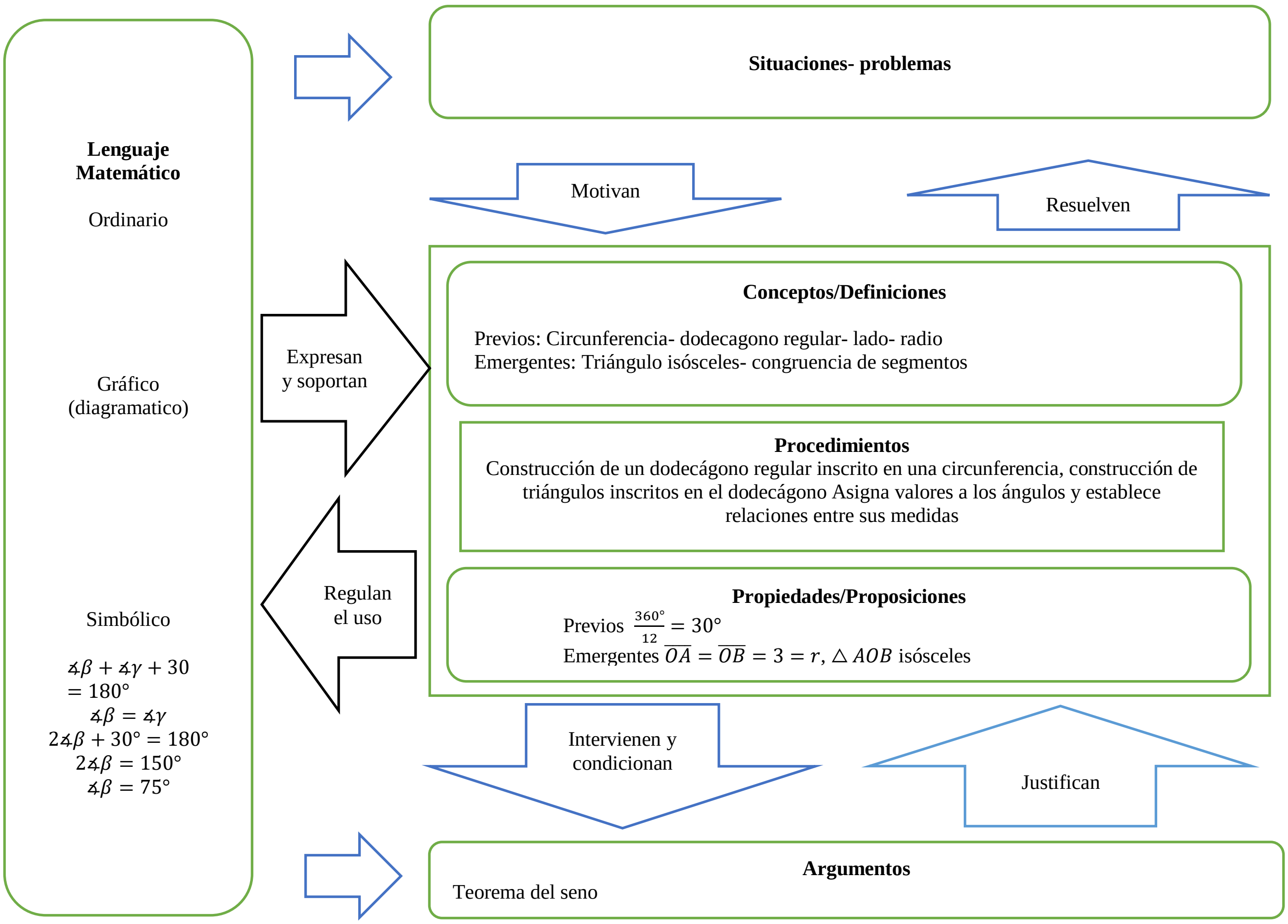
Proposición: Propiedades de los conceptos visuales “$\overline{OA} = \overline{OB} = 3 = r$”

Procedimientos: “$\frac{360°}{12} = 30°$”, “$∡\beta + ∡\gamma + 30° = 180°$”, “$∡\beta = ∡\gamma$”, “$2∡\beta + 30° = 180°$”, “$2∡\beta = 180°$”, “$∡\beta = 75°$”, “$\frac{x}{sen\ 30°} = \frac{3}{sen\ 75°}$”, “$x = \frac{3 \cdot sen\ 30°}{sen\ 75°}$”

Argumentación: Argumentación Deductiva, “los ángulos basales de un triángulo isósceles son iguales”, “Teorema del seno”

En el esquema 13 resumimos los objetos y relaciones primarias que ha puesto en juego uno de los futuros profesores de matemática en la resolución del problema planteado.

Esquema 13: Objetos y relaciones primarias puestas en juego por el FPM a la CC1IB



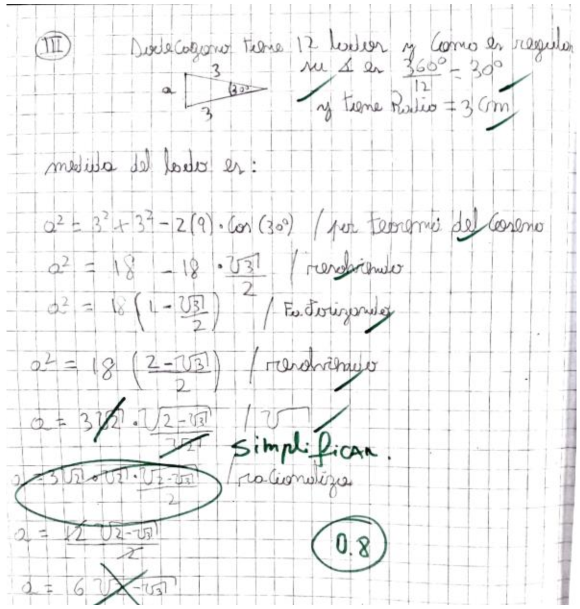


Figura 30*: Configuración cognitiva 2 ítem B (CC2IB) Errores procedimentales*

Objetos y relaciones primarias

Lenguaje: diagramático ya que se generó un croquis del dodecágono regular inscrito en la circunferencia, además de un triángulo isósceles inscrito en el dodecágono regular sirve de apoyo para generar conjeturas.

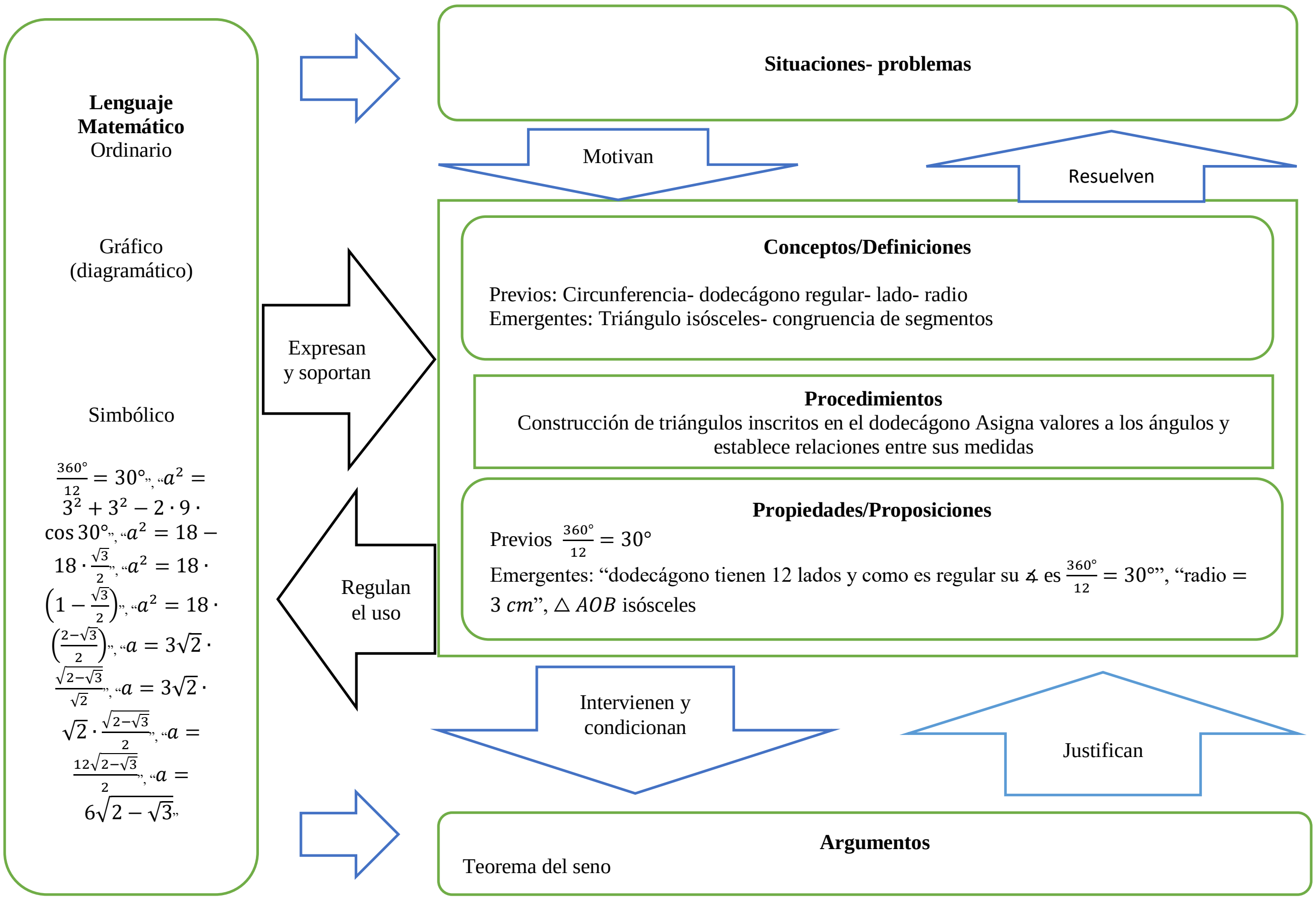
Concepto: figurales, representados por medio del lenguaje visual como "dodecágono"
Proposición: Propiedades de los conceptos visuales "dodecágono tiene 12 lados"

Procedimientos: "$\frac{360°}{12} = 30°$", "$a^2 = 3^2 + 3^2 - 2 \cdot 9 \cdot \cos 30°$", "$a^2 = 18 - 18 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$", "$a^2 = 18 \cdot \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$", "$a^2 = 18 \cdot \left(\frac{2-\sqrt{3}}{2}\right)$", "$a = 3\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{\sqrt{2}}$", "$a = 3\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$", "$a = \frac{12\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$", "$a = 6\sqrt{2 - \sqrt{3}}$"

Argumentación: Argumentación Deductiva, "Teorema del coseno", "factorizando", "resolviendo", "Racionalizando".

En el esquema resumimos los objetos y relaciones primarias que ha puesto en juego uno de los futuros profesores de matemática en la resolución del problema planteado.

Esquema 14: Objetos y relaciones primarias puestas en juego por el FPM a la CC2IB



4.2.4. Errores presentados por los futuros profesores de matemática

De acuerdo a todo lo analizado anteriormente es que se realiza la tabla 14 resumen con la tipología de errores que presentan los futuros profesores de matemática frente a la actividad evaluada. Para un mejor análisis es que detallaremos a continuación la codificación que se le ha asignado a la familia de errores:

a) *Situacional* (S): Errores relacionados con la expresión o contenido del ítem; el futuro profesor de matemática no logra comprender la información presentada en los enunciados, diagramas, figuras, datos, etc.

b) *Conceptual* (C): errores debido al uso o formulación incorrecta de un concepto.

c) *Procedimental* (P): son errores que se producen al aplicar incorrectamente un procedimiento o una propiedad.

d) *Combinados* (V): cuando se combinan dos o más errores de los anteriores

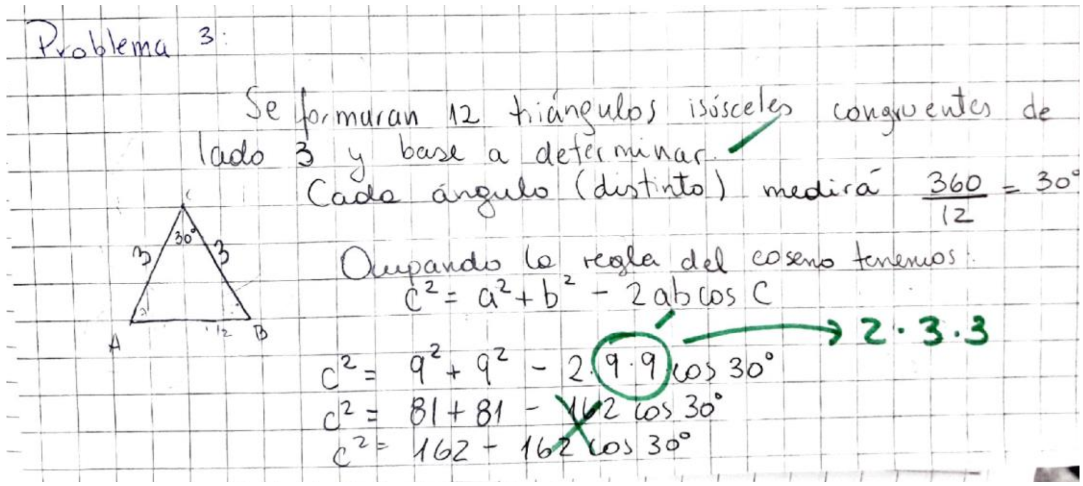
Tabla 14*: Resumen Tipología de errores presentados por los FPM*

Pregunta	Situacional	Conceptual	Procedimental	Combinados
Ítem 1	1	38	0	0
Ítem 2	5	14	7	3
Ítem 3	12	3	11	7
Ítem 4	25	9	0	0
Ítem 5	21	13	5	3
Ítem 6	39	0	6	0

De manera general se observa que los errores de los futuros profesores de matemática son del tipo conceptual seguido de lo procedimental, por ende si el futuro profesor de matemática no tiene claro los conceptos de circunferencia difícilmente pueda abordar un adecuado procedimiento y completar satisfactoriamente la actividad evaluada propuesta.

Además es importante mencionar que existe una gran cantidad de FPM con errores Situacionales por ende no logra comprender la información presentada en los enunciados, diagramas, figuras, datos, etc

A modo de ejemplo se presenta la figura 30 con errores del tipo procedimental, figura 31 con errores del tipo conceptual y figura 32 con errores combinados.



Problema 3:

Se formaran 12 triángulos isósceles congruentes de lado 3 y base a determinar.

Cada ángulo (distinto) medirá $\frac{360}{12} = 30°$

Ocupando la regla del coseno tenemos:

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$

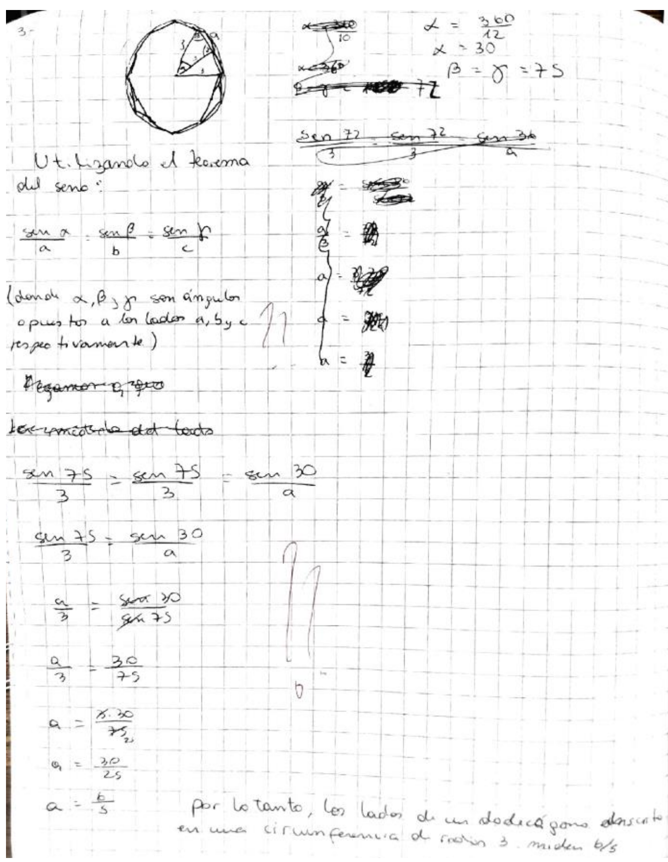
$2 \cdot 3 \cdot 3$

$c^2 = 9^2 + 9^2 - 2(9 \cdot 9)\cos 30°$

$c^2 = 81 + 81 - 162\cos 30°$

$c^2 = 162 - 162\cos 30°$

Figura 31: Respuesta de error del tipo procedimental



$\alpha = \frac{360}{12}$

$\alpha = 30$

$\beta = \gamma = 75$

Utilizando el teorema del seno:

$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{a} = \frac{\operatorname{sen}\beta}{b} = \frac{\operatorname{sen}\gamma}{c}$

(donde α, β y γ son ángulos opuestos a los lados a, b y c respectivamente)

$\frac{\operatorname{sen}75}{3} = \frac{\operatorname{sen}75}{3} = \frac{\operatorname{sen}30}{a}$

$\frac{\operatorname{sen}75}{3} = \frac{\operatorname{sen}30}{a}$

$\frac{a}{3} = \frac{\operatorname{sen}30}{\operatorname{sen}75}$

$\frac{a}{3} = \frac{30}{75}$

$a = \frac{3 \cdot 30}{75}$

$a = \frac{30}{25}$

$a = \frac{6}{5}$

por lo tanto, los lados de un dodecágono inscrito en una circunferencia de radio 3 miden 6/5

Figura 32: Respuesta de error del tipo conceptual

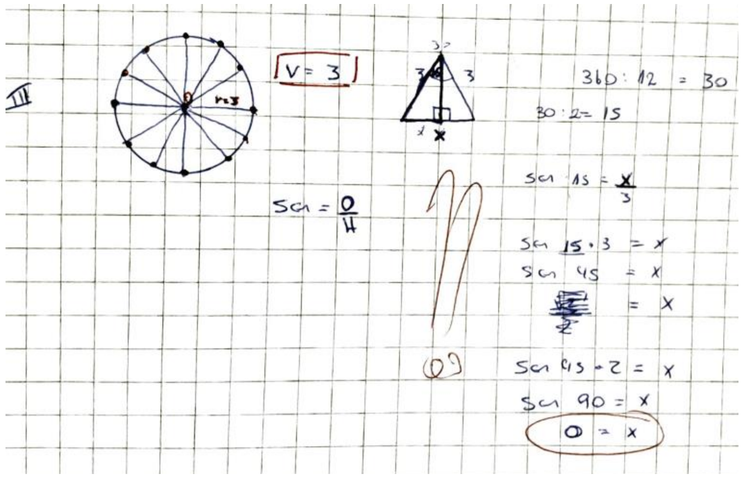


Figura 33: Respuesta del error tipo combinado

CAPÍTULO V

CONCLUSIONES Y LIMITACIONES Y PROYECCIONES

5.1. CONCLUSIONES

Conclusiones referentes a los siguientes Objetivos Específicos

Objetivo Específico 1: *Analizar la visualización y las configuraciones geométricas presentes en una muestra de libros de textos de educación básica, media y universitaria desde el punto de vista ontosemiótico.*

Según lo establecido en la educación chilena por el Ministerio de Educación (2015) en particular el eje de geometría y de acuerdo a las bases curriculares se establece que los estudiantes desarrollen sus capacidades visuales ya que ellas les permiten comprender de mejor manera el espacio y sus formas, por lo que al finalizar el ciclo de formación comprendido desde primear año de educación básica a cuarto año de educación media, los estudiantes deben ser capaces de utilizar de manera adecuada y precisa las propiedades y relaciones geométricas, tendrán que ser competentes, deberán relacionar la geometría con los números y el álgebra de manera armoniosa y concreta, utilizando así destrezas de visualización tanto espacial como planar.

Es por esto que se espera además que los textos proporcionen una fuente variada de ejercicios tanto resueltos como propuestos que fomenten el desarrollo del uso de la visualización y las configuraciones en el eje de geometría, particularmente en el concepto de circunferencia, elementos y propiedades, pero en el desarrollo de ésta investigación nos encontramos con un escenario diferente, el concepto de circunferencia es abordado principalmente en séptimo y octavo año básico, luego el concepto no es visto como unidad hasta segundo año de educación media por ende existen saltos espaciados en que los estudiantes chilenos no abordan este contenido

En esta investigación hemos considerado en nuestro análisis principalmente los objetos primarios que establece el EOS verificado que los textos a nivel de enseñanza básica y media presentan las actividades dando bastante importancia al uso del lenguaje y de conceptos con lo que se pretende desarrollen lo procedimental, pero no fomentan el uso de proposiciones y la elaboración de argumentos por parte de los estudiantes, incluso en los pocos textos que se ha encontrado argumentaciones son presentadas de manera informal sustentados de proposiciones empíricas(Argumentación visual). Por ende no se desarrollan las habilidades de argumentación formal, ni se cumple con el propósito formativo del que se ocupa el currículum chileno en el sector de matemática que es enriquecer la comprensión de la realidad, facilitar la selección de estrategias para resolver problemas y contribuir al desarrollo del pensamiento crítico y autónomo en todos los estudiantes, sean cuales sean sus opciones de vida y de estudios al final de la experiencia escolar (Ministerio de Educación, 2009).

Referente a los textos universitarios es importante destacar que éstos contienen actividades que requieren el uso de la visualización y las configuraciones estando presentes en su totalidad los objetos primarios analizados, pero no se observa que borden el teman desde el punto de vista metodológico. Por lo que tal vez esto podría ser complementado generando material y actividades en la asignatura de geometría plana que permitan remediar la falta de una metodología de aprendizaje basada en elementos de configuración y visualizaciones.

Objetivo específico 2: *Identificar elementos relacionados a la visualización y las configuraciones geométricas utilizadas por los futuros profesores de matemática en el desarrollo de actividades evaluadas sobre la circunferencia en geometría plana a través del enfoque ontosemiótico.*

Siguiendo al estudio realizado por Pavéz, Sánchez y Jiménez (2009) mencionan que las configuraciones geométricas forman parte fundamental de la enseñanza de la matemática y en particular del eje de estudio “Geometría”, para esta investigación hemos encontrado que las configuraciones utilizadas por los futuros profesores de matemática tienen relación con los elementos visuales primarios del EOS, principalmente el lenguaje y los conceptos lo cual viene dado de manera natural porque es lo que según mi experiencia docente es lo que más se fomenta durante su preparación académica en enseñanza básica y media, pero el conflicto se traduce en educación superior para los futuros profesores de matemática pues dentro de las evaluaciones analizadas en la asignatura de geometría plana se les solicita generar demostraciones donde se utilice la argumentación de manera formal y ellos en general de acuerdo a la información que hemos obtenido de las actividades evaluativas no están habituados a hacer ostensivos los razonamientos mentales, resultándoles complejo. En concordancia con la investigación de Clemente, Llinares y Torregrosa (2017) los resultados indican que los futuros profesores de matemática deben llegar a conocer la geometría en el ámbito curricular de la educación primaria, de forma que les permita ir más allá de simplemente reconocer propiedades y hechos geométricos en las figuras geométricas. Es por esto que en esta investigación hemos detectado que los Futuros profesores de matemática se encuentran en desventaja al no lograr generar un aprendizaje significativo frente al uso de la visualización y configuraciones, en particular el concepto de circunferencia, elementos y propiedades ya que carecen de elementos que favorezcan el desarrollo del uso de proposiciones y por ende la argumentación.

Objetivo específico 3: *Establecer los tipos de configuraciones geométricas que ponen en juego los futuros profesores de matemática frente a la realización de actividades evaluativas mediante los objetos primarios visuales del enfoque ontosemiótico (EOS).*

Respecto del instrumento de evaluación aplicado a los Futuros profesores de matemática se han analizado las respuestas de los ítems A y B estableciendo cuatro configuraciones cognitivas para el ítem A y dos configuraciones cognitivas para el ítem B respectivamente.

Respecto de la Configuración cognitiva CC1IA (Configuración deductiva), todos los estudiantes que logran semiosis entre los diferentes registros de representación asociados a las configuraciones (lenguaje, conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos) son los que resuelven de manera eficaz las actividades evaluativas planteadas, todo esto apoyado principalmente de la imagen presentada en el ítem. Todo el análisis realizado en esta tesis corrobora las investigaciones en educación matemática en torno a la visualización, destacando el papel que desempeña la visualización y las configuraciones de las figuras geométricas en el desarrollo de actividades cognitivas como el razonamiento deductivo (Sánchez, 2003) y la argumentación (Mesquita , 1989). Resultando coherente con lo establecido en este tipo de configuración cognitiva deductiva en los futuros profesores de matemática que les permite abordar de manera más efectiva las actividades evaluativas planteadas en la asignatura de geometría plana.

Por otra parte se presenta la configuración cognitiva (CC2IA) que se apoya en su totalidad en la imagen planteada en el problema de evaluativo ítem A, pero esta configuración genera dificultades para hacer ostensivos los razonamientos mentales ya que son evidente las carencias argumentativas presentes en los futuros profesores de matemática.

En general existen carencias cognitivas por parte de los futuros profesores de matemática, por lo que se hace fundamental generar medidas de acción para mejorar las capacidades de visualización

Conclusión referente al Objetivo General: *Analizar el uso de la Visualización planar y las configuraciones que aparecen en los textos bibliográficos y en la resolución de actividades evaluativas respecto del aprendizaje de la circunferencia en futuros profesores de matemática desde el punto de vista ontosemiótico.*

Marmolejo y González (2015), han puesto en evidencia que los libros de texto ejercen control sobre las maneras de proceder en el desarrollo de una actividad matemática, por lo que los textos escolares son un importantísimo referente a considerar para comprender muchos fenómenos asociados a la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, en particular las cuestiones relacionadas con objetos matemáticos y el rol que desempeña en ella la visualización y las configuraciones.

Lo declarado en la investigación anterior, tiene concordancia con lo evidenciado en la investigación de esta tesis respecto a que tanto en la educación básica y media el concepto de circunferencia no es abordado de manera continua y sistemática que permita desarrollar herramientas que influyan en el desarrollo de habilidades y herramientas que favorezcan el uso de visualización y configuraciones geométricas, lo que se traduce en que los futuros profesores de matemática traen una debilidad evidenciada en la presencia de errores de tipo conceptual y procedimental por ende les dificulta llevar a cabo actividades propuestas sobre la circunferencia ya que al no tener claros los conceptos es complejo que logren completar eficazmente las actividades planteadas. Se hace fundamental ser consciente del papel que desempeña la visualización y el uso de las configuraciones en el aprendizaje de la geometría, ésta le puede ayudar a gestionar de mejor manera las dificultades que emergen en su aprendizaje.

5.2. LIMITACIONES

Debido al tema de la investigación que involucra el uso de la visualización y configuraciones frente al concepto de circunferencia en geometría plana es que una dificultas fue encontrar documentos que ayuden a levantar información sobre el uso de visualización planar ya que la mayoría de las investigaciones son en el espacio.

Al ser una investigación cualitativa también plantea dificultades, debido a la diversidad de información encontrada en la actividad evaluada y en consecuencia el análisis de datos cualitativos es complejo, pues es necesario establecer claramente las técnicas de análisis coherentes con los objetivos y la cantidad de datos recolectados demandó bastante tiempo, lo que implicó transcripciones cuidadosamente realizadas para posteriormente identificar uso de configuraciones y generar una tipología configuraciones cognitivas encontradas. Además no contamos con información sobre el proceso educativo anterior de los futuros profesores de matemática ya que sólo recolectamos la información entregada en la actividad evaluada.

5.3. PROYECCIONES

La presente investigación constituye una primera aproximación al uso de la visualización y configuraciones que presentan los futuros profesores de matemática en la asignatura de geometría plana de una universidad chilena. Además de considerar que toda la información obtenida permite tener una mirada panorámica que ayude a generar planes de acción frente a las debilidades observadas pus se hace de suma importancia que los futuros profesores de matemáticas desarrollen habilidades del uso de la visualización y configuraciones para que en el futuro se encuentren preparados en su labor docente y puedan generar estrategias o seleccionar actividades matemáticas adecuadas para sus alumnos.

En relación a los resultados de esta investigación, estos pueden contribuir a nuevas investigaciones que aborden a la planificación de actividades en geometría que promuevan el desarrollo y uso de la visualización como apoyo a una mejora continua en este eje temático que se presenta más débil en comparación con los demás ejes de la asignatura de matemática.

Es importante indicar que de acuerdo a los resultados obtenidos hay una cierta tipología de errores que predomina frente a las actividades evaluadas en geometría del concepto de circunferencia por lo que sería interesante una propuesta que ayude a mejorar el desempeño académico del futuro profesor de matemática.

REFERENCIAS

Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 215-241. Obtenido de http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.126.6579&rep=rep1&type=pdf

Battista, M. (2007). The development og geometric and spatial thinking. *Second handbook of research on mathematics teaching and learning*, 843-908.

Bennett, J., Burger, E., Chard, D., Hall, E., Kennedy, P., Renfro, F., Waits, B. (2014). *7° Básico Matemática Texto del estudiante.* Santiago, Chile: Galileo.

Bennett, J., Burger, E., Chard, D., Hall, E., Kennedy, P., Renfro, F.,Waits, B. (2014). *Texto para el estudiante Matemática 8°.* Santiago, Chile: Galileo.

Bishop, A. (1989). Review of research on visualization in mathematics education. *Focus on learning problems in mathematics, 11*(1), 7-16.

Bisquerra, R. (2010). *Metodología de la investigación.* LA MURALLA S.A.

Borquez, E., Darrigrandi, F., y Zañartu, M. (2010). *Texto del estudiante Matemática 8° Educación básica.* Santiago, Chile: Santillana.

Cantoral, R., & Montiel, G. (2001). Visualización y pensamiento matemático. *Prentice Hall & Pearson Education*, 146.

Carreño, X., y Cruz, X. (2012). *Geometría.* Santiago: Mc Graw Hill Education.

Carreño, X., y Cruz, X. (2012). *Geometría.* Santiago, Chile: McGraw-Hill.

Carrión Miranda, V. (1999). Álgebra de funciones mediante el proceso de visualización. *Depto. de Matemática Educativa, CINVESTAV*, 146.

Castro, C., Curiche, A., y Vega, M. (2018). *Matemática 8° Sé Protagonista.* Santiago, Chile: SM.

Catalán , D., Pérez , B., Prieto, C., y Rupin, P. (2017). *Texto del estudiante Matemática 8° Básico.* Santiago, Chile: SM.

Celedon, J., Nuñez, P., Jiménez, L., y Maulen, M. (2018). *Matemática 1° Sé Protagonista.* Santiago, Chile: SM.

Clemens, S., O`Daffer, P., y Cooney, T. (1998). *Geometría.* México: Addison Wesley.

Clemens, S., O´Daffer, P., y Cooney, T. (1998). *Geometría.* México: Addison Wesley Longman de México S.A.

Clemente, F., y Llinares, S. (2015). Formas del discurso y razonamiento configural de estudiantes para maestro en la resolución de problemas de geometría. *Enseñanza de las ciencias,* 9-27.

Clemente, F., Llinares, S., y Torregrosa, G. (Abril de 2017). Visualización y razonamiento configural. *Bolema, 31*(57), 497-516.

Cobo, B., y Batanero, C. (2004). "Significado de la medida en los libros de texto de secundaria". Enseñanza de las ciencias, vol.22, núm 1. 5-8.

Cornejo, M., y Salas, N. (2011). Rigor y calidad metodológicos: un reto a la investigación social cualitativa. *PSICOPERSPECTIVAS Individuo y Sociedad*, 12-34.

Curiche, A., Aguilar, M., y Sanhueza, M. (2018). *Matemática 2° Sé Protagonista.* Santiago, Chile: SM.

Davis. (1993). Visual Theorems. *Educational Studies in Mathematics,* 333-334.

Davis.P. (1993). Visual Theorems. *Educational Studies in Mathematics,* 333-334.

DEMRE. (2016). *Prueba de selección universitaria. Informe técnico volúmen II.* Santiago, Chile.

DEMRE. (2016). *Temario Matemática Prueba Selección universitaria proceso de admisión 2017.* Santiago, Chile.

DEMRE. (2017). Informe de desempeño de estudiantes de enseñanza Media. *Departamento de Evaluación, Medición y Registro Educacional*, 19-22.

DEMRE. (2017). *Temario Prueba de Matemática.* Santiago, Chile.

Downs, M. (1970). *Geometría Moderna.* México: Addison-Wesley Iberoamericana.

Downs, M. (s.f.). *Geometría Moderna* . Adison - Wesley Iberoamericana.

Duval, R. (1998). *Geometry from a cognitive point of view. En C. Mammana y V.* Dordrecht, Netherlands: Kluwer Academic Publishers. Villani (Eds.).

Duval, R. (1999). Representation, Vision and Visualization: Cognitive Functions in Mathematical Thinking. Basic Issues for Learning. *ERIC*.

Duval, R. (2003). Voir en Mathématiques. *Matemática Educativa*, 41-76.

Fernandez Blanco, T., Díaz Godino, J., y Cajaraville Pegito, J. A. (2012). Razonamiento Geométrico y Visualización Espacial desde el Punto de Vista Ontosemiotio. *BOLEMA*, 39-63.

Fischbein, E. (1993). The Theory of Figural concepts. *Educational Studies in Mathematics, 24*(2), 139-162.

Font, V., y Contreras, A. (2008). The problem of the particular and its relation to the general in mathematics eduction . *Educational Studies in Mathematics*, 33-52.

Godino, J. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactiques des Mathematiques*, 237-284.

Godino, J., y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 325-355.

Godino, J., y Font, V. (2010). The theory of representations as viewed from the onto-semiotic approach to mathematics education. *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education, 9*(1), 189-210.

González, M. T., y Sierra, M. (2004). Metodología de análisis de libros de textos de matemáticas. Los puntos críticos en la enseñanza secundaria en España durante el siglo XX, Enseñanza de las Ciencias. vol 22. 389-408.

Gutiérrez, A. (1998). Las representaciones planas de cuerpos 3-dimensionales en la enseñanza de la geometría espacial. *EMA, 3*(3), 193-220.

Hernández, R., Fenández, C., y Baptista, P. (2010). *Metodología de la Investigación.* México: Mc Graw Hill.

Hernández, R., Fernández, C., y Baptista, P. (2014). *Metodología de la Investigación.* México: Mc Graw Hill.

Hollebrands, K., Laborde, C., & Stráber, R. (2008). Technology and the learning of geometry at the secondary level. *Research on Technology and the Teaching and Learning of Mathematics, 1*, 155-205.

Kordaki, M. (2003). The effect of tools a computer microworld on students strategies regarding the concept of conservation of area. *Educational Studies in Mathematics*, 177-209.

Lemonidis, C. (1991). Analyses et réalisation d´une expérience d´enseignement de homothétiee. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 295-324.

León, O. (2005). Experiencia figural y procesos semánticos para la argumentación en geometría. *Tesis doctoral no publicada, Universidad del Valle*.

Lithner, J. (2004). Mathematical reasoning in calculus textbook exercises. *Journal of Mathematical Behavior, 23 (4)*, 405 - 427.

Love, E., & Pimm, D. (1996). "This is so: A text on texts", en A.J. Bishop y otros (eds). *International Handbook of Mathematics Education, Kluwer Academic Publishers*, 371-409.

Maldonado, L., Marambio, V., y Galasso, B. (2017). *Texto del estudiante Matemática 1° Medio.* Santiago, Chile: Santillana.

Marmolejo, G., y González , M. (2012). El Control Visual para la construcción del concepto de área de superficies planas en los textos escolares. Una metodología de análisis.

Marmolejo, G., y González, M. (2015). Control Visual en la construcción del área de superficies planas en los textos escolares. Una metodología de análisis. *Revista Latinoamericana de Investigación Matemática Educativa* , 301-328.

Marmolejo, G., y Vega, M. (2012). La visualización en las figuras geométricas. *Educación Matemática*, 7-32.

Martín, D. R. (2015). La formación docente universitaria en Cuba : Sus fundamentos desde una perspectiva desarrolladora del aprendizaje y la enseñanza. *Estudios Pedagógicos XLI*, 337-349.

Masjuán, G., y Arenas, F. (2000). *Ejercicios de Geometría Elemental Segunda edición.* Santiago, Chile: Ediciones Universidad Católica de Chile.

Mercado Schuller, C. (1991). *Geometría, Curso de Matemática Elemental Tomo III y IV.* Santiago, Chile: Editorial Universitaria.

Merino, R., Muñoz, V., Pérez, B., y Rupin, P. (2017). *Texto del estudiante Matemática 7° Básico.* Santiago, Chile: SM.

Mesa, V. (2010). Strategies for Controlling the Work in Mathematics Textbooks for Introductory Calculus. *Research in Collegiate Mathematics Education, 16*, 235 - 260.

Mesquita , A. (1989). L'Influence d'aspects figuratifs dans l'argumentation des élèves en geométrie: élements pour une typologie. *Disertación doctoral no publicada, Université de Strasbourg.* Francia.

Ministerio de Educacion. (2009). *Objetivos fundamentales y contenidos mínimos obligatorios de la educación básica y media.* Santiago, Chile.

Ministerio de Educación. (2012). *Estándares orientadores para carreras de pedagogía en educación media.* Santiago, Chile: LOM Ediciones Ltda.

Ministerio de Educación. (2015). *Bases Curriculares.* Santiago, Chile.

Muñoz, G., Gutiérrez, V., y Muñoz, S. (2016). *Matemática IV Medio Texto del Estudiante* . Santiago, Chile: Santillana.

Muñoz, G., Rupin, P., y Jiménez, L. (2017). *Texto del estudiante Matemática 2° Medio* . Santiago, Chile: SM.

Ortiz, A., Reyes, C., Valenzuela, M., y Chandía , E. (2010). *Matemática 1° Año Medio Texto para el Estudiante.* Santiago, Chile: McGraw-Hill.

Outhred, L., & Mitchelmore, M. (2000). Young children´s intuitive understanding of rectangular area measurement. *Journal for research in mathematics education*, 168-190.

Pavez, E., Sánchez, L., y Jiménez, R. (2009). Configuraciones Geométrticas Trabajo Final Pasantía "Didáctica de la Matemática". *IUF Midi-Pyrénées*.

Pepin, B. L. (2001). "Mathematics textbooks and their use in English, French and German classroom. A way to understand teaching and learning culture". *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, vol 33*, 158-175.

Phillips, L., Norris, S., & Macnab, J. (2010). Visualization in mathematics, reading and science education. *Dordrecht, The Netherland: Springer*.

Presmeg. (1986). Visualization and mathematical giftedness. *Educational studies in Mathematics, 17,* 297-311.

Presmeg. (2006). Research on visualization in learning and teaching mathematics. *Handbook on the psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future*, 205-235.

Presmeg, N. (1986). Visualization and mathematical giftedness. *Educational studies in Mathematics, 17*, 297-311.

Presmeg, N. (2006). Research on visualization in learning and teaching mathematics. *Handbook on the psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future*, 205-235.

Ramírez, A., y Aguayo, I. (2018). *Matemática 3° Medio.* Santiago, Chile: SM.

Rivera, F., & Becker, J. (2008). Middle school children's cognitive perceptions of constructive and deconstructive generalizations involving linear figural patterns. *The International Journal on Methematics Education*, 65-82.

Rodríguez, G. (1999). *Metodología de la investigación cualitativa.* Aljibe. SL.

Saiz, O., y Blumenthal, V. (2017). *Texto del estudiante Matemática 3° Medio.* Santiago, Chile: Clal y Canto.

Salgado, A. C. (2007). Investigación cualitativa: diseños, evaluación del rigor metodológico y retos. *LIBERABIT*, 71-78.

Sánchez, E. (2003). La demostración en geometría y los procesos de reconfiguración: una experiencia en un ambiente de geometría dinámica . *Educación Matemática*, 27-53.

Schewerter, S., y Castro, C. (2018). *Matemática 4° Medio.* Santiago, Chile: SM.

Schmidt, W. D. (1996). Characterizing Pedagogical Flow. An Investigation of Mathematics and Science Teaching in Six Countries. *Kluwer Academic Publishers*.

Schuller, C. M. (1991). *Geometría, curso de matemática elemental tomo III y iV.* Santiago, Chile: Universitaria.

Schwerter, S., Aguilar, M., y Maulén, M. (2018). *Matemática 7° Sé Protagonista* . Santiago, Chile: SM.

Setz, J., y Darrigrandi, F. (2009). *Texto para el estudiante Matemática 7° Educación Básica.* Santiago, Chile: Santillana.

Soto-Andrade, J. (2008). Mathematics as the art of seeing the invisible. ICME11. Plenary paper, Topic Study Group 20. *Visualization in the teaching and learning of mathematics.*

Soto-Andrade, J. (2008). *Visualization in the teching and learning of mathematics.*

Stylianides, G., & Ball, D. (2008). Undertanding and describing mathematical knowledge for teaching: knowledge about proof for engaging students in the activity of proving. *Journal of Mathematics Theacher Education*, 307-332.

Usiskin, Z. (1987). Resolving the continuing dilemas in school geometry. *Yearbook*, 17-31.

Yakimanskaya, I. (1991). The development of spatial thinking in schoolchildren. *National Council of Mathematics., 3*.

Yin. (2009). Investigación sobre estudios de casos, diseño y métodos. *International Educational and Professional Publisher*, 41.

Zañartu, M., Darrigrandi, F., y Ramos, M. (2009). *Texto para el estudiante 2° educación media.* Santiago, Chile: Santillana.

ANEXO

Anexo 1: *Consentimiento informado para el análisis de las respuestas del instrumento*

CONSENTIMIENTO INFORMADO

Estimado estudiante

Mi nombre es Natalia Pérez Cabrera estudiante del Programa Magíster en didáctica de la Matemática de la Universidad Católica de la Santísima Concepción y realizo mi proyecto de tesis de grado cuyo título es "Estudio sobre la visualización planar y configuraciones en el aprendizaje de la circunferencia en futuros profesores de matemática desde el punto de vista ontosemiótico" bajo la dirección del profesor Marco Uribe Santibáñez.

El estudio señalado anteriormente tiene como propósito identificar e interpretar en los futuros estudiantes de matemática de la carrera de pedagogía media en matemática de la UCSC, el uso de la visualización y configuraciones frente a tareas de geometría, por este motivo, solicitamos tu consentimiento informado para analizar las respuestas de los certámenes aplicados en el curso IN0009, indicando además que los profesores de la asignatura están al conocimiento de esta solicitud.

La información que nos facilites será tratada de manera confidencial, los datos serán conocidos y manejados solamente con el propósito de esta investigación y bajo ningún motivo se harán público los datos entregados. Los resultados de esta investigación pueden ser compartidos individualmente con cada uno de ustedes si así lo requieren.
Agradeciendo vuestra participación, les saluda cordialmente

Natalia Pérez Cabrera
Estudiante Magíster en Didáctica de la Matemática
Universidad Católica de la Santísima Concepción
nperez@magister.ucsc.cl

Firma de Consentimiento
Yo ____rut ___________________________
alumno de la asignatura de Geometría Plana IN0009 de la UCSC autorizo a Natalia Pérez e uso de mis respuestas de los certámenes de la asignatura solo para fines de la investigación anteriormente señalada.

____
Firma del Estudiante

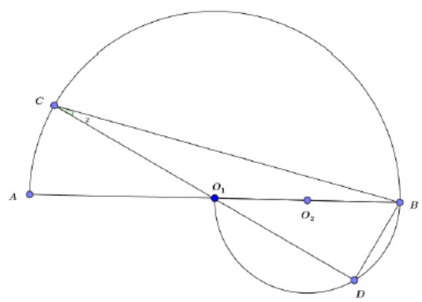
Anexo 2: Instrumento final aplicado a los FPM

UNIVERSIDAD CATÓLICA DE LA SANTÍSIMA CONCEPCIÓN
FACULTAD DE EDUCACIÓN
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA Y FÍSICA APLICADAS

CERTAMEN 2
GEOMETRÍA PLANA (IN10009)

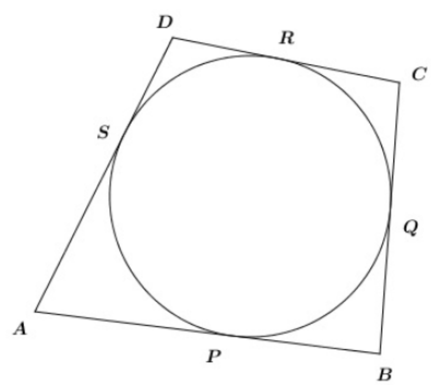
Problema 1. [**0.6 Puntos**] Defina el concepto de: Ángulo semi-inscrito, Polígono regular.

Problema 2. [**1.0 Puntos**] En la figura, O_1 y O_2 son centros de dos semicircunferencias y el $\measuredangle ABD$ mide **35**. ¿Cuánto mide el $\measuredangle DCB$?



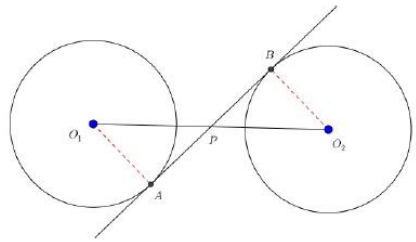
Problema 3. [**1.0 Puntos**] Determine la medida del lado de un un dodecágono regular inscrito en una circunferencia de radio 3.

Problema 4. [**1.0 Puntos**] El cuadrilátero $ABCD$ está circunscrito en la circunferencia, siendo P, Q, R y S los puntos de tangencia. $PB = 2\ cm$; $CQ = 3\ cm$; $DR = 4\ cm$; $AS = 6\ cm$. ¿Cuál es el perímetro del cuadrilátero?

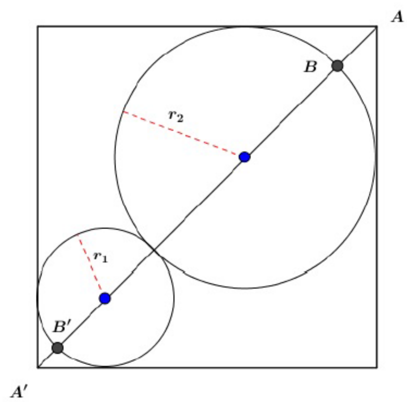


Departamento de Matemática y Física Aplicadas - UCSC 2017
Certamen 2: Geometría Plana

Problema 5. [**1.4 Puntos**] O_1 y O_2 son centros de circunferencia congruentes y $\overleftrightarrow{AB}$ es una tangente común. Demuestre que P es punto medio de $\overline{AB}$ y de $\overline{O_1O_2}$.



Problema 6. [**1.0 Puntos**] En la figura se muestran un cuadrado de lado $2a$ y dos circunferencias en su interior, con centros sobre la diagonal del cuadrado y con radios r_1 y r_2. Estas circunferencias son tangentes exteriormente entre sí, y cada una es tangente a dos lados del cuadrado. Demostrar que $r_1 + r_2 = \frac{4a}{2+\sqrt{2}}$.



Departamento de Matemática y Física Aplicadas - UCSC 2017
Certamen 2: Geometría Plana

PAUTA EVALUACIÓN TESIS DE MAGÍSTER (Tipo Académico)

Título de la Tesis: Visualización Planar y Configuraciones en el aprendizaje de la Circunferencia en Futuros Profesores de Matemática desde el punto de vista Ontosemiótico.

Autor(a)	Natalia Elizabeth Pérez Cabrera
Director de Tesis	Dr. Marco Uribe Santibáñez
Programa	**Magíster Didáctica de la Matemática**
Nombre del Evaluador	Gabriel Sanhueza Daroch

Nota: Evalúe de 1.0 a 7.0 cada uno de los indicadores que se presentan esta pauta.

Aspectos Formales (10%)

Indicadores	**Nota**
1. Presentación de la Tesis de acuerdo a formato oficial	7.0
2. Índice (de contenidos, gráficos y/o figuras)	6.8
3. Resumen (en español e inglés)	7.0
4. Correcto uso de ortografía	7.0
5. Redacción coherente con escritura científica de la especialidad	7.0
6. Referencias y citas de acuerdo a Norma APA, 6ª Edición	7.0
Promedio	**6.96**

Formulación del Problema (20%)

Indicadores	**Nota**
7. Construcción del objeto de estudio a partir de la presentación de antecedentes contextuales, teóricos y empíricos	7.0
8. Supuestos o hipótesis de trabajo en correspondencia con el objeto de estudio	7.0
9. Formulación de la interrogante de investigación	7.0
10. Relevancia del problema de investigación en el contexto de la disciplina	7.0
11. Objetivos formulados con claridad y coherentes con el problema y el objeto de estudio.	7.0
Promedio	**7.0**

Marco Teórico (20%)

Indicadores	**Nota**
12. Antecedentes teóricos : presentación ordenada y coherente de los capítulos, apartados y sub apartados teóricos que sustentan la investigación	7.0
13. Aproximación al estado de arte de la problemática de investigación	7.0
14. Pertinencia, relevancia y actualización de las fuentes de referencia para la investigación	7.0
Promedio	**7.0**

Marco Metodológico (20%)

Indicadores	Nota
15. Paradigma y Enfoque de la investigación	7.0
16. Diseño de la investigación: operacionalización de la investigación en fases	7.0
17. Muestra o Participantes	7.0
18. Estrategias, técnicas e instrumentos de recogida de datos	7.0
19. Estrategias de análisis de datos	7.0
20. Criterios de rigor científico	7.0
Promedio	**7.0**

De los Resultados (20%)

Indicadores	Nota
21. Presentación de resultados de forma clara y sintética	7.0
22. Procesamiento, análisis e interpretación de los resultados o hallazgos	7.0
23. Tablas, figuras o gráficos bien construidos	6.8
Promedio	**6.93**

Conclusiones, Discusión y Proyecciones (10%)

Indicadores	Nota
24. Conclusiones respecto de los objetivos propuestos	7.0
25. Discusión de resultados, según el marco teórico referencial y el estado del arte	7.0
26. Limitaciones y proyecciones del estudio	6.8
Promedio	**6.93**

Calificación Final

	Promedio Calificación (de 1.0 a 7.0)	Porcentaje	Ponderación
Aspectos Formales	6.96	10%	0.696
Formulación del Problema	7.0	20%	1.40
Marco Teórico	7.0	20%	1.40
Marco Metodológico	7.0	20%	1.40
Resultados	6.93	20%	1.39
Conclusiones y Discusión	6.93	10%	0.69
	Calificación Final		**6.97**

Magíster en Didáctica de la Matemática
Facultad de Educación – Facultad de Ingeniería

Observaciones y/o Comentarios:
Excelente Trabajo

Mg. Gabriel Sanhueza Daroch

Depto. Matemática, Facultad de Ciencia, U. del Bío Bío

Fecha: 19 de Agosto del 2019

PAUTA EVALUACIÓN TESIS DE MAGÍSTER (Tipo Académico)

Título de la Tesis: Visualización planar y configuración en el aprendizaje de la circunferencia en futuros profesores de matemática desde el punto de vista ontosemiótico

Autor(a)	Natalie Elizabeth Pérez Cabrera
Director de Tesis	Dr. Marco Uribe Santibáñez
Programa	**Magíster Didáctica de la Matemática**
Nombre del Evaluador	Carmen Cecilia Espinoza Melo.

Nota: Evalúe de 1.0 a 7.0 cada uno de los indicadores que se presentan esta pauta.

Aspectos Formales (10%)

Indicadores	**Nota**
1. Presentación de la Tesis de acuerdo a formato oficial	7.0
2. Índice (de contenidos, gráficos y/o figuras)	6.5
3. Resumen (en español e inglés)	7.0
4. Correcto uso de ortografía	6.5
5. Redacción coherente con escritura científica de la especialidad	6.5
6. Referencias y citas de acuerdo a Norma APA, 6ª Edición	6.5
Promedio	6.6

Formulación del Problema (20%)

Indicadores	**Nota**
7. Construcción del objeto de estudio a partir de la presentación de antecedentes contextuales, teóricos y empíricos	6.5
8. Supuestos o hipótesis de trabajo en correspondencia con el objeto de estudio	6.5
9. Formulación de la interrogante de investigación	6.8
10. Relevancia del problema de investigación en el contexto de la disciplina	6.5
11. Objetivos formulados con claridad y coherentes con el problema y el objeto de estudio.	6.5
Promedio	6.6

Marco Teórico (20%)

Indicadores	**Nota**
12. Antecedentes teóricos : presentación ordenada y coherente de los capítulos, apartados y sub apartados teóricos que sustentan la investigación	6.5
13. Aproximación al estado de arte de la problemática de investigación	6.5
14. Pertinencia, relevancia y actualización de las fuentes de referencia para la investigación	6.4
Promedio	6.5

Marco Metodológico (20%)

Indicadores	Nota
15. Paradigma y Enfoque de la investigación	65
16. Diseño de la investigación: operacionalización de la investigación en fases	64
17. Muestra o Participantes	64
18. Estrategias, técnicas e instrumentos de recogida de datos	65
19. Estrategias de análisis de datos	65
20. Criterios de rigor científico	64
Promedio	6,5

De los Resultados (20%)

Indicadores	Nota
21. Presentación de resultados de forma clara y sintética	65
22. Procesamiento, análisis e interpretación de los resultados o hallazgos	65
23. Tablas, figuras o gráficos bien construidos	63
Promedio	64

Conclusiones, Discusión y Proyecciones (10%)

Indicadores	Nota
24. Conclusiones respecto de los objetivos propuestos	6,5
25. Discusión de resultados, según el marco teórico referencial y el estado del arte	6,5
26. Limitaciones y proyecciones del estudio	63
Promedio	6,4

Calificación Final

	Promedio Calificación (de 1.0 a 7.0)	Porcentaje	Ponderación
Aspectos Formales	6,6	10%	0,66
Formulación del Problema	6.6	20%	1,32
Marco Teórico	6,5	20%	1,3
Marco Metodológico	6,5	20%	1,3
Resultados	6,4	20%	1,28
Conclusiones y Discusión	6,4	10%	0,64
	Calificación Final	6,5	

Observaciones y/o Comentarios:
Trabajo muy ordenado y un aporte al área de la didáctica
las conclusiones, proyecciones son plausibles, especialmente
a partir de los resultados
Revisar normas APA

Carmen Julia Espinoza M.
Nombre y Firma Evaluador

Afiliación (Departamento, Facultad, Universidad)
Depto. Didáctica
Facultad Educación.

Fecha: DD de mmmm del 201A
26 de agosto 2019.