

UNIVERSIDAD CATÓLICA DE LA SANTÍSIMA CONCEPCIÓN



CARACTERIZACIÓN DE BIFURCACIONES DE SOLUCIONES PERIÓDICAS
EN SISTEMAS HAMILTONIANOS EN RESONANCIA 1 : 1
USANDO TEORÍA DE REDUCCIÓN

*Tesis para optar al grado de
Magíster en Matemática Aplicada*

SERGIO ORLANDO VÁSQUEZ TORRES

Profesor Guía: Dr. Jhon Edder Vidarte Olivera

FACULTAD DE INGENIERÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA Y FÍSICA APLICADAS
Concepción - Chile
Octubre - 2024

Dedicatoria

Trabajo dedicado a
*Verónica Torres Echavarría, Sergio Vásquez Ibáñez y a mis
hermanos Jonathann, Martin y Fernando.*

AGRADECIMIENTOS

Quiero dedicar este espacio no solo para agradecer a Dios por la oportunidad que me brindó de estudiar un posgrado, sino también por las personas que Él puso en mi camino.

En primer lugar, agradezco el apoyo brindado por mis padres y hermanos, quienes me han acompañado no solo en mis estudios, sino a lo largo de toda mi vida. En especial, quiero reconocer a mi madre, Verónica Torres Echavarría, pues solo Dios sabe cuántas dificultades hemos superado juntos durante este tiempo.

En segundo lugar, expreso mi gratitud a mi profesor guía, el Dr. Jhon Vidarte Olivera. Agradezco sus enseñanzas, su enorme paciencia, sus consejos y el apoyo brindado en los momentos difíciles que pasé durante mis estudios. Ha sido un gusto tenerlo como profesor desde mi primer año de magíster hasta el último, en su rol de profesor guía. Muchas gracias, profesor, por ser una excelente persona.

En tercer lugar, agradezco a los miembros de la Iglesia Metodista Pentecostal de Chile Valle Hermoso de Concepción. He quedado impresionado con el apoyo que ellos nos han entregado a nosotros como familia en menos de un año de conocernos.

En cuarto lugar, expreso mi agradecimiento a mis profesores de posgrado: el Dr. Sergio Caucao, la Dra. Johanna García, el Dr. Marco Uribe, el Dr. Abraham Solar y el Dr. Abner Poza, por sus conocimientos, apoyo, disciplina, gestiones, paciencia y sabios consejos a lo largo de mi formación. También quiero agradecer al Dr. Luis Gatica, quien, aunque no fue mi profesor, me apoyó y orientó durante mi postulación al programa.

En quinto lugar, agradezco a mis profesoras de pregrado, la Dra. Paula Verdugo y la Dra. Ximena Colipán, por el apoyo entregado al momento de postular a este programa. A la Dra. Jessica Gatica, por el apoyo brindado en un momento crítico de mis estudios de pregrado y por recordarme la importancia de la perseverancia y la superación, ya que todo trabajo permanente y serio siempre trae buenos resultados.

Finalmente, agradezco a la Universidad Católica de la Santísima Concepción por la Beca de Arancel 100 % y la Beca de Alimentación que me fueron otorgadas durante mis estudios de posgrado. Sin su apoyo, no hubiera sido posible llevar a cabo este programa.

Esta investigación fue realizada con el apoyo financiero de ANID-Chile a través del Proyecto FONDECYT de Iniciación N° 11240582, cuyo investigador responsable es el Dr. Jhon Edder Vidarte Olivera. Su contribución ha sido fundamental para alcanzar este logro y completar mi formación académica.

A todos y cada uno, mi más profundo agradecimiento.

Resumen

En esta tesis, estudiamos la existencia de bifurcaciones de soluciones periódicas en Hamiltonianos de tipo polinómico en resonancia $1 : 1$. Específicamente, caracterizamos familias de perturbaciones de grado tres y cuatro en las cuales una bifurcación periódica de tipo centro-silla o pitchfork toman lugar. Para abordar nuestro estudio utilizamos formas normales, reducción simpléctica y el método del promedio, polinomios invariantes y algunos resultados de la teoría bifurcaciones en sistemas Hamiltonianos.

Abstract

In this thesis, we study the existence of bifurcations of periodic solutions in Hamiltonians of polynomial type in 1:1 resonance. Specifically, we characterize the families of perturbations of degrees three and four in which a periodic bifurcation of center-saddle and pitchfork type takes place. To approach our study, we use normal forms, symplectic reduction and averaging method, invariant polynomials, and some results of the bifurcation theory in Hamiltonian systems.

Índice general

Resumen	VII
Abstract	IX
Introducción	1
1. Sistemas Hamiltonianos	5
1.1. Definición y ejemplos	5
1.2. Transformaciones simplécticas	7
1.3. Matrices Hamiltonianas	12
1.4. Matrices simplécticas	15
1.5. El Algoritmo de Lie-Deprit	16
1.5.1. Normalización en variables tipo Reeb	19
2. Teoría de Reducción y Teoría de Bifurcaciones	21
2.1. Teorema de Reducción General	21
2.2. Invariantes para la resonancia $1 : 1$	23
2.2.1. Invariantes versus variables tipo Reeb	25
2.3. Teoría de Bifurcaciones	26
2.3.1. Bifurcaciones de equilibrios	26
2.3.2. Resultados sobre bifurcaciones de soluciones periódicas	32
2.3.3. Bifurcaciones de soluciones periódicas vía reducción	35
3. Bifurcaciones periódicas en Hamiltonianos polinómicos	41
3.1. Bifurcaciones periódicas pitchfork	41
3.1.1. Perturbaciones Cúbicas	42

3.1.2. Perturbaciones Cuárticas	51
3.2. Bifurcaciones periódicas centro-silla	56
3.2.1. Perturbaciones Cúbicas	56
3.2.2. Perturbaciones Cuárticas	60
Conclusiones y trabajo futuro	63
Bibliografía	66

Introducción

La dinámica de los sistemas Hamiltonianos ha sido un tema de gran interés tanto en física como en matemática a lo largo de los siglos. Un aspecto fundamental en estos sistemas es la existencia de soluciones periódicas, las cuales juegan un papel crucial en la comprensión de la estructura a largo plazo del sistema [5, 9, 2]. Para el estudio de estos sistemas, se han utilizado técnicas derivadas de las teorías del promedio [25, 22], de reducción [10, 25], de formas normales [11] y de la teoría KAM [6]. Entre ellas, la técnica de reducción es empleada para remover las simetrías en sistemas Hamiltonianos [10], y en su versión forma moderna, tiene su origen en los trabajos de Arnold [6], Moser [22], Meyer [20], Cushman [10], Marsden [4] y Weinstein [18], manteniéndose como un campo de investigación activo [21]. La teoría de reducción ha sido aplicada, entre otros, al estudio de la dinámica en problemas de n cuerpos [19] y en modelos galácticos [12, 2].

En Dinámica Galáctica [7], muchos estudios están dirigidos a comprender el comportamiento cerca del núcleo de galaxias estelares [3]. Estos problemas suelen modelarse mediante Hamiltonianos con dos grados de libertad, que incluyen parámetros que desempeñan un rol importante en los cambios cualitativos de la dinámica del sistema. Estos cambios están relacionados con la variación en el número de soluciones periódicas y el cambio de su estabilidad, lo que genera bifurcaciones de soluciones periódicas [8, 16, 27]. Además, muchos Hamiltonianos galácticos son perturbaciones polinómicas de osciladores armónicos en resonancia 1:1, provenientes de expansiones de Taylor alrededor de puntos de equilibrio. Entre los aspectos dinámicos más relevantes en estos modelos, se destacan el estudio de la integrabilidad [1], la existencia de soluciones periódicas [17] y de toros KAM [2]. Aunque existe literatura que aborda estos temas utilizando diversas técnicas, el estudio de las bifurcaciones de soluciones periódicas mediante la técnica de reducción ha sido poco tratado. Una

excepción es el trabajo de Meyer, Palacián y Yanguas [21], que trata en parcialmente este problema.

Para el estudio de sistemas Hamiltonianos con simetrías (exactas o aproximadas), la técnica de reducción [10] resulta útil para “remover” la simetría y obtener el espacio reducido. Este espacio reducido puede parametrizarse mediante polinomios invariantes o integrales de movimiento asociadas a la simetría.

Un aspecto fundamental relacionado con la teoría de reducción es la reconstrucción del flujo del sistema de partida a partir del análisis del sistema reducido. Si bien la reconstrucción es esencial en el análisis cualitativo de un sistema dinámico con simetrías [19, 21], este proceso es delicado, ya que no es evidente que las estructuras encontradas en el sistema reducido prevalezcan en el sistema original. Por ejemplo, no está claro si las bifurcaciones de equilibrios en el sistema reducido se reconstruyen como bifurcaciones de soluciones periódicas en el sistema original. En la literatura, gran parte de los trabajos sobre bifurcaciones periódicas en sistemas Hamiltonianos emplean la aplicación de Poincaré para identificar los tipos de bifurcaciones [20]. Otros, determinan la forma normal del Hamiltoniano, ya que cada tipo de bifurcación está asociada a una forma específica del Hamiltoniano normalizado [16]. Sin embargo, en la práctica, tanto encontrar la aplicación de Poincaré como obtener la forma normal del Hamiltoniano resultan tareas complejas, especialmente cuando el Hamiltoniano contiene parámetros.

En esta tesis, abordamos el estudio de las bifurcaciones periódicas centro-silla y pitchfork en sistemas Hamiltonianos cuya función Hamiltoniana está dada por

$$\mathcal{H}_\varepsilon(x, y) = \frac{1}{2}(x_1^2 + y_1^2) + \frac{1}{2}(x_2^2 + y_2^2) + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k H_k(x, y), \quad (0.0.1)$$

donde H_k es un polinomio homogéneo de grado $k + 2$ y ε es un pequeño parámetro.

Nuestro análisis se basa en un enfoque alternativo para estudiar las bifurcaciones periódicas, utilizando la teoría de reducción en dos etapas: reducción y reconstrucción. En la primera etapa, reducimos la simetría del oscilador normalizando el Hamiltoniano (0.0.1) y truncándolo hasta términos de grado 4. Luego, escribimos el Hamiltoniano en coordenadas tipo Reeb [2, 28, 29], fijamos el nivel de energía $\mathcal{H}_0 = (x_1^2 + y_1^2)/2 + (x_2^2 + y_2^2)/2 = h$ y obtenemos el Hamiltoniano reducido sobre $\mathbb{C}\mathbb{P}_h = \mathcal{H}_0^{-1}(h)/S^1$, el cual tiene un grado de libertad. En el sistema reducido, deter-

minamos los equilibrios e identificamos sus posibles bifurcaciones de tipo centro-silla y pitchfork. En la segunda etapa, reconstruimos las bifurcaciones en el sistema original, verificando si las bifurcaciones de equilibrios encontradas en el sistema reducido se corresponden con bifurcaciones periódicas del mismo tipo en el sistema original. Para esto, enunciamos dos Teoremas sobre bifurcaciones periódicas, usando las ideas de reducción y reconstrucción. Estos resultados están formulados en un lenguaje moderno, basados en el sistema reducido, y se obtienen adaptando algunos resultados clásicos sobre bifurcaciones periódicas que utilizan la forma normal del Hamiltoniano o la aplicación de Poincaré asociada a su flujo.

Uno de los objetivos de esta tesis es determinar condiciones sobre los parámetros del Hamiltoniano (0.0.1) que aseguren que las bifurcaciones de equilibrios en el sistema reducido se reconstruyan como bifurcaciones periódicas en el sistema original. Un segundo objetivo consiste en caracterizar las familias de Hamiltonianos en resonancia 1 : 1 con la menor cantidad de términos y de grado mínimo, donde puedan ocurrir bifurcaciones periódicas del tipo centro-silla y pitchfork.

Esta tesis está organizada en tres capítulos. En el Capítulo 1, se hace una revisión de algunos conceptos fundamentales de sistemas Hamiltonianos autónomos, además de una descripción del método de Lie-Deprit, herramienta esencial para la simplificación de sistemas Hamiltonianos. En el Capítulo 2, presenta un resumen de las técnicas más relevantes para el estudio de soluciones periódicas, como la teoría del promedio y la teoría de reducción. En este capítulo también se enuncian los principales resultados sobre bifurcaciones de puntos de equilibrio y soluciones periódicas, incluyendo dos teoremas sobre bifurcaciones periódicas en Hamiltonianos en resonancia 1 : 1 que utilizan las ideas de reducción y reconstrucción. El Capítulo 3, está dedicado a la caracterización de familias de Hamiltonianos, que consisten de un oscilador en resonancia 1 : 1 más un potencial cúbico y cuártico, donde ocurren bifurcaciones de soluciones periódicas tipo pitchfork y centro-silla. Para la bifurcación pitchfork, se considera una familia de Hamiltonianos con potencial cúbico y cuártico que presenta una simetría de reflexión, mientras que para la bifurcación centro-silla se analiza un potencial cúbico y cuártico genérico. En ambos casos, se utilizan las variables de Reeb y los teoremas sobre bifurcaciones periódicas desarrollados en la Sección 2.3.3.

Capítulo 1

Sistemas Hamiltonianos

En este capítulo se introducen los principales conceptos y propiedades de los sistemas Hamiltonianos autónomos y transformaciones simplécticas, tomando como principal referencia el libro de Meyer [20]. También se incluye una breve descripción del método de normalización de Lie-Deprit [11], fundamental para el análisis y simplificación de estos sistemas.

1.1. Definición y ejemplos

Definición 1.1.1 *Un sistema Hamiltoniano autónomo con n grados de libertad es un sistema de $2n$ ecuaciones diferenciales ordinarias de la forma:*

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{q}} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{p}} = \mathcal{H}_{\mathbf{p}}, \\ \dot{\mathbf{p}} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{q}} = -\mathcal{H}_{\mathbf{q}}, \end{cases} \quad (1.1.1)$$

donde $\mathcal{H}: \mathcal{O} \subset \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función de clase $\mathcal{C}^1(\mathcal{O})$ definida en un subconjunto abierto \mathcal{O} de \mathbb{R}^{2n} . La función \mathcal{H} se denomina el Hamiltoniano del sistema y $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_n)$ y $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n)$ son los vectores posición y momento, respectivamente.

Ejemplo 1.1.2 *Considere el sistema planar*

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x, y), \\ \frac{dy}{dt} = g(x, y). \end{cases}$$

Para determinar si el sistema anterior es Hamiltoniano o no, se debe verificar si existe una función $\mathcal{H}: \mathcal{O} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\begin{cases} f(x, y) = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial y}(x, y), \\ g(x, y) = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x}(x, y), \end{cases}$$

para todo $(x, y) \in \mathcal{O}$. Si tal función existe y posee segundas derivadas parciales continuas, entonces

$$\frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial y \partial x}.$$

Por lo tanto, si el sistema es Hamiltoniano, entonces

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial y \partial x} = -\frac{\partial g}{\partial y},$$

de donde resulta que $\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{\partial g}{\partial y}$, esto es,

$$\operatorname{div}(f, g) = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} = 0.$$

El Hamiltoniano del sistema es dado por

$$\mathcal{H}(x, y) = \int f(x, y) dy + \phi(x),$$

donde $\phi'(x) = -g(x, y) - \frac{\partial}{\partial x} \int f(x, y) dy$.

Ejemplo 1.1.3 (Oscilador armónico no amortiguado) El sistema del oscilador armónico no amortiguado es el siguiente:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = v, \\ \frac{dv}{dt} = -qy, \end{cases}$$

donde $q > 0$ es una constante.

Note que $f(y, v) = v$ y $g(y, v) = -qv$. Luego, $\frac{\partial f}{\partial y} = 0 = -\frac{\partial g}{\partial v}$ y el sistema es

Hamiltoniano. Para encontrar \mathcal{H} usamos la relación

$$\mathcal{H}(y, v) = \int v dv + \phi(y) = \frac{1}{2}v^2 + \phi(y),$$

de donde resulta

$$\phi'(y) = -(-qv) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{2}v^2 \right) = qv.$$

Integrando $\phi'(y)$ con respecto a y , se obtiene $\phi(y) = \frac{1}{2}qy^2$. Por lo tanto, el Hamiltoniano del sistema es

$$\mathcal{H}(y, v) = \frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{2}qy^2.$$

Sea $\mathbf{z} = (\mathbf{q}, \mathbf{p})$ y considere la matriz antisimétrica

$$\mathbb{J} = \begin{bmatrix} O & I \\ -I & O \end{bmatrix},$$

donde O y I son las matrices cero e identidad de orden n , respectivamente. Con esta notación, podemos escribir el sistema Hamiltoniano (1.1.1) en la forma

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbb{J}\nabla\mathcal{H}(\mathbf{z}). \quad (1.1.2)$$

En particular, cuando \mathcal{H} es una forma cuadrática, tenemos la siguiente definición.

Definición 1.1.4 *Un sistema Hamiltoniano lineal y autónomo es de la forma*

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{A}\mathbf{z} = \mathbb{J}S\mathbf{z}, \quad (1.1.3)$$

donde S es una matriz simétrica. En este caso, el Hamiltoniano asociado al sistema lineal es la forma cuadrática

$$\mathcal{H}(\mathbf{z}) = \frac{1}{2}\mathbf{z}^T S\mathbf{z}.$$

1.2. Transformaciones simplécticas

Definición 1.2.1 *Una aplicación $T: \mathcal{O} \subset \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$, donde \mathcal{O} es abierto es una transformación μ -simpléctica si su matriz Jacobiana $DT(\mathbf{z})$ satisface*

$$[DT(\mathbf{z})]^T \mathbb{J} DT(\mathbf{z}) = \mu \mathbb{J}.$$

Las transformaciones simplécticas tienen la propiedad de preservar la estructura Hamiltoniana.

Teorema 1.2.1 *La transformación μ -simpléctica $T: \mathcal{O} \subset \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}, \zeta = T(\mathbf{z})$ transforma el Hamiltoniano (1.1.2) en*

$$\dot{\zeta} = \mathbb{J}\nabla\mathcal{K}(\zeta),$$

donde el nuevo Hamiltoniano \mathcal{K} es dado por

$$\mathcal{K}(\zeta) = \mu\mathcal{H}(T^{-1}(\zeta)).$$

Demostración. De $\zeta = T(\mathbf{z})$ se tiene

$$\begin{aligned} \dot{\zeta} &= \frac{d}{dt}T(\mathbf{z}) \\ &= D_{\mathbf{z}}T(\mathbf{z})\dot{\mathbf{z}} \\ &= D_{\mathbf{z}}T(\mathbf{z})\mathbb{J}\nabla\mathcal{H}(\mathbf{z}) \\ &= D_{\mathbf{z}}T(\mathbf{z})\mathbb{J}(D_{\mathbf{z}}\mathcal{H}(\mathbf{z}))^T \end{aligned}$$

Usando regla de la cadena y definiendo $\hat{\mathcal{H}}(\zeta) = \mathcal{H}(T^{-1}(\zeta))$ se sigue que

$$\begin{aligned} \dot{\zeta} &= D_{\mathbf{z}}T(\mathbf{z})\mathbb{J}[D_{\zeta}\hat{\mathcal{H}}(\zeta)D_{\mathbf{z}}T(\mathbf{z})]^T \\ &= D_{\mathbf{z}}T(\mathbf{z})\mathbb{J}[D_{\mathbf{z}}T(\mathbf{z})]^T(D_{\zeta}\hat{\mathcal{H}}(\zeta))^T. \end{aligned}$$

Como T es μ -simpléctica, entonces $D_{\mathbf{z}}T(\mathbf{z})\mathbb{J}[D_{\mathbf{z}}T(\mathbf{z})]^T = \mu\mathbb{J}$. Por lo tanto,

$$\dot{\zeta} = \mu\mathbb{J}(D_{\zeta}\hat{\mathcal{H}}(\zeta))^T = \mu\mathbb{J}\nabla\hat{\mathcal{H}}(\zeta).$$

Haciendo $\mathcal{K}(\zeta) = \mu\hat{\mathcal{H}}(\zeta)$ resulta

$$\dot{\zeta} = \mathbb{J}\nabla\mathcal{K}(\zeta).$$

□

En lo que sigue, usaremos la notación $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$, $\mathbf{z} = (z_1, z_2)$, $\bar{\mathbf{z}} = (\bar{z}_1, \bar{z}_2)$.

Ejemplo 1.2.2 (Variables complejas) *La aplicación*

$$\begin{aligned}\Psi: \mathbb{R}^4 &\longrightarrow \mathbb{C}^4 \\ (\mathbf{x}, \mathbf{y}) &\longmapsto \Psi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{z}, \bar{\mathbf{z}}),\end{aligned}$$

donde

$$z_j = x_j + iy_j, \quad \bar{z}_j = x_j - iy_j, \quad j = 1, 2$$

es $-2i$ -simpléctica.

En efecto, la matriz Jacobiana de Ψ en \mathbf{z} es

$$D\Psi(\mathbf{z}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & i & 0 \\ 0 & 1 & 0 & i \\ 1 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -i \end{bmatrix}.$$

Luego,

$$\begin{aligned} [D\Psi(\mathbf{z})]^T \mathbb{J} D\Psi(\mathbf{z}) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ i & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 & -i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & i & 0 \\ 0 & 1 & 0 & i \\ 1 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -i \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2i \\ 2i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2i & 0 & 0 \end{bmatrix} = -2i\mathbb{J}. \end{aligned}$$

Ejemplo 1.2.3 (Escalamiento simpléctico) *Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ no nulos. La aplicación*

$$\begin{aligned}\Psi: \mathbb{R}^4 &\longrightarrow \mathbb{R}^4 \\ (\mathbf{x}, \mathbf{y}) &\longmapsto \Psi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = (\alpha\mathbf{x}, \beta\mathbf{y})\end{aligned}$$

es $\alpha\beta$ -simpléctica.

En efecto, de las relaciones

$$X_1 = \alpha x_1, \quad X_2 = \alpha x_2, \quad Y_1 = \beta y_1, \quad Y_2 = \beta y_2$$

se obtiene la matriz Jacobiana

$$D\Psi(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta \end{bmatrix}.$$

Luego,

$$\begin{aligned} [D\Psi(\mathbf{X}, \mathbf{Y})]^T \mathbb{J} D\Psi(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) &= \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \alpha\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha\beta \\ -\alpha\beta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha\beta & 0 & 0 \end{bmatrix} = \alpha\beta \mathbb{J}. \end{aligned}$$

Ejemplo 1.2.4 (Variables Acción-Ángulo) Sean $\mathbf{I} = (I_1, I_2)$ y $\Phi = (\phi_1, \phi_2)$ y considere $\Omega_1 = \{(\mathbf{I}, \Phi) : I_j \geq 0, 0 \leq \phi_j < 2\pi, j = 1, 2\}$. La aplicación

$$\begin{aligned} \mathcal{M}: \quad \Omega_1 &\longrightarrow \mathbb{R}^4 \\ (\mathbf{I}, \Phi) &\longmapsto \mathcal{M}(\mathbf{I}, \Phi) = (\mathbf{x}, \mathbf{y}), \end{aligned}$$

donde

$$x_j = \sqrt{2I_j} \cos \phi_j, \quad y_j = \sqrt{2I_j} \sen \phi_j, \quad j = 1, 2$$

es simpléctica.

En efecto, la matriz Jacobiana de \mathcal{M} es

$$D\mathcal{M}(\mathbf{I}, \phi) = \begin{bmatrix} \frac{\cos \phi_1}{\sqrt{2I_1}} & 0 & -\sqrt{2I_1} \sen \phi_1 & 0 \\ 0 & \frac{\cos \phi_2}{\sqrt{2I_2}} & 0 & -\sqrt{2I_2} \sen \phi_2 \\ \frac{\sen \phi_1}{\sqrt{2I_1}} & 0 & \sqrt{2I_1} \cos \phi_1 & 0 \\ 0 & \frac{\sen \phi_2}{\sqrt{2I_2}} & 0 & \sqrt{2I_2} \cos \phi_2 \end{bmatrix}$$

y entonces

$$\begin{aligned}
 [DM(\mathbf{I}, \phi)]^T \mathbb{J} DM(\mathbf{I}, \phi) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \text{sen}^2 \phi_1 + \text{cos}^2 \phi_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \text{sen}^2 \phi_2 + \text{cos}^2 \phi_2 \\ -\text{sen}^2 \phi_1 - \text{cos}^2 \phi_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\text{sen}^2 \phi_2 - \text{cos}^2 \phi_2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 &= \mathbb{J},
 \end{aligned}$$

lo que demuestra que la aplicación es simpléctica.

Ejemplo 1.2.5 (Variables tipo Reeb para la resonancia 1 : 1) Considere las transformaciones $T_1: \Omega \mapsto \mathbb{R}^4$ y $T_2: \Omega \mapsto \mathbb{R}^4$ definidas por

$$\begin{aligned}
 x_1 &= \sqrt{2L - Q^2 - P^2} \cos \ell, & y_1 &= \sqrt{2L - Q^2 - P^2} \text{sen} \ell, \\
 x_2 &= Q \cos \ell - P \text{sen} \ell, & y_2 &= P \cos \ell + Q \text{sen} \ell
 \end{aligned} \tag{1.2.1}$$

y

$$\begin{aligned}
 x_1 &= Q \cos \ell - P \text{sen} \ell, & y_1 &= P \cos \ell + Q \text{sen} \ell, \\
 x_2 &= \sqrt{2L - Q^2 - P^2} \cos \ell, & y_2 &= \sqrt{2L - Q^2 - P^2} \text{sen} \ell,
 \end{aligned} \tag{1.2.2}$$

respectivamente, donde $\Omega = \{(L, Q, \ell, P) : Q^2 + P^2 < L, 0 \leq \ell < 2\pi\}$. Estas transformaciones se conocen como **transformaciones tipo Reeb para la resonancia 1 : 1** y corresponden a un caso particular de las transformaciones para sistemas con tres grados de libertad, introducidas en [23]. Las variables definidas en (1.2.1) y (1.2.2) han sido utilizadas en el estudio de la existencia de soluciones periódicas en Hamiltonianos polinómicos en resonancia 1 : 1. Véanse, por ejemplo, las referencias [2, 28] y [29].

En particular, para T_1 con $\zeta = (L, Q, \ell, P)$ se tiene

$$DT_1(\zeta) = \begin{bmatrix} \frac{\cos \ell}{\sqrt{2L - Q^2 - P^2}} & -\frac{Q \cos \ell}{\sqrt{2L - Q^2 - P^2}} & -\sqrt{2L - Q^2 - P^2} \text{sen} \ell & -\frac{P \cos \ell}{\sqrt{2L - Q^2 - P^2}} \\ 0 & \cos \ell & -Q \text{sen} \ell - P \cos \ell & -\text{sen} \ell \\ \frac{\text{sen} \ell}{\sqrt{2L - Q^2 - P^2}} & -\frac{Q \text{sen} \ell}{\sqrt{2L - Q^2 - P^2}} & \sqrt{2L - Q^2 - P^2} \cos \ell & -\frac{P \text{sen} \ell}{\sqrt{2L - Q^2 - P^2}} \\ 0 & \text{sen} \ell & -P \text{sen} \ell + Q \cos \ell & \cos \ell \end{bmatrix}$$

y después de algunos cálculos se obtiene que

$$[DT_1(\zeta)]^T \mathbb{J} DT_1(\zeta) = \mathbb{J},$$

lo que demuestra que la transformación es simpléctica. De manera similar se prueba que T_2 es simpléctica.

1.3. Matrices Hamiltonianas

Definición 1.3.1 Una matriz $A \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R} \text{ o } \mathbb{C})$ es Hamiltoniana si

$$A^T \mathbb{J} + \mathbb{J}A = 0. \quad (1.3.1)$$

El espacio de matrices Hamiltonianas reales se denota por $\mathfrak{sp}(2n, \mathbb{R})$.

En particular, una matriz $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ es Hamiltoniana si

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} -c & a \\ -d & b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c & d \\ -a & -b \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & a+d \\ -(a+d) & 0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

En consecuencia, A es una matriz Hamiltoniana si y sólo si $a + d = 0$, es decir, $\text{tr}(A) = 0$.

Teorema 1.3.1 Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- i) A es Hamiltoniana.
- ii) $A = \mathbb{J}R$ donde R es simétrica.
- iii) $\mathbb{J}A$ es simétrica.

Más aún, si A y B son Hamiltonianas, entonces lo son A^T , αA ($\alpha \in \mathbb{R} \vee \alpha \in \mathbb{C}$), $A \pm B$ y $[A, B] \equiv AB - BA$.

Demostración.

$i) \rightarrow ii)$ Supongamos que A es una matriz Hamiltoniana. Entonces de la definición se sigue que $A^T \mathbb{J} = -\mathbb{J}A$. Luego, tomando $R = -\mathbb{J}A$ se tiene que $A = \mathbb{J}R$ y

$$R^T = (-\mathbb{J}A)^T = -A^T \mathbb{J}^T = A^T \mathbb{J} = -\mathbb{J}A = R.$$

$ii) \rightarrow iii)$ Sea $A = \mathbb{J}R$ con R simétrica. Entonces $\mathbb{J}A = -R$ de donde se sigue que

$$(\mathbb{J}A)^T = (-R)^T = -R^T = -R = -\mathbb{J}A.$$

En consecuencia, $\mathbb{J}A$ es simétrica.

$iii) \rightarrow i)$ Supongamos que $\mathbb{J}A$ es simétrica, esto es, $(\mathbb{J}A)^T = \mathbb{J}A$. Luego,

$$A^T \mathbb{J} + \mathbb{J}A = A^T \mathbb{J} + (\mathbb{J}A)^T = A^T \mathbb{J} - A^T \mathbb{J} = 0,$$

lo que demuestra que A es Hamiltoniana.

Ahora, mostraremos que si A y B son matrices Hamiltonianas entonces A^T y $[A, B] = AB - BA$ también lo son. Las propiedades restantes se demuestran de forma similar.

- De la relación

$$(A^T)^T \mathbb{J} + \mathbb{J}A^T = -\mathbb{J}^2 A \mathbb{J} - \mathbb{J}A^T \mathbb{J}^2 = -\mathbb{J}(\mathbb{J}A + A^T \mathbb{J})\mathbb{J} = 0.$$

se sigue que A^T es Hamiltoniana.

- Como A y B son Hamiltonianas entonces se cumple que

$$\mathbb{J}A = -A^T \mathbb{J} \quad \text{y} \quad \mathbb{J}B = -B^T \mathbb{J}.$$

Multiplicando a derecha por B y A ambos lados de cada ecuación, respectivamente se obtiene

$$\mathbb{J}AB = -A^T \mathbb{J}B \quad \text{y} \quad -\mathbb{J}BA = B^T \mathbb{J}A.$$

Luego,

$$\begin{aligned}
[A, B]^T \mathbb{J} + \mathbb{J}[A, B] &= (AB - BA)^T \mathbb{J} + \mathbb{J}(AB - BA) \\
&= (B^T A^T - A^T B^T) \mathbb{J} + \mathbb{J}(AB - BA) \\
&= (B^T A^T \mathbb{J} - \mathbb{J}BA) + (-A^T B^T \mathbb{J} + \mathbb{J}AB) \\
&= (B^T A^T \mathbb{J} + B^T \mathbb{J}A) + (-A^T B^T \mathbb{J} - A^T \mathbb{J}B) \\
&= B^T (A^T \mathbb{J} + \mathbb{J}A) - A^T (B^T \mathbb{J} + \mathbb{J}B) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $[A, B]$ es Hamiltoniana.

□

Proposición 1.3.2 *El polinomio característico de una matriz Hamiltoniana real A es un polinomio par. De este modo, si λ es un valor propio de A , entonces lo son $-\lambda$, $\bar{\lambda}$, $-\bar{\lambda}$.*

Demostración. Como el polinomio característico $\det(A - \lambda I)$ de una matriz real tiene coeficientes reales entonces si λ es un valor propio de A , $\bar{\lambda}$ también lo es. De este modo, resta probar que $\det(A - \lambda I) = \det(A + \lambda I)$. Como A es una matriz Hamiltoniana entonces $A = \mathbb{J}A^T \mathbb{J}$. Luego, podemos escribir

$$\begin{aligned}
\det(A - \lambda I) &= \det(\mathbb{J}A^T \mathbb{J} + \lambda \mathbb{J} \mathbb{J}) \\
&= \det(\mathbb{J}(A^T + \lambda I) \mathbb{J}) \\
&= \det(\mathbb{J}) \det(A^T + \lambda I) \det(\mathbb{J}) \\
&= \det(A^T + \lambda I).
\end{aligned}$$

Notando que $A^T + \lambda I = (A + \lambda I)^T$ se obtiene

$$\det(A - \lambda I) = \det(A + \lambda I)^T = \det(A + \lambda I).$$

Así, si λ es un valor propio de A , entonces $-\lambda$ también lo es.

□

Definición 1.3.3 (Corchete de Poisson) *Sean F y G dos funciones diferenciables de un abierto $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^{2n}$ en \mathbb{R} . Se define el corchete de Poisson de F y G como:*

$$\{F, G\} = \nabla F^T \mathbb{J} \nabla G = \frac{\partial F^T}{\partial \mathbf{q}} \frac{\partial G}{\partial \mathbf{p}} - \frac{\partial F^T}{\partial \mathbf{p}} \frac{\partial G}{\partial \mathbf{q}} = \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial F}{\partial q_j} \frac{\partial G}{\partial p_j} - \frac{\partial F}{\partial p_j} \frac{\partial G}{\partial q_j} \right).$$

1.4. Matrices simplécticas

Definición 1.4.1 Una matriz $S \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R} \text{ o } \mathbb{C})$ es μ -simpléctica si

$$S^T \mathbb{J} S = \mu \mathbb{J}.$$

En particular, si $\mu = 1$, se dice que S es una matriz simpléctica.

El conjunto de matrices simplécticas se denota por $Sp(2n, \mathbb{R})$.

Teorema 1.4.1 Si S es μ -simpléctica, entonces S es no singular y se verifica

$$S^{-1} = -\mu^{-1} \mathbb{J} S^T \mathbb{J}. \quad (1.4.1)$$

Si S y R son simplécticas con multiplicador μ y ν , respectivamente, entonces S^T , S^{-1} y SR son simplécticas con multiplicador μ , μ^{-1} y $\mu\nu$ respectivamente

Demostración. Como S es μ -simpléctica, entonces $S^T \mathbb{J} S = \mu \mathbb{J}$, de donde resulta

$$\det(S)^2 = \det(S^T \mathbb{J} S) = \mu^{2n} \det(\mathbb{J}) = \mu^{2n},$$

lo que implica que $\det(S) \neq 0$. Por lo tanto, S es no singular. De la relación $S^T \mathbb{J} S = \mu \mathbb{J}$, se sigue que

$$S^{-1} \mathbb{J}^{-1} (S^T)^{-1} = (S^T \mathbb{J} S)^{-1} = (\mu \mathbb{J})^{-1} = \mu^{-1} \mathbb{J}^{-1} = -\mu^{-1} \mathbb{J}.$$

Multiplicando a la derecha por $S^T \mathbb{J}$ en ambos lados de la ecuación resulta

$$S^{-1} = -\mu^{-1} \mathbb{J} S^T \mathbb{J}.$$

Ahora probaremos que S^{-1} sea μ^{-1} -simpléctica. En efecto, usando (1.4.1) se tiene

$$\begin{aligned} (S^{-1})^T \mathbb{J} S^{-1} &= (S^{-1})^T \mathbb{J} (-\mu^{-1} \mathbb{J} S^T \mathbb{J}) \\ &= \mu^{-1} (S^{-1})^S S^T \mathbb{J} \\ &= \mu^{-1} (SS^{-1})^T \mathbb{J} \\ &= \mu^{-1} \mathbb{J}. \end{aligned}$$

Para demostrar que S^T es μ simpléctica se procede de forma similar.

Finalmente, mostraremos que si S es μ -simpléctica y R es ν -simpléctica entonces SR es $\mu\nu$ -simpléctica. Agrupando en forma conveniente se tiene

$$(SR)^T \mathbb{J} (SR) = R^T (S^T \mathbb{J} S) R = R^T (\mu \mathbb{J}) R = \mu (R^T \mathbb{J} R) = \mu (\nu \mathbb{J}) = \mu\nu \mathbb{J}.$$

En consecuencia, SR es $\mu\nu$ -simpléctica. \square

Proposición 1.4.2 *El polinomio característico de una matriz simpléctica real S es un polinomio recíproco. De este modo, si λ es un valor propio de A , entonces lo son λ^{-1} , $\bar{\lambda}$ y $\bar{\lambda}^{-1}$.*

Demostración. Como $\det(S - \lambda I)$ es un polinomio con coeficientes reales, si λ es un valor propio de S , $\bar{\lambda}$ lo es. Resta probar que $\det(S - \lambda I)$ es un polinomio recíproco, esto es, $\det(S - \lambda I) = \pm \lambda^{2n} \det(S - \lambda^{-1} I)$.

En efecto, como S es simpléctica entonces $S^T \mathbb{J} S = \mathbb{J}$. Luego, usando la relación $\mathbb{J}^2 = -I$ se tiene

$$\begin{aligned} \det(S - \lambda I) &= \det(-\mathbb{J}^2 S + \lambda \mathbb{J}^2) \\ &= \det(\mathbb{J}) \det(\lambda \mathbb{J} - \mathbb{J} S) \\ &= \det(\lambda S^T \mathbb{J} S - \mathbb{J} S) \\ &= \det \left[\left(S^T - \frac{1}{\lambda} I \right) (\lambda \mathbb{J} S) \right] \\ &= \det \left(S^T - \frac{1}{\lambda} I \right) \det(\lambda \mathbb{J} S) \\ &= \pm \lambda^{2n} \det \left(S - \frac{1}{\lambda} I \right)^T \\ &= \pm \lambda^{2n} \det(S - \lambda^{-1} I). \end{aligned}$$

En consecuencia, si λ es un valor propio de S entonces λ^{-1} es un valor propio de S . \square

1.5. El Algoritmo de Lie-Deprit

En esta sección, describiremos un procedimiento para construir transformaciones simplécticas cercanas a la identidad (transformaciones de Lie), que permiten llevar un sistema Hamiltoniano a su forma más simple, conocida como forma normal.

Suponga que $X(y, \varepsilon)$ es una transformación simpléctica próxima de la identidad,

o equivalentemente, $X(y, \varepsilon)$ es la solución del sistema Hamiltoniano

$$\frac{dx}{d\varepsilon} = \mathbb{J}\nabla\mathcal{W}(x, \varepsilon), \quad x(0) = y. \quad (1.5.1)$$

Sea $\mathcal{H}(x, \varepsilon)$ el Hamiltoniano inicial, $\mathcal{W}(x, \varepsilon)$ la función generadora y $\mathcal{K}(y, \varepsilon) = \mathcal{H}(X(y, \varepsilon), \varepsilon)$ el Hamiltoniano transformado. En particular,

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(x, \varepsilon) &= \mathcal{H}_*(x, \varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{\varepsilon^i}{i!} \right) \mathcal{H}_i^0(x), \\ \mathcal{K}(y, \varepsilon) &= \mathcal{H}^*(y, \varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{\varepsilon^i}{i!} \right) \mathcal{H}_0^i(y), \\ \mathcal{W}(x, \varepsilon) &= \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{\varepsilon^i}{i!} \right) \mathcal{W}_{i+1}(x), \end{aligned}$$

Note que $\mathcal{H}^*(y, \varepsilon) = \mathcal{H}_*(X(y, \varepsilon), \varepsilon)$, donde $X(y, \varepsilon)$ es la solución de (1.5.1).

A continuación, definamos el Operador diferencial \mathcal{D} por

$$\mathcal{D}F(x, \varepsilon) = \frac{\partial F}{\partial \varepsilon}(x, \varepsilon) + \{F, W\}(x, \varepsilon),$$

el cual satisface

$$\frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left(F(x, \varepsilon) \Big|_{x=X(y, \varepsilon)} \right) = \mathcal{D}F(x, \varepsilon) \Big|_{x=X(y, \varepsilon)}.$$

Introduciendo las funciones auxiliares $\mathcal{H}^0 = \mathcal{H}$, $\mathcal{H}^i = \mathcal{D}\mathcal{H}^{i-1}$, $i \geq 1$, con expansiones

$$\mathcal{H}^i(x, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\varepsilon^k}{k!} \right) \mathcal{H}_k^i(x).$$

se verifica que

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^i(x, \varepsilon) &= \mathcal{D} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\varepsilon^k}{k!} \right) \mathcal{H}_k^{i-1}(x) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\varepsilon^{k-1}}{(k-1)!} \right) \mathcal{H}_k^{i-1}(x) + \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\varepsilon^k}{k!} \right) \mathcal{H}_k^{i-1}(x), \sum_{s=0}^{\infty} W_{s+1} \right\} \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{\varepsilon^j}{j!} \right) \left(\mathcal{H}_{j+1}^{i-1} + \sum_{k=0}^j \binom{j}{k} \{ \mathcal{H}_{j-k}^{i-1}, W_{k+1} \} \right). \end{aligned}$$

Luego, el Hamiltoniano normalizado es

$$\mathcal{K}(y, \varepsilon) = \mathcal{H}^*(y, \varepsilon) = \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{\varepsilon^j}{j!} \right) \mathcal{H}_0^j(y).$$

El Método de transformaciones de Lie introduce funciones auxiliares \mathcal{H}_j^i , $i = 0, 1, 2, \dots$, $j = 1, 2, \dots$ las cuales satisfacen las identidades recursivas

$$\mathcal{H}_j^i = \mathcal{H}_{j+1}^{i-1} + \sum_{k=0}^j \binom{j}{k} \{ \mathcal{H}_{j-k}^{i-1}, W_{k+1} \}, \quad (1.5.2)$$

donde $\{ , \}$ representa el Corchete de Poisson usual. La interdependencia de las funciones \mathcal{H}_j^i puede ser entendida fácilmente considerando el siguiente arreglo triangular

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & & & \mathcal{H}_0^0 \\ & & & & & & \downarrow \\ & & & & & & \mathcal{H}_1^0 \rightarrow \mathcal{H}_0^1 \\ & & & & & & \downarrow \qquad \downarrow \\ & & & & & & \mathcal{H}_2^0 \rightarrow \mathcal{H}_1^1 \rightarrow \mathcal{H}_0^2 \\ & & & & & & \downarrow \qquad \downarrow \qquad \downarrow \end{array} \quad (1.5.3)$$

El arreglo (1.5.3) es usualmente conocido como **triángulo de Lie**.

De las dos primeras etapas del triángulo de Lie, encontramos que los términos del Hamiltoniano normalizado hasta orden $O(\varepsilon^2)$ pueden ser determinados de las relaciones

$$\begin{aligned} \diamond \mathcal{H}_0^1 &= \mathcal{H}_1^0 + \{ \mathcal{H}_0^0, W_1 \}, \\ \diamond \mathcal{H}_0^2 &= \mathcal{H}_1^1 + \{ \mathcal{H}_0^1, W_1 \} \\ &= \mathcal{H}_2^0 + \{ \mathcal{H}_1^0, W_1 \} + \{ \mathcal{H}_0^0, W_2 \} + \{ \mathcal{H}_0^1, W_1 \}. \end{aligned}$$

Definición 1.5.1 *El Hamiltoniano $\mathcal{K}(y, \varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{\varepsilon^i}{i!} \right) \mathcal{H}_0^i(y)$ está en forma normal con respecto a \mathcal{H}_0^0 si $\{ \mathcal{H}_0^i, \mathcal{H}_0^0 \} = 0$ para todo i .*

1.5.1. Normalización en variables tipo Reeb

Cualquier Hamiltoniano polinómico de grado menor o igual a cuatro en resonancia 1 : 1 puede ser expresado en variables tipo Reeb en la forma

$$\mathcal{H}_\varepsilon(L, Q, \ell, P) = L + \varepsilon H_1(L, Q, \ell, P) + \varepsilon^2 H_2(L, Q, \ell, P). \quad (1.5.4)$$

Usando el Método de Lie-Deprit, encontramos que la forma normal de (1.5.4) con respecto a L hasta términos de orden ε^2 viene dada por

$$\mathcal{H}(L, Q, \ell, P) = L + \varepsilon^2 \mathcal{H}_2(L, Q, P) + O(\varepsilon^4), \quad (1.5.5)$$

donde \mathcal{H}_2 es un “promedio” con respecto a la variable angular ℓ dado por

$$2\mathcal{H}_2 = \overline{H_2} + \overline{\{H_1, W_1\}} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (H_2 + \{H_1, W_1\}) d\ell, \quad (1.5.6)$$

con $W_1 = - \int^\ell H_1 d\ell$ y donde el corchete para dos funciones f, g viene dado por

$$\{f, g\} = \frac{\partial f}{\partial L} \frac{\partial g}{\partial \ell} - \frac{\partial f}{\partial \ell} \frac{\partial g}{\partial L} + \frac{\partial f}{\partial Q} \frac{\partial g}{\partial P} - \frac{\partial f}{\partial P} \frac{\partial g}{\partial Q}.$$

Capítulo 2

Teoría de Reducción y Teoría de Bifurcaciones

En este capítulo se incluyen los principales resultados de la teoría de reducción y la teoría de bifurcaciones con un enfoque en las bifurcaciones de equilibrios y de soluciones periódicas.

2.1. Teorema de Reducción General

Consideremos el Hamiltoniano autónomo con n grados de libertad

$$\mathcal{H}_\varepsilon = \mathcal{H}_0(L) + \varepsilon \mathcal{H}_1(L, \ell, y) + O(\varepsilon^2), \quad (2.1.1)$$

donde $\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1: U \subset \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$ son funciones diferenciables, \mathcal{H}_1 es 2π -periódica en ℓ , $(L, \ell) \in TS^1$, $y \in \mathbb{R}^{2n-2}$ son coordenadas simplécticas y ε es un pequeño parámetro. Supongamos además que $\omega(L) = \partial \mathcal{H}_0 / \partial L \neq 0$.

Las ecuaciones de movimiento asociadas al Hamiltoniano (2.1.1) están dadas por

$$\begin{aligned} \dot{L} &= O(\varepsilon), & \dot{y} &= \varepsilon \mathbb{J} \nabla_y \mathcal{H}_1(L, \ell, y) + O(\varepsilon^2), \\ \dot{\ell} &= -\omega - \frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial L}(L, \ell, y) + O(\varepsilon^2), \end{aligned} \quad (2.1.2)$$

donde \mathbb{J} es la matriz antisimétrica de Poisson. Es claro que para $\varepsilon = 0$, el Hamiltoniano (2.1.1) es integrable y todas sus soluciones son periódicas de periodo

$T(L) = 2\pi/\omega(L)$ y están dadas por

$$\varphi_t^0(L, \ell, y) = (L, -\omega t + \ell, y). \quad (2.1.3)$$

Se define el Promedio de \mathcal{H}_1 sobre el flujo del sistema no perturbado ($\varepsilon = 0$) como la integral

$$\bar{\mathcal{H}}_1 = \frac{1}{T} \int_0^T \mathcal{H}_1(\varphi_s^0) ds. \quad (2.1.4)$$

Efectuando el cambio de variable $u = -\omega t + \ell$, usando la periodicidad de \mathcal{H}_1 y realizando algunas manipulaciones, la integral (2.1.4) asume la forma

$$\bar{\mathcal{H}}_1 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathcal{H}_1(L, \ell, y) d\ell. \quad (2.1.5)$$

De este modo, $\bar{\mathcal{H}}_1$ no depende de θ y en consecuencia $\{\mathcal{H}_0, \bar{\mathcal{H}}_1\} = 0$, donde $\{ , \}$ es el Corchete de Poisson usual para funciones definido por

$$\begin{aligned} \{f, g\} &= \nabla f(L, \ell, y) \mathbb{J} \nabla g(L, \ell, y), \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial L} \frac{\partial g}{\partial \ell} - \frac{\partial f}{\partial \ell} \frac{\partial g}{\partial L} \right) + \sum_{j=1}^{n-1} \left(\frac{\partial f}{\partial y_j} \frac{\partial g}{\partial y_{j+n-1}} - \frac{\partial f}{\partial y_{n+j-1}} \frac{\partial g}{\partial y_j} \right). \end{aligned}$$

Sea un valor fijo h y considere $\mathcal{N}_\varepsilon(h) = \mathcal{H}_\varepsilon^{-1}(h)$. Sobre $\mathcal{N}_0(h) = \mathcal{H}_0^{-1}(h)$, defina la relación de equivalencia “ \sim ” que identifica dos puntos en $\mathcal{N}_0(h)$ que están sobre la misma órbita. Denotemos por $\mathcal{B}(h)$ el espacio cociente $\mathcal{N}_0(h)/\sim$ y por $\pi: \mathcal{N}_0(h) \rightarrow \mathcal{B}(h)$ la proyección.

Teorema 2.1.1 (Reeb 1952) *Si $\bar{\mathcal{H}}$ tiene un punto crítico no degenerado en $\bar{p} \in \mathcal{B}(h)$ con $p \in \mathcal{N}_0(h)$, existen funciones diferenciables $p(\varepsilon)$ y $T(\varepsilon)$ para ε pequeño con $p(0) = p$, $T(0) = T$ y $p(\varepsilon) \in \mathcal{N}_\varepsilon(h)$ y la solución de (2.1.2) pasando por $p(\varepsilon)$ es $T(\varepsilon)$ -periódica. En particular, si los exponentes característicos del punto crítico (esto es, los valores propios de la matriz $A = \mathbb{J}D^2\bar{\mathcal{H}}(\bar{p})$) son $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{2n-2}$, entonces los multiplicadores característicos de la solución periódica pasando por $p(\varepsilon)$ son*

$$1, 1, 1 + \varepsilon\lambda_1 T + O(\varepsilon^2), 1 + \varepsilon\lambda_2 T + O(\varepsilon^2), \dots, 1 + \lambda_{2n-2} T + O(\varepsilon^2).$$

La demostración del Teorema 2.1.1 puede ser encontrada en [19].

2.2. Invariantes para la resonancia 1 : 1

En esta sección introducimos los principales conceptos y resultados de la teoría de invariantes para osciladores en resonancia 1 : 1.

El Hamiltoniano asociado al oscilador en resonancia 1 : 1 es dado por

$$\mathcal{H}_0(x, y) = \frac{1}{2}(x_1^2 + y_1^2) + \frac{1}{2}(x_2^2 + y_2^2). \quad (2.2.1)$$

El flujo asociado a \mathcal{H}_0 define una acción $\varphi: S^1 \times \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ dada por $\varphi(t, z) = e^{At}z$. Esta acción es libre y propia sobre cualquier nivel de energía

$$\mathcal{N}_0(h) = \{z = (x, y) \in \mathbb{R}^4 : \mathcal{H}_0(x, y) = h\}$$

con $h > 0$. En consecuencia, el espacio orbital $\mathcal{B}(h) = \mathcal{N}_0(h)/S^1$ tiene estructura de variedad diferenciable y además es difeomorfo al espacio proyectivo complejo $\mathbb{C}\mathbb{P}$ (Moser). Como S^1 es un grupo de Lie compacto, un modelo para el espacio reducido es la variedad semialgebraica generada por los cuatro polinomios invariantes

$$\pi_1 = x_1^2 + y_1^2, \quad \pi_2 = x_2^2 + y_2^2, \quad \pi_3 = x_1x_2 + y_1y_2, \quad \pi_4 = x_1y_2 - x_2y_1. \quad (2.2.2)$$

donde

$$\pi_1 + \pi_2 = \mathcal{H}_0 = h; \quad \pi_3^2 + \pi_4^2 = \pi_1\pi_2 \quad (2.2.3)$$

y $\pi_1 \geq 0$ y $\pi_2 \geq 0$. Los invariantes en (2.2.2) forman una base de Hilbert real para el espacio de funciones invariantes por φ . Denotando este espacio por $\mathbb{R}_{S^1}[x, y]$ podemos escribir

$$\mathbb{R}_{S^1}[x, y] = \langle \{\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4\} \rangle.$$

Usando las relaciones (2.2.3) encontramos que el espacio reducido puede ser representado por la esfera

$$\mathbb{C}\mathbb{P}_h = \{(\pi_1, \pi_3, \pi_4) \in \mathbb{R}^3 : (\pi_1 - h)^2 + \pi_3^2 + \pi_4^2 = h^2\}.$$

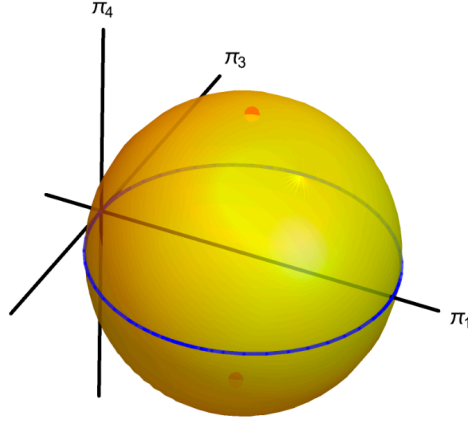


Figura 2.1: Espacio reducido $\mathbb{C}\mathbb{P}$.

Proposición 2.2.1 *Si \mathcal{H} es un Hamiltoniano que está en forma normal con respecto a \mathcal{H}_0 . Entonces el campo vectorial asociado a \mathcal{H} en invariantes es dado por*

$$\dot{\pi}_j = \sum_{k=1}^4 \{\pi_j, \pi_k\} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi_k}, \quad j = 1, 2, 3, 4. \quad (2.2.4)$$

Demostración. Si \mathcal{H} está en forma normal entonces $\mathcal{H} \in \mathbb{R}_{S^1}[x, y]$ y puede ser escrito en términos de los invariantes. Luego, fijando $j \in \{1, 2, 3, 4\}$ y usando regla de la cadena se obtiene

$$\begin{aligned} \dot{\pi}_j &= \sum_{i=1}^2 \left(\frac{\partial \pi_j}{\partial x_i} \cdot \frac{dx_i}{dt} + \frac{\partial \pi_j}{\partial y_i} \cdot \frac{dy_i}{dt} \right) \\ &= \sum_{i=1}^2 \left(\frac{\partial \pi_j}{\partial x_i} \cdot \frac{d\mathcal{H}}{dy_i} - \frac{\partial \pi_j}{\partial y_i} \cdot \frac{d\mathcal{H}}{dx_i} \right) \\ &= \sum_{i=1}^2 \left[\frac{\partial \pi_j}{\partial x_i} \cdot \sum_{k=1}^4 \frac{d\mathcal{H}}{d\pi_k} \frac{d\pi_k}{dy_i} - \frac{\partial \pi_j}{\partial y_i} \cdot \sum_{k=1}^4 \frac{d\mathcal{H}}{d\pi_k} \frac{d\pi_k}{dx_i} \right] \\ &= \sum_{k=1}^4 \left[\sum_{i=1}^2 \left(\frac{\partial \pi_j}{\partial x_i} \frac{\partial \pi_k}{\partial y_i} - \frac{\partial \pi_j}{\partial y_i} \frac{\partial \pi_k}{\partial x_i} \right) \right] \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi_k} \\ &= \sum_{k=1}^4 \{\pi_j, \pi_k\} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi_k}. \end{aligned}$$

□

En adelante, nos referiremos al sistema (2.2.4) como *Campo de Poisson asociado*

a \mathcal{H} .

De la ecuación (2.2.4), es claro que para encontrar el Campo de Poisson de \mathcal{H} es suficiente conocer los corchetes entre los invariantes. Usando las relaciones (2.2.2) y la definición del Corchete de Poisson usual obtenemos la Tabla 2.2.1.

$\{\pi_j, \pi_k\}$	π_1	π_2	π_3	π_4
π_1	0	0	$2\pi_4$	$-2\pi_3$
π_2	0	0	$-2\pi_4$	$2\pi_3$
π_3	$-2\pi_4$	$2\pi_4$	0	$\pi_1 - \pi_2$
π_4	$2\pi_3$	$-2\pi_3$	$-\pi_1 + \pi_2$	0

Tabla 2.2.1: Tabla con los corchetes de Poisson entre los invariantes.

Observación 2.2.2 Si \mathcal{H} está en forma normal con respecto a \mathcal{H}_0 , los puntos de equilibrio del sistema (2.2.4) corresponden a soluciones periódicas del sistema Hamiltoniano asociado a \mathcal{H} . Por otro lado, si $\hat{\mathcal{H}} = \mathcal{H}_N + H_R$, donde \mathcal{H}_N está normalizado con respecto a \mathcal{H}_0 , entonces los puntos de equilibrio del campo de Poisson asociado a \mathcal{H}_N son los candidatos a generar soluciones periódicas en el sistema asociado a $\hat{\mathcal{H}}$.

2.2.1. Invariantes versus variables tipo Reeb

Los invariantes dados en (2.2.2) se relacionan con las variables (Q, P) de Reeb introducidas en el Ejemplo 1.2.5 a través de las ecuaciones

$$Q = \frac{\pi_3}{\sqrt{\pi_1}}, \quad P = \frac{\pi_4}{\sqrt{\pi_1}}, \quad (2.2.5)$$

y

$$Q = \frac{\pi_3}{\sqrt{\pi_2}}, \quad P = -\frac{\pi_4}{\sqrt{\pi_2}}. \quad (2.2.6)$$

Así, las aplicaciones ψ_1, ψ_2 con $\psi_j: U_j \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\psi_j(\pi) = (Q, P)$ definidas por (2.2.5) y (2.2.6), respectivamente, son cartas locales para el espacio reducido $\mathbb{C}\mathbb{P}_h$, donde

$U_j = \{\pi = (\pi_1, \dots, \pi_4) \in \mathbb{C}\mathbb{P}_h : \pi_j > 0\}$ para $j = 1, 2$ (ver detalles en [29]). De esta forma, el conjunto $\mathcal{A} = \{(U_1, \psi_1), (U_2, \psi_2)\}$ es un atlas simpléctico para el espacio reducido $\mathbb{C}\mathbb{P}_h$.

Las transformaciones inversas asociadas a (2.2.5) y (2.2.6) vienen dadas por

$$\begin{aligned} \pi_1 &= 2h - Q^2 - P^2, & \pi_2 &= Q^2 + P^2, \\ \pi_3 &= Q\sqrt{2h - Q^2 - P^2}, & \pi_4 &= P\sqrt{2h - Q^2 - P^2} \end{aligned} \quad (2.2.7)$$

y

$$\begin{aligned} \pi_1 &= Q^2 + P^2, & \pi_2 &= 2L - Q^2 - P^2, \\ \pi_3 &= Q\sqrt{2h - Q^2 - P^2}, & \pi_4 &= -P\sqrt{2h - Q^2 - P^2}, \end{aligned} \quad (2.2.8)$$

respectivamente.

Observación 2.2.3 *Las relaciones (2.2.5) y (2.2.6) nos permiten pasar de las variables tipo Reeb a los invariantes, mientras que (2.2.7) y (2.2.8) tiene el efecto inverso, es decir, nos permiten pasar de los invariantes a las variables de Reeb.*

2.3. Teoría de Bifurcaciones

Cuando el comportamiento de un sistema dinámico cambia repentinamente al variar un parámetro, se dice que ha sufrido una bifurcación. En particular, en sistemas Hamiltonianos autónomos, una bifurcación esta relacionada a la aparición de puntos críticos y/o soluciones periódicas. Además, en un punto de bifurcación se puede ganar o perder estabilidad.

2.3.1. Bifurcaciones de equilibrios

En esta sección, introducimos las bifurcaciones clásicas de equilibrios en Hamiltonianos con un grado de libertad, junto con algunas de sus características. Los Hamiltonianos presentados corresponden a las familias más simples en las que se producen bifurcaciones de equilibrios de tipo centro-silla o pitchfork toman lugar. Estas familias se conocen como la forma normal del Hamiltoniano para la bifurcación correspondiente.

Bifurcación centro-silla

Consideremos el Hamiltoniano autónomo con un grado de libertad:

$$\mathcal{H}(Q, P; \mu) = \frac{1}{2}Q^2 + \mu P + \frac{1}{3}P^3, \quad (2.3.1)$$

donde μ es un pequeño parámetro. La función (2.3.1) es la forma normal del Hamiltoniano para la bifurcación centro-silla y posee las siguientes propiedades:

- Las ecuaciones de movimiento asociadas al Hamiltoniano (2.3.1) están dadas por:

$$\begin{cases} \dot{Q} = \mathcal{H}_P = \mu + P^2, \\ \dot{P} = -\mathcal{H}_Q = -Q. \end{cases} \quad (2.3.2)$$

- Los puntos de equilibrio del sistema (2.3.2) son de la forma $(Q, P) = (0, P^*)$ donde P^* satisface la ecuación de la parábola $\mu = -P^2$.

Aquí, distinguimos tres casos: $\mu < 0$, $\mu = 0$ y $\mu > 0$.

- Para $\mu < 0$, el sistema (2.3.2) tiene dos equilibrios dados por $\mathcal{O}_\mu^- = (0, -\sqrt{-\mu})$ y $\mathcal{O}_\mu^+ = (0, \sqrt{-\mu})$.
- Para $\mu = 0$, el origen $\mathcal{O}_0 = (0, 0)$ es el único equilibrio del sistema.
- Para $\mu > 0$, el sistema no posee equilibrios.

Note que cuando $\mu = 0$, los equilibrios \mathcal{O}_μ^- y \mathcal{O}_μ^+ colisionan con \mathcal{O}_0 .

- Para determinar la estabilidad de los puntos de equilibrio, calculamos la matriz

$$A_\mu(Q, P) = \mathbb{J}D^2\mathcal{H}(Q, P; \mu) = \begin{bmatrix} 0 & 2P \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Desde que $\text{tr}(A_\mu) = 0$ y $\det(A_\mu) = 2P$, el polinomio característico de A_μ es

$$p(\lambda) = \lambda^2 + \det(A) = \lambda^2 + 2P.$$

Ahora, evaluamos A_μ en cada punto de equilibrio.

a) Para $\mathcal{O}_0 = (0, 0)$ se obtiene:

$$A_0(0, 0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad p(\lambda) = \lambda^2.$$

En consecuencia, el único valor propio de A_0 es $\lambda = 0$ (doble), lo que implica que el origen es un punto degenerado.

b) Para \mathcal{O}_μ^\mp con $\mu < 0$ se tiene

$$A_\mu(0, \pm\sqrt{-\mu}) = \begin{bmatrix} 0 & \pm 2\sqrt{-\mu} \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad p(\lambda) = \lambda^2 \pm 2\sqrt{-\mu}.$$

Esto implica que para \mathcal{O}_μ^+ los valores propios son imaginarios puros y para \mathcal{O}_μ^- los valores propios son reales. El primer caso corresponde a un centro y el segundo a un punto silla.

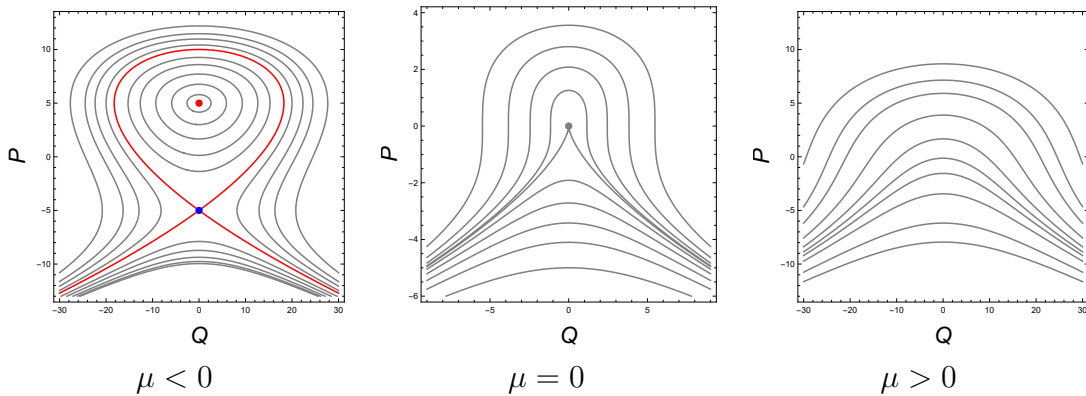


Figura 2.2: Bifurcación centro-silla

- Del análisis previo obtenemos el siguiente diagrama de bifurcación.

En la Figura 2.7 el color rojo corresponde a puntos críticos estables (centro), el color azul a puntos críticos inestables (silla) y el punto blanco corresponde a un punto degenerado.

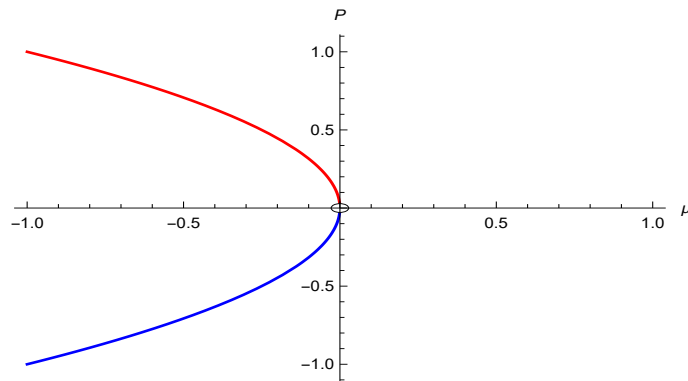


Figura 2.3: Diagrama de la bifurcación centro-silla.

Bifurcación pitchfork supercrítica

Consideraremos el Hamiltoniano autónomo con un grado de libertad:

$$\mathcal{H}(Q, P; \mu) = \frac{1}{2}Q^2 + \frac{1}{4}P^4 + \frac{\mu}{2}P^2, \quad (2.3.3)$$

donde μ es un pequeño parámetro. La función \mathcal{H} definida en (2.3.3) es la forma normal del Hamiltoniano para la bifurcación pitchfork y tiene las siguientes propiedades:

- Las ecuaciones de movimiento asociadas a (2.3.3) están dadas por:

$$\begin{cases} \dot{Q} = \mathcal{H}_P = P(P^2 + \mu), \\ \dot{P} = -\mathcal{H}_Q = -Q. \end{cases} \quad (2.3.4)$$

- Los puntos de equilibrio del sistema (2.3.4) son de la forma $(Q, P) = (0, P^*)$, donde $P^* = 0$ ó satisface la ecuación $\mu + P^2 = 0$.
 - Note que el origen $\mathcal{O}_0 = (0, 0)$ siempre es un equilibrio.
 - Para $\mu < 0$, existen dos equilibrios adicionales: $\mathcal{O}_\mu^- = (0, -\sqrt{-\mu})$ y $\mathcal{O}_\mu^+ = (0, \sqrt{-\mu})$.
- Para determinar la estabilidad de los puntos de equilibrio, calculamos la matriz

$$A_\mu(Q, P) = \mathbb{J}D^2\mathcal{H}(Q, P; \mu) = \begin{bmatrix} 0 & 3P^2 + \mu \\ -1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.3.5)$$

Desde que $\text{tr}(A_\mu) = 0$ y $\det(A_\mu) = 3P^2 + \mu$, el polinomio característico de A_μ asume la forma

$$p(\lambda) = \lambda^2 + \det(A_\mu) = \lambda^2 + 3P^2 + \mu.$$

Ahora, evaluamos A_μ en cada punto de equilibrio.

a) Para $\mathcal{O}_0 = (0, 0)$, el polinomio característico es $p(\lambda) = \lambda^2 + \mu$. Dependiendo del valor de μ , se presentan los siguientes casos:

- Caso I: $\mu < 0$. Los valores propios son reales y de signo opuesto, lo que implica que \mathcal{O}_0 es un punto silla (inestable).
- Caso II: $\mu = 0$. Los valores propios son ambos nulos, lo que lleva a una degeneración en el origen.
- Caso III: $\mu > 0$. Los valores propios son imaginarios puros, lo que indica que el origen es un centro (estable).

b) Para $\mathcal{O}_\mu^\pm = (0, \pm\sqrt{-\mu})$, con $\mu < 0$, el polinomio característico es dado por $p(\lambda) = \lambda^2 - 2\mu$. Así, los valores propios son imaginarios puros. Por tanto, los puntos de equilibrio \mathcal{O}_μ^\pm son estables (centros).

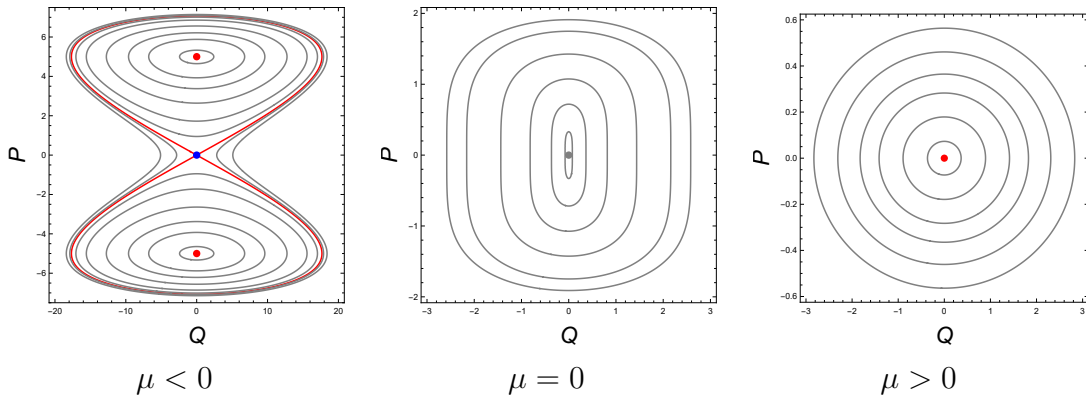


Figura 2.4: Bifurcación pitchfork supercrítica

- Del análisis previo obtenemos el siguiente diagrama de bifurcación (ver Figura 2.5).

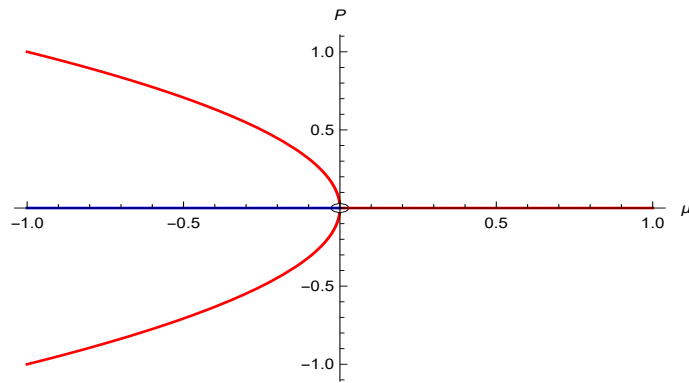


Figura 2.5: Diagrama de la bifurcación pitchfork supercrítica.

Bifurcación pitchfork subcrítica (antipitchfork)

Otra bifurcación con un comportamiento similar al de (2.3.3) viene dada por la familia de Hamiltonianos de la forma:

$$\mathcal{H}(Q, P; \mu) = \frac{1}{2}Q^2 - \frac{1}{4}P^4 + \frac{\mu}{2}P^2, \quad (2.3.6)$$

donde μ es un pequeño parámetro. Siguiendo un procedimiento similar al de la subsección 2.3.1 obtenemos que el sistema Hamiltoniano asociado a (2.3.6) tiene un único equilibrio en el origen cuando $\mu \leq 0$ y dos equilibrios adicionales $\mathcal{O}_\mu^\pm = (0, \pm\sqrt{\mu})$ cuando $\mu > 0$. El origen es estable (centro) para $\mu > 0$, se degenera en $\mu = 0$ y se vuelve inestable cuando $\mu < 0$. Por otra parte, los equilibrios \mathcal{O}_μ^\pm son siempre inestables (sillas).

El esquema de la bifurcación pitchfork subcrítica es mostrada en la Figura 2.6.

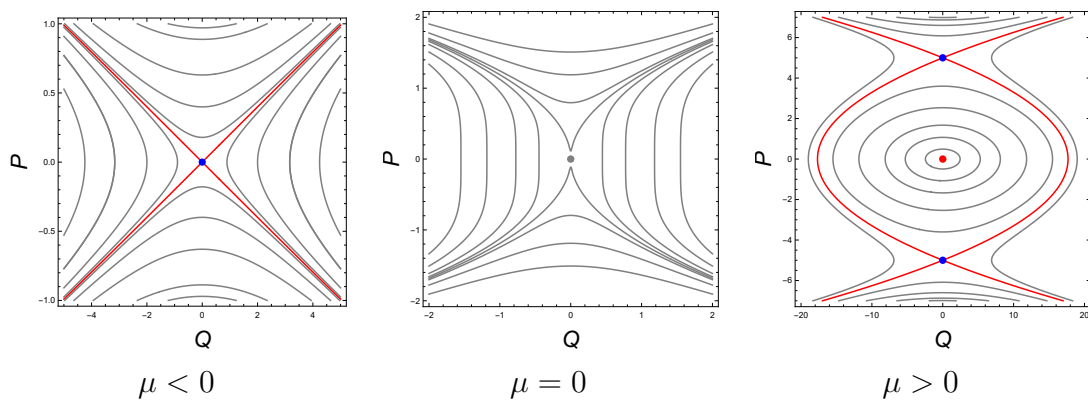


Figura 2.6: Bifurcación pitchfork subcrítica

2.3.2. Resultados sobre bifurcaciones de soluciones periódicas

El estudio de soluciones periódicas de un sistema Hamiltoniano puede ser reducido al estudio de una familia de transformaciones simplécticas, como por ejemplo, la aplicación de Poincaré \mathcal{P} definida sobre una superficie de nivel. Puntos fijos de esta aplicación corresponden a soluciones periódicas del sistema Hamiltoniano. Con este enfoque tenemos algunos resultados sobre bifurcaciones centro-silla y pitchfork debidos a Meyer [20].

Sea $\mathcal{P}: \mathcal{O} \times I \rightarrow \mathcal{O} : (u, v; \mu) \rightarrow \mathcal{P}(u, v; \mu)$ una función diferenciable, donde $I = (-\mu_0, \mu_0)$, $\mu_0 > 0$, es un intervalo en \mathbb{R} y \mathcal{O} es una vecindad abierta del origen en \mathbb{R}^2 . Para $\mu \in I$ fijo, suponga que $\mathcal{P}_\mu := \mathcal{P}(\cdot, \mu): \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O}$ preserva área y que el origen es un punto fijo de \mathcal{P} cuando $\mu = 0$, es decir $\mathcal{P}_0(0, 0) = (0, 0)$. Los valores propios de la matriz $\bar{A} = \partial\mathcal{P}_0(0, 0)/\partial(u, v)$ son llamados los **multiplicadores** del punto fijo. En dos dimensiones, los valores propios de la matriz simpléctica \bar{A} son:

- $\lambda_1 = \lambda_2 = +1$
- $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$
- $\lambda_1 = \lambda, \lambda_2 = \lambda^{-1}$, con $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$.
- $|\lambda_1| = |\lambda_2| = 1$, con $\lambda_j \in \mathbb{C}$.

Si los multiplicadores son diferentes de $+1$, el punto fijo es llamado **elemental**.

Proposición 2.3.1 *Un punto fijo elemental puede ser continuado, esto es, si $(u, v) = (0, 0)$ es un punto fijo elemental para \mathcal{P} cuando $\mu = 0$ entonces existe $\mu_1 > 0$ y una aplicación diferenciable $\xi: (-\mu_1, \mu_2) \rightarrow \mathcal{O}$ con $\mathcal{P}(\xi(\mu), \mu) = \xi(\mu)$. Además, los multiplicadores del punto fijo $\xi(\mu)$ varían continuamente con μ , por tanto, si $(u, v) = (0, 0)$ es elíptico (resp. hiperbólico) cuando $\mu = 0$, entonces lo es $\xi(\mu)$ para μ pequeño.*

En particular, la Proposición anterior establece que un punto fijo elíptico (resp. hiperbólico) puede ser continuado a un punto fijo elíptico (resp. hiperbólico).

Definición 2.3.2 *El origen es un punto fijo extremo para \mathcal{P} cuando $\mu = 0$, si existen coordenadas simplécticas (u, v) tales que $\mathcal{P}: (u, v; \mu) \rightarrow (u', v')$, donde*

$$\begin{bmatrix} u' \\ v' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} \gamma \\ \delta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cdots \\ \beta u^2 + \cdots \end{bmatrix} + \cdots \quad (2.3.7)$$

y $\alpha = \pm 1$, $\beta \neq 0$ y $\delta \neq 0$.

Teorema 2.3.1 *Sea $0 \in \mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}^2$ un punto fijo extremo para P cuando $\mu = 0$. Entonces existe una curva diferenciable $\sigma: (-\tau_2, \tau_2) \rightarrow \mathbf{I} \times \mathcal{O}: \tau \rightarrow (\bar{\mu}(\tau), \xi(\tau))$ de puntos fijos de P , $P(\bar{\mu}(\tau), \xi(\tau)) = \xi(\tau)$, con $\tau = 0$ dando el punto fijo extremo, $\tau(0) = (0, 0)$.*

El punto extremo divide la curva de puntos fijos en dos arcos. Sobre un arco todos los puntos fijos son elípticos y sobre el otro arco son hiperbólicos. Además, el parámetro μ alcanza un máximo o mínimo no degenerado en el punto fijo extremo; así, existen dos puntos fijos cuando μ tiene un signo y no tiene puntos fijos cuando μ tiene el otro.

Definición 2.3.3 *El origen es un punto de transición o flip para P en $\mu = 0$ si existen coordenadas simplécticas (u, v) de modo que $P: (u, v; \mu) \rightarrow (u', v')$, donde*

$$\begin{bmatrix} u' \\ v' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & \alpha \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cdots \\ \beta u^3 + \cdots \end{bmatrix} + \cdots,$$

y $\alpha = \pm 1$, $c \neq 0$ y $\beta \neq 0$.

Teorema 2.3.2 *Sea μ pequeño y supongamos que el origen un punto fijo de transición para P cuando $\mu = 0$. Si $\alpha c > 0$, entonces el origen es un punto fijo hiperbólico cuando $\mu > 0$ y un punto fijo elíptico cuando $\mu < 0$ (al revés cuando $\alpha c < 0$).*

Si $\beta c > 0$ (resp. $\beta c < 0$), entonces existe una órbita de periodo 2 para P_μ cuando $\mu < 0$ (resp. $\mu > 0$), y no existe una órbita periódica para $\mu \geq 0$ (resp. $\mu \leq 0$). Como μ tiende a cero desde el lado apropiado, la órbita 2-periódica tiende al punto fijo de transición.

Para μ fijo, el tipo de estabilidad del punto fijo y la órbita 2-periódica son opuestas. Esto es, si para μ fijo el origen es elíptico, entonces el punto periódico es hiperbólico y viceversa.

Observación 2.3.4 *El punto fijo es llamado de transición debido a que su tipo de estabilidad cambia de hiperbólico a elíptico, o viceversa. En el punto de transición, aparece un nuevo punto de periodo 2 en uno de los lados de $\mu = 0$; esto se conoce como duplicación de periodo en la literatura. Se dice que el punto de periodo 2 bifurca desde el punto de transición.*

Otros resultados sobre bifurcaciones de soluciones periódicas con un enfoque distinto pueden ser encontrados en el libro de Heinz [16]. Aquí la aparición de una bifurcación centro-silla o pitchfork obedece a una forma específica del Hamiltoniano original después de ser llevado a su forma más simple (forma normal) mediante el uso de cambios de coordenadas simplécticas. A continuación enunciamos los teoremas sobre bifurcaciones usando este enfoque.

Considere el Hamiltoniano con dos grados de libertad

$$\mathcal{H}(x, y, q, p) = \eta(y) + \mathcal{H}_y(q, p), \quad (2.3.8)$$

con $\eta'(0) = \omega(0) \neq 0$ y

$$\mathcal{H}_y(q, p) = \frac{a(y)}{2}p^2 + \frac{b(y)}{6}q^3 + c(y)q + \dots,$$

donde $(x, y) \in \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$, $(q, p) \in \mathbb{R}^2$. Los puntos suspensivos indican términos de grado mayor o igual a 4.

Observación 2.3.5 *El problema de un grado de libertad definido por \mathcal{H}_y muestra que una bifurcación centro-silla de equilibrios toma lugar a medida que y varía.*

Teorema 2.3.3 *Sea $\gamma = \{(y, q, p) = (0, 0, 0)\}$ una órbita periódica del sistema Hamiltoniano asociado a (2.3.8). Si $a(0), b(0) \neq 0$, $c(0) = 0$ y $d(0) := c'(0) \neq 0$. Entonces una bifurcación periódica centro-silla toma lugar cuando \mathcal{H} pasa por $\mathcal{H}(\gamma)$.*

Considere el Hamiltoniano

$$\mathcal{H}(x, y, q, p) = \eta(y) + \mathcal{H}_y(q, p) \quad (2.3.9)$$

con $\eta'(0) = \omega(0) \neq 0$ y

$$\mathcal{H}_y(q, p) = \frac{a(y)}{2}p^2 + \frac{b(y)}{24}q^4 + \frac{c(y)}{2}q^2 + \dots,$$

Aquí, los puntos suspensivos indican términos de grado mayor o igual a 5.

Teorema 2.3.4 *Sea $\gamma = \{(y, q, p) = (0, 0, 0)\}$ una órbita periódica del sistema Hamiltoniano asociado a (2.3.9). Si $a(0), b(0) \neq 0$, $c(0) = 0$ y $d(0) := c'(0) \neq 0$. Entonces una bifurcación de doble periodo (pitchfork periódica) toma lugar cuando \mathcal{H} pasa por $\mathcal{H}(\gamma)$.*

Observación 2.3.6 *Note que el Hamiltoniano \mathcal{H}_y truncado a orden 4 tiene la \mathbb{Z}_2 -simetría $q \rightarrow -q$.*

2.3.3. Bifurcaciones de soluciones periódicas vía reducción

En esta sección enunciamos y demostramos dos resultados sobre bifurcaciones de soluciones periódicas en Hamiltonianos con dos grados de libertad en resonancia 1 : 1. Nuestro enfoque se basa en la técnica de reducción y en el Teorema de la Función Implícita. Para la demostración de nuestros resultados seguimos la ideas desarrolladas en [14] y [21].

Considere el Hamiltoniano autónomo con dos grados de libertad

$$\mathcal{H}(x, y) = \frac{1}{2}(x_1^2 + y_1^2) + \frac{1}{2}(x_2^2 + y_2^2) + \varepsilon H_1(x, y) + \varepsilon^2 H_2(x, y), \quad (2.3.10)$$

donde H_1 y H_2 son funciones diferenciables en una vecindad del origen de \mathbb{R}^4 . Usando las transformaciones de Reeb definidas en el Ejemplo (1.2.5), el Hamiltoniano (2.3.10) se puede escribir en la forma

$$\mathcal{H}(L, Q, \ell, P) = L + \varepsilon H_1(L, Q, \ell, P) + \varepsilon^2 H_2(L, Q, \ell, P) + O(\varepsilon^3), \quad (2.3.11)$$

donde (L, Q, ℓ, P) son las variables de tipo Reeb. Luego, usando el método de Lie-Deprit, normalizamos el Hamiltoniano (2.3.11) obteniendo

$$\mathcal{H}_\varepsilon(L, Q, \ell, P) = L + \varepsilon^2 \mathcal{H}_2(L, Q, P) + O(\varepsilon^3), \quad (2.3.12)$$

donde \mathcal{H}_2 satisface la relación (1.5.6) (ver la subsección 1.5.1).

El Hamiltoniano reducido sobre $\mathbb{C}\mathbb{P}_h$ se obtiene de \mathcal{H}_ε truncando términos hasta orden ε^2 , haciendo $L = h$, eliminando los términos constantes y dividiendo la expresión resultante por ε^2 .

Sea $\bar{\mathcal{H}}$ el Hamiltoniano reducido sobre $\mathbb{C}\mathbb{P}_h$, esto es, $\bar{\mathcal{H}}(Q, P) = \mathcal{H}_2(h, Q, P)$ y supongamos que tanto \mathcal{H}_2 como $\bar{\mathcal{H}}$ dependen de un parámetro externo δ .

Definición 2.3.7 *Un punto crítico $\mathcal{O} \in \mathbb{C}\mathbb{P}_h$ de $\bar{\mathcal{H}}$ para $\delta = 0$ es llamado **punto extremo** si existen coordenadas simplécticas (Q, P) tales que*

$$\bar{\mathcal{H}} = \bar{\mathcal{H}}_Q = \bar{\mathcal{H}}_P = \bar{\mathcal{H}}_{PP} = \bar{\mathcal{H}}_{QP} = 0, \quad \bar{\mathcal{H}}_{QQ} \neq 0, \bar{\mathcal{H}}_{P\delta} \neq 0, \bar{\mathcal{H}}_{PPP} \neq 0 \quad (2.3.13)$$

cuando $Q = P = \delta = 0$.

Observación 2.3.8 *Las definiciones (2.3.2) y (2.3.7) son equivalentes, la primera está expresada en términos de la aplicación de Poincaré, mientras que la segunda se formula en términos del Hamiltoniano reducido.*

El siguiente Teorema sobre bifurcaciones centro-silla periódicas es una adaptación a Hamiltonianos de la forma (2.3.10) del Teorema 6.2 demostrado en [21].

Teorema 2.3.5 *Si $\bar{\mathcal{H}}$ tiene un punto extremo en $\mathcal{O} \in \mathbb{C}\mathbb{P}_h$ cuando $\delta = 0$ entonces el Hamiltoniano (2.3.11) experimenta una bifurcación periódica centro-silla.*

Demostración. Sean $y = (Q, P)$ coordenadas locales en \mathcal{O} y sea σ una sección transversal en el nivel de energía $\mathcal{H}_0 = h$. De la demostración del Teorema de Reeb se sabe que un punto crítico no degenerado de $\bar{\mathcal{H}}$ origina un punto fijo de la aplicación de primer retorno $\mathcal{P}: \sigma \rightarrow \sigma$ dada por

$$\mathcal{P}(y, \delta) = y + \varepsilon^2 T \mathbb{J} \nabla \bar{\mathcal{H}}(y, \delta) + O(\varepsilon^3). \quad (2.3.14)$$

Definiendo $\mathcal{F}(y, \delta, \varepsilon) = \nabla_y \bar{\mathcal{H}}(y, \delta) + O(\varepsilon)$, encontramos que las ecuaciones para un punto fijo de \mathcal{P} son

$$\mathcal{F}_1(Q, P, \delta, \varepsilon) = \bar{\mathcal{H}}_Q + O(\varepsilon) = 0, \quad \mathcal{F}_2(Q, P, \delta, \varepsilon) = \bar{\mathcal{H}}_P + O(\varepsilon) = 0. \quad (2.3.15)$$

Luego, cuando $Q = P = \delta = \varepsilon = 0$, la matriz Jacobiana de \mathcal{F} es

$$\frac{\partial(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)}{\partial(Q, P, \delta)} = \frac{\partial(\bar{\mathcal{H}}_Q, \bar{\mathcal{H}}_P)}{\partial(Q, P, \delta)} = \begin{bmatrix} \bar{\mathcal{H}}_{QQ} & 0 & \bar{\mathcal{H}}_{Q\delta} \\ 0 & 0 & \bar{\mathcal{H}}_{P\delta} \end{bmatrix}.$$

Dado que $\bar{\mathcal{H}}_{QQ} \cdot \bar{\mathcal{H}}_{P\delta} \neq 0$, la matriz Jacobiana tiene rango 2 y entonces por el Teorema de la Función Implícita, existen funciones diferenciables $Q = \xi(P, \varepsilon)$ y $\delta = \eta(P, \varepsilon)$ tales que

$$\mathcal{F}_1(\xi(P, \varepsilon), P, \eta(P, \varepsilon), \varepsilon) = \mathcal{F}_2(\xi(P, \varepsilon), P, \eta(P, \varepsilon), \varepsilon) = 0. \quad (2.3.16)$$

Primero probaremos que para ε pequeño, la función $\eta(P, \varepsilon)$ tiene un máximo o mínimo no degenerado, lo cual implica que el sistema (2.3.16) tiene dos soluciones. En efecto, reemplazando $\varepsilon = 0$ en (2.3.16) y tomando en cuenta (2.3.15) se obtiene

$$\bar{\mathcal{H}}_Q(\xi(P, 0), P, \eta(P, 0)) = 0, \quad \bar{\mathcal{H}}_P(\xi(P, 0), P, \eta(P, 0)) = 0. \quad (2.3.17)$$

Derivando ambas ecuaciones con respecto a P y usando regla de la cadena obtenemos

$$\bar{\mathcal{H}}_{QQ} \cdot \xi_P + \bar{\mathcal{H}}_{QP} + \bar{\mathcal{H}}_{Q\delta} \cdot \eta_P = 0, \quad \bar{\mathcal{H}}_{PQ} \cdot \xi_P + \bar{\mathcal{H}}_{PP} + \bar{\mathcal{H}}_{P\delta} \cdot \eta_P = 0. \quad (2.3.18)$$

Evaluando (2.3.18) en $P = 0$ y usando (2.3.13) llegamos a

$$\bar{\mathcal{H}}_{QQ}(0, 0) \cdot \xi_P(0, 0) + \bar{\mathcal{H}}_{Q\delta}(0, 0) \cdot \eta_P(0, 0) = 0 \quad ; \quad \bar{\mathcal{H}}_{P\delta}(0, 0) \cdot \eta_P(0, 0) = 0,$$

de donde resulta, $\xi_P(0, 0) = \eta_P(0, 0) = 0$.

Derivando la segunda ecuación en (2.3.18) encontramos

$$\begin{aligned} & (\bar{\mathcal{H}}_{PQQ} \cdot \xi_P + \bar{\mathcal{H}}_{PQP} + \bar{\mathcal{H}}_{PQ\delta} \cdot \eta_P) \xi_P + \bar{\mathcal{H}}_{PQ} \cdot \xi_{PP} + \bar{\mathcal{H}}_{PPQ} \cdot \xi_P + \bar{\mathcal{H}}_{PPP} \\ & + \bar{\mathcal{H}}_{PP\delta} \cdot \eta_P + (\bar{\mathcal{H}}_{P\delta Q} \cdot \xi_P + \bar{\mathcal{H}}_{P\delta P} + \bar{\mathcal{H}}_{P\delta\delta} \eta_P) \eta_P + \bar{\mathcal{H}}_{P\delta} \cdot \eta_{PP} = 0. \end{aligned}$$

A continuación, reemplazando $P = 0$ se obtiene

$$\bar{\mathcal{H}}_{PP\delta}(0, 0) + \bar{\mathcal{H}}_{P\delta}(0, 0) \cdot \eta_{PP}(0, 0) = 0.$$

y entonces $\eta_{PP}(0, 0) = -\bar{\mathcal{H}}_{PP\delta}(0, 0) / \bar{\mathcal{H}}_{P\delta}(0, 0)$

Como $\eta_P(0,0) = 0$ y $\eta_{PP}(0,0) \neq 0$, por el Teorema de la Función Implícita existe una función $P = w(\varepsilon)$ con ε suficientemente pequeño tal que $w(0) = 0$, $\eta_P(w(\varepsilon), \varepsilon) = 0$ y $\eta_{PP}(w(\varepsilon), \varepsilon) \neq 0$. Luego, para un ε pequeño fijo, la función $\eta(P, \varepsilon)$ tiene un máximo o mínimo no degenerado en $w(\varepsilon)$ y $\eta_P(P, \varepsilon)$ cambia de signo en $w(\varepsilon)$. Definiendo $\delta(\varepsilon) = \eta(w(\varepsilon), \varepsilon)$ tenemos que $\delta(0) = \eta(w(0), 0) = \eta(0, 0) = 0$ y



Figura 2.7: Gráficas de $\delta(w(\varepsilon), \varepsilon)$ y $w(\varepsilon)$.

existen funciones continuas $w_1(\delta, \varepsilon), w_2(\delta, \varepsilon)$ tales que $w_1(\delta, \varepsilon) \leq w(\varepsilon) \leq w_2(\delta, \varepsilon)$ y $w_1(\delta, \varepsilon) = w_2(\delta, \varepsilon)$ si y solo si $\delta = \delta(\varepsilon)$. Además, los puntos

$$(\xi(w_1(\delta, \varepsilon), \varepsilon), w_1(\delta, \varepsilon), \eta(w_1(\delta, \varepsilon), \varepsilon), \varepsilon), (\xi(w_2(\delta, \varepsilon), \varepsilon), w_2(\delta, \varepsilon), \eta(w_2(\delta, \varepsilon), \varepsilon), \varepsilon))$$

son soluciones del sistema (2.3.16) y por tanto puntos fijos de la aplicación \mathcal{P} . Estos puntos originan soluciones periódicas del Hamiltoniano inicial, las que coinciden cuando $\delta = \delta(\varepsilon) = \eta(w(\varepsilon), \varepsilon)$.

Ahora, para demostrar que una de las soluciones es linealmente estable y la otra es inestable, mostraremos que el punto fijo de \mathcal{P} correspondiente es un centro y una silla, respectivamente. De acuerdo a la demostración del Teorema de Reeb y a las ecuaciones (2.3.14) y (2.3.15), la estabilidad de cada punto crítico está asociada a

la matriz Jacobiana del campo vectorial $\mathbb{J}\mathcal{F}(y, \delta, \varepsilon)$, es decir, a la matriz

$$\bar{A} = \mathbb{J}D\mathcal{F} = \begin{bmatrix} \mathcal{F}_{2Q} & \mathcal{F}_{2P} \\ -\mathcal{F}_{1Q} & -\mathcal{F}_{1P} \end{bmatrix}$$

evaluada en el punto crítico. Como \bar{A} es una matriz Hamiltoniana de orden 2, se sabe que su polinomio característico es $p(\lambda) = \lambda^2 + \det(\bar{A})$. Por tanto, el punto crítico será estable cuando $\det(\bar{A}) > 0$, inestable cuando $\det(\bar{A}) < 0$ y degenerado si $\det(\bar{A}) = 0$.

Para caracterizar el determinante de la matriz \bar{A} , evaluamos ambas ecuaciones de (2.3.16) en $(\xi(P, \varepsilon), P, \eta(P, \varepsilon), \varepsilon)$ y derivamos con respecto a P obteniendo

$$\mathcal{F}_{1Q}\xi_P + \mathcal{F}_{1\delta}\eta_P = -\mathcal{F}_{1P}$$

$$\mathcal{F}_{2Q}\xi_P + \mathcal{F}_{2\delta}\eta_P = -\mathcal{F}_{2P}.$$

Usando la regla de Cramer y resolviendo para η_P encontramos

$$\det \begin{bmatrix} \mathcal{F}_{1Q} & \mathcal{F}_{1\delta} \\ \mathcal{F}_{2Q} & \mathcal{F}_{2\delta} \end{bmatrix} \eta_P = \det \begin{bmatrix} \mathcal{F}_{1Q} & -\mathcal{F}_{1P} \\ \mathcal{F}_{2Q} & -\mathcal{F}_{2P} \end{bmatrix} = -\det(\bar{A}). \quad (2.3.19)$$

Cuando $\varepsilon = 0$ se tiene que

$$\begin{aligned} \det \begin{bmatrix} \mathcal{F}_{1Q} & \mathcal{F}_{1\delta} \\ \mathcal{F}_{2Q} & \mathcal{F}_{2\delta} \end{bmatrix} &= \det \begin{bmatrix} \bar{\mathcal{H}}_{QQ} & \bar{\mathcal{H}}_{Q\delta} \\ \bar{\mathcal{H}}_{PQ} & \bar{\mathcal{H}}_{P\delta} \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} \bar{\mathcal{H}}_{QQ} & 0 \\ 0 & \bar{\mathcal{H}}_{P\delta} \end{bmatrix} \\ &= \bar{\mathcal{H}}_{QQ}(0, 0, 0) \cdot \bar{\mathcal{H}}_{P\delta}(0, 0, 0) \neq 0. \end{aligned}$$

Esto implica que para ε pequeño, el determinante en el lado izquierdo de la ecuación (2.3.19) no se anula y entonces

$$\det(\bar{A}) = -\det \begin{bmatrix} \mathcal{F}_{1Q} & \mathcal{F}_{1\delta} \\ \mathcal{F}_{2Q} & \mathcal{F}_{2\delta} \end{bmatrix} \eta_P.$$

Desde que la función $\eta(P, \varepsilon)$ tiene un máximo o mínimo no degenerado en $w(\varepsilon)$ y cambia de signo en $w(\varepsilon)$, se sigue que $\det(\bar{A})$ es cero cuando $P = w(\varepsilon)$ y cambia de signo en este valor de P . Por lo tanto, para $P = w(\varepsilon)$ el punto crítico

$(\xi(P, \varepsilon), P, \eta(P, \varepsilon))$ es degenerado, un punto silla para P en un lado de $w(\varepsilon)$ y un máximo o mínimo no degenerado para P en el otro lado de $w(\varepsilon)$. \square

Observación 2.3.9 Si $\bar{\mathcal{H}}$ es un polinomio en las variables (Q, P) y c_{ij} representan los coeficientes de los monomios $Q^i P^j$, entonces las condiciones relevantes en (2.3.13) corresponden a

$$c_{10} = c_{01} = c_{02} = c_{11} = 0, \quad c_{20} \neq 0, \quad \frac{dc_{01}}{d\delta} \neq 0, \quad c_{03} \neq 0$$

cuando $Q = P = \delta = 0$.

Definición 2.3.10 Un punto crítico $\mathcal{O} \in \mathbb{C}\mathbb{P}_h$ de $\bar{\mathcal{H}}$ para $\delta = 0$ es llamado **punto de transición** si existen coordenadas simplécticas (Q, P) tales que

$$\bar{\mathcal{H}} = \bar{\mathcal{H}}_Q = \bar{\mathcal{H}}_P = \bar{\mathcal{H}}_{PP} = \bar{\mathcal{H}}_{QP} = 0, \quad \bar{\mathcal{H}}_{QQ} \neq 0, \quad \bar{\mathcal{H}}_{PP\delta} \neq 0, \quad \bar{\mathcal{H}}_{PPPP} \neq 0 \quad (2.3.20)$$

cuando $Q = P = \delta = 0$.

Teorema 2.3.6 Si $\bar{\mathcal{H}}$ tiene un punto de transición en $\mathcal{O} \in \mathbb{C}\mathbb{P}_h$ cuando $\delta = 0$ entonces el Hamiltoniano (2.3.11) experimenta una bifurcación periódica pitchfork.

Demostración. La demostración sigue las mismas ideas del Teorema 2.3.5. \square

Observación 2.3.11 Si $\bar{\mathcal{H}}$ es un polinomio en las variables (Q, P) y c_{ij} representan los coeficientes de los monomios $Q^i P^j$, entonces las condiciones relevantes en (2.3.20) corresponden a

$$c_{10} = c_{01} = c_{02} = c_{11} = 0, \quad c_{20} \neq 0, \quad \frac{dc_{02}}{d\delta} \neq 0, \quad c_{04} \neq 0$$

cuando $Q = P = \delta = 0$.

Capítulo 3

Bifurcaciones periódicas en Hamiltonianos polinómicos

En este capítulo, analizaremos bifurcaciones de soluciones periódicas en sistemas Hamiltonianos autónomos con dos grados de libertad, cuya función Hamiltoniana se expresa como

$$\mathcal{H}_\varepsilon(x, y) = \frac{1}{2}(x_1^2 + y_1^2) + \frac{1}{2}(x_2^2 + y_2^2) + \varepsilon^j \mathcal{V}_j(x), \quad j = 1, 2, \quad (3.0.1)$$

donde $\mathcal{V}_j(x)$ es un potencial polinómico homogéneo de grado $j+2$ y ε es un pequeño parámetro. Este tipo de Hamiltonianos son de gran interés en Dinámica Galáctica, ya que modelan el movimiento cerca del núcleo de galaxias estelares [3, 7].

Específicamente, caracterizamos familias simples de Hamiltonianos de la forma (3.0.1), que tiene el menor grado y el menor número de términos, en las que ocurren bifurcaciones periódicas de tipo centro-silla y pitchfork.

3.1. Bifurcaciones periódicas pitchfork

Las bifurcaciones periódicas de tipo pitchfork son frecuentes en sistemas que presentan simetrías discretas [16]. Por tal motivo, empezamos caracterizando las familias de Hamiltonianos de la forma (3.0.1) con potencial cúbico y cuártico que tengan la simetría de reflexión $\mathcal{S}_1: (x_1, x_2, y_1, y_2) \rightarrow (-x_1, x_2, -y_1, y_2)$ o $\mathcal{S}_2: (x_1, x_2, y_1, y_2) \rightarrow (x_1, -x_2, y_1, -y_2)$.

3.1.1. Perturbaciones Cúbicas

Proposición 3.1.1 *El Hamiltoniano cúbico $\mathcal{H}_\varepsilon(x, y) = \mathcal{H}_0(x, y) + \varepsilon\mathcal{V}_1(x)$ tiene la simetría \mathcal{S}_1 cuando \mathcal{V}_1 es de la forma*

$$\mathcal{V}_1(x) = ax_1^2x_1 + \frac{b}{3}x_2^3 \quad (3.1.1)$$

y tiene la simetría \mathcal{S}_2 cuando \mathcal{V}_1 es dado por

$$\mathcal{V}_1(x) = \frac{c}{3}x_1^3 + dx_1x_2^2. \quad (3.1.2)$$

Demostración. Sea $\mathcal{V}_1(x) = a_1x_1^3 + a_2x_1^2x_2 + a_3x_1x_2^2 + a_4x_2^3$. El Hamiltoniano \mathcal{H}_ε tiene la simetría \mathcal{S}_1 siempre que $\mathcal{H}_\varepsilon \circ \mathcal{S}_1 = \mathcal{H}_\varepsilon$. Esto implica que

$$-a_1x_1^3 + a_2x_1^2x_2 - a_3x_1x_2^2 + a_4x_2^3 = a_1x_1^3 + a_2x_1^2x_2 + a_3x_1x_2^2 + a_4x_2^3,$$

de donde resulta $a_1 = a_3 = 0$. Haciendo $a_2 = a$ y $a_4 = b/3$, se concluye el resultado. La segunda afirmación se demuestra de forma similar. \square

Observación 3.1.2 *El Hamiltoniano $\mathcal{H}_\varepsilon(x, y) = \mathcal{H}_0(x, y) + \varepsilon \left(ax_1^2x_1 + \frac{b}{3}x_2^3 \right)$ es conocido como *Hamiltoniano de Hénon-Heiles*.*

En lo que sigue, analizaremos el Hamiltoniano de Hénon-Heiles con $a = 1$, esto es, consideramos el Hamiltoniano

$$\mathcal{H}_\varepsilon(x, y) = \frac{1}{2}(x_1^2 + y_1^2) + \frac{1}{2}(x_2^2 + y_2^2) + \varepsilon \left(x_1^2x_2 + \frac{b}{3}x_2^3 \right). \quad (3.1.3)$$

Para introducir la simetría del oscilador en (3.1.3), normalizamos el Hamiltoniano aplicando el método de Lie-Deprit descrito en la subsección 1.5. El Hamiltoniano normalizado hasta términos de orden 4 en coordenadas rectangulares es dado por

$$\mathcal{H}_\varepsilon(x, y) = \frac{1}{2}(x_1^2 + y_1^2) + \frac{1}{2}(x_2^2 + y_2^2) + \varepsilon^2\mathcal{H}_2(x, y) + O(\varepsilon^4), \quad (3.1.4)$$

donde

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_2 = & 5(x_1^2 + y_1^2)^2 + 5b^2(x_2^2 + y_2^2)^2 + 10(b+2)(x_1x_2 + y_1y_2)^2 \\ & + 2(7b-2)(x_1y_2 - x_2y_1)^2. \end{aligned}$$

En términos de los invariantes el Hamiltoniano se escribe como

$$\mathcal{H}_\varepsilon(\pi) = \frac{1}{2}(\pi_1 + \pi_2) + \varepsilon^2 \mathcal{H}_2(\pi) + O(\varepsilon^4), \quad (3.1.5)$$

donde

$$\mathcal{H}_2(\pi) = -\frac{1}{48} [5\pi_1^2 + 5b^2\pi_2^2 + 10(b+2)\pi_3^2 + 2(7b-2)\pi_4^2].$$

Truncando (3.1.5) hasta términos de orden ε^2 , usando las relaciones (2.2.3), eliminando términos constantes y dividiendo por ε^2 , encontramos que el Hamiltoniano reducido sobre \mathbb{CP}_h es $\bar{\mathcal{H}}(\pi) = \mathcal{H}_2(\pi)$. Luego, para determinar el campo de Poisson asociado, empleamos la fórmula (2.2.4) obteniendo

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\pi}_1 = \frac{1}{3}(b-6)\pi_3\pi_4, \\ \dot{\pi}_2 = -\frac{1}{3}(b-6)\pi_3\pi_4, \\ \dot{\pi}_3 = -\frac{1}{12}(b-1)[7\pi_1 + (5b-2)\pi_2]\pi_4, \\ \dot{\pi}_4 = \frac{5}{12}(b+1)[\pi_1 + (b-2)\pi_2]\pi_3. \end{array} \right. \quad (3.1.6)$$

A partir de las relaciones (2.2.3), encontramos que una solución de equilibrio del sistema (3.1.6) es de la forma $(\pi_1, 2h - \pi_1, \pi_3, \pi_4)$, donde π_1, π_3 y π_4 satisfacen las ecuaciones

$$\begin{aligned} (b-6)\pi_3\pi_4 &= 0, \\ (b-1)[(5b-9)\pi_1 - 2h(5b-2)]\pi_4 &= 0, \\ (b+1)[(b-3)\pi_1 - 2h(b-2)]\pi_3 &= 0, \\ \pi_1(2h - \pi_1) - \pi_3^2 - \pi_4^2 &= 0, \end{aligned} \quad (3.1.7)$$

con la restricción $0 \leq \pi_1 \leq 2h$. Es claro que $\mathcal{O}_1 = (2h, 0, 0, 0)$ y $\mathcal{O}_2 = (0, 2h, 0, 0)$ son equilibrios del sistema (3.1.6) y que $b = -1$, $b = 1$ y $b = 6$ son posibles valores de bifurcación. Fuera de estos valores, se cumple que $\pi_3 = 0$ ó $\pi_4 = 0$ y π_1 satisface

la ecuación

$$[(5b - 9)\pi_1 - 2h(5b - 2)][(b - 3)\pi_1 - 2h(b - 2)] = 0. \quad (3.1.8)$$

De aquí, encontramos que otros posibles valores de bifurcación son $b = 2/5$, $b = 9/5$, $b = 2$ y $b = 3$. Tomando en cuenta todos ellos y considerando (3.1.8) y la última ecuación de (3.1.7), obtenemos el siguiente resultado.

Proposición 3.1.3 *Sobre el espacio reducido \mathbb{CP}_h , el sistema (3.1.6) tiene a lo más 6 puntos críticos aislados (ver Tabla 3.1.1). De forma precisa:*

- i) Si $b \in (-\infty, 2/5) \setminus \{-1\}$ existen 6 puntos críticos aislados: $\mathcal{O}_1, \dots, \mathcal{O}_6$.
- ii) Si $b \in (2/5, 2) \setminus \{1\}$ existen 4 puntos críticos: $\mathcal{O}_1, \dots, \mathcal{O}_4$.
- iii) Si $b \in (2, \infty)$ existen 2 puntos críticos: \mathcal{O}_1 y \mathcal{O}_2 .
- iv*) Si $b = -1$ existen 2 puntos críticos $\mathcal{O}_5, \mathcal{O}_6$ y un continuo de equilibrios sobre el ecuador de \mathbb{CP}_h .
- v*) Si $b = 2/5$ existen 4 puntos críticos $\mathcal{O}_1, \dots, \mathcal{O}_4$.
- vi*) Si $b = 1$ existen 2 puntos críticos $\mathcal{O}_3, \mathcal{O}_4$ y un continuo de equilibrios.
- vii*) Si $b = 2$ existen 2 puntos críticos $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2$.

Puntos críticos	$\mathcal{O}_i = (\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4)$
\mathcal{O}_1	$(2h, 0, 0, 0)$
\mathcal{O}_2	$(0, 2h, 0, 0)$
\mathcal{O}_3	$\left(\frac{2h(b-2)}{b-3}, -\frac{2h}{b-3}, \frac{2h\sqrt{2-b}}{b-3}, 0\right)$
\mathcal{O}_4	$\left(\frac{2h(b-2)}{b-3}, -\frac{2h}{b-3}, -\frac{2h\sqrt{2-b}}{b-3}, 0\right)$
\mathcal{O}_5	$\left(\frac{2h(5b-2)}{5b-9}, -\frac{14h}{5b-9}, 0, \frac{2h\sqrt{7(2-5b)}}{5b-9}\right)$
\mathcal{O}_6	$\left(\frac{2h(5b-2)}{5b-9}, -\frac{14h}{5b-9}, 0, -\frac{2h\sqrt{7(2-5b)}}{5b-9}\right)$

Tabla 3.1.1: Puntos críticos del campo de Poisson (3.1.6)

La línea de bifurcación de puntos críticos se muestra en la Figura 3.1.

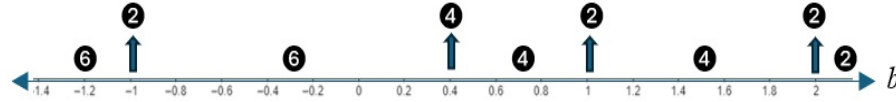


Figura 3.1: Línea de bifurcación de puntos críticos.

Luego, de la Tabla 3.1.1 encontramos que los pares de equilibrios $\mathcal{O}_3, \mathcal{O}_4$ y $\mathcal{O}_5, \mathcal{O}_6$ colisionan con \mathcal{O}_2 cuando $b = 2/5$ y $b = 2$, respectivamente. Este es el típico escenario de una bifurcación pitchfork de equilibrios. La Figura 3.2 muestra la evolución del flujo del Hamiltoniano reducido $\bar{\mathcal{H}}(\pi)$ sobre la esfera $\mathbb{C}\mathbb{P}_h$ para valores del parámetro b cercanos a $2/5$ y 2 . Sobre la esfera, el punto \mathcal{O}_2 corresponde al origen.

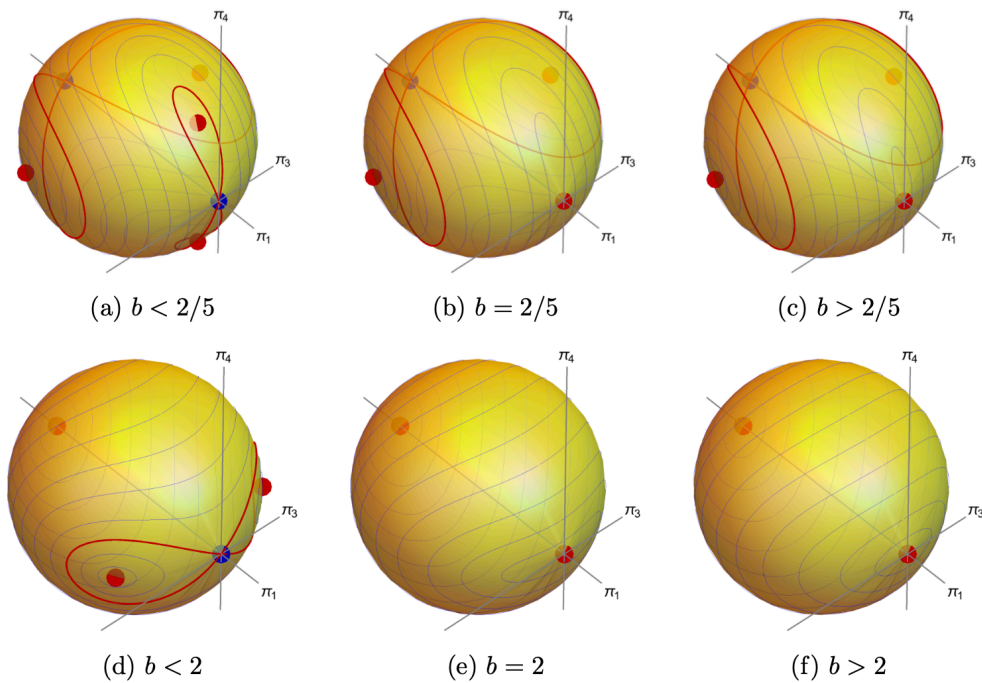


Figura 3.2: Zoom de la Fig. 3.1 centrada en $b = 2/5$ y $b = 2$.

A continuación, usaremos el Teorema de Reeb para determinar condiciones sobre el parámetro b para que los puntos críticos de la Proposición 3.1.3 se reconstruyan como soluciones periódicas del sistema Hamiltoniano asociado a (3.1.3).

En primer lugar, introducimos coordenadas tipo Reeb (L, Q, ℓ, P) usando las transformaciones simplécticas $T_1: \Omega \mapsto \mathbb{R}^4$ y $T_2: \Omega \mapsto \mathbb{R}^4$ definidas en el Ejemplo 1.2.5.

En coordenadas de Reeb el Hamiltoniano (3.1.3) toma la forma

$$\mathcal{H}_\varepsilon(L, Q, \ell, P) = L + \varepsilon \mathcal{V}_1(L, Q, \ell, P), \quad j = 1, 2 \quad (3.1.9)$$

mientras que el Hamiltoniano normalizado (3.1.4) se escribe como

$$\mathcal{H}_\varepsilon^N(L, Q, \ell, P) = L + \varepsilon^2 \mathcal{H}_2^{(j)}(L, Q, P) + O(\varepsilon^4), \quad (3.1.10)$$

donde $\mathcal{H}_2^{(j)}$ es la perturbación relativa a la transformación T_j y está dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_2^{(1)} = & -\frac{5}{12}L^2 - \frac{1}{12}L[5(b+1)Q^2 + 7(b-1)P^2] \\ & - \frac{1}{48}(Q^2 + P^2)[5(b+1)(b-3)Q^2 + (b-1)(5b-9)P^2] \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_2^{(2)} = & -\frac{5}{12}b^2L^2 + \frac{1}{12}L[5(b-2)(b+1)Q^2 + (b-1)(5b-2)P^2] \\ & - \frac{1}{48}(Q^2 + P^2)[5(b+1)(b-3)Q^2 + (b-1)(5b-9)P^2], \end{aligned}$$

respectivamente. El Hamiltoniano reducido se obtiene de (3.1.10) haciendo $L = h$, truncando hasta términos de grado ε^2 , dividiendo por ε^2 y eliminando términos constantes. Así, el Hamiltoniano reducido sobre $\mathbb{C}\mathbb{P}_h$ relativo a T_1 toma la forma

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{H}}^{(1)}(Q, P) = & -\frac{1}{12}h[5(b+1)Q^2 + 7(b-1)P^2] \\ & - \frac{1}{48}(Q^2 + P^2)[5(b+1)(b-3)Q^2 + (b-1)(5b-9)P^2] \end{aligned}$$

y con respecto a T_2 es

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{H}}^{(2)}(Q, P) = & \frac{1}{12}h[5(b-2)(b+1)Q^2 + (b-1)(5b-2)P^2] \\ & - \frac{1}{48}(Q^2 + P^2)[5(b+1)(b-3)Q^2 + (b-1)(5b-9)P^2]. \end{aligned} \quad (3.1.11)$$

Las variables (Q, P) parametrizan el espacio reducido $\mathbb{C}\mathbb{P}_h$ y están relacionadas con

los polinomios invariantes (ver subsección 2.2.1). Usando las relaciones (2.2.5) y (2.2.6) identificamos los equilibrios de la Tabla 3.1.1 con puntos de \mathbb{R}^2 . Las expresiones obtenidas se muestran en la Tabla 3.1.2 y se puede verificar que son puntos críticos del Hamiltoniano reducido $\bar{\mathcal{H}}^{(j)}$.

Punto crítico	(U_1, ψ_1)	(U_2, ψ_2)
\mathcal{O}_1	$(0, 0)$	--
\mathcal{O}_2	--	$(0, 0)$
\mathcal{O}_3	$(-\sqrt{\frac{2h}{3-b}}, 0)$	$(\sqrt{\frac{(2-b)h}{3-b}}, 0)$
\mathcal{O}_4	$(\sqrt{\frac{2h}{3-b}}, 0)$	$(-\frac{\sqrt{2(b-1)h}}{\sqrt{a+b-2}}, 0)$
\mathcal{O}_5	$(0, -\sqrt{\frac{14h}{9-5b}})$	$(0, -\frac{\sqrt{2(3b-1)h}}{\sqrt{3a+3b-2}})$
\mathcal{O}_6	$(0, \sqrt{\frac{14h}{9-5b}})$	$(0, \frac{\sqrt{2(3b-1)h}}{\sqrt{3a+3b-2}})$

Tabla 3.1.2: Puntos críticos de $\bar{\mathcal{H}}^{(j)}$ en las variables (Q, P) .

Para aplicar el Teorema de Reeb, bastará probar que los puntos críticos en la Tabla 3.1.2 son no degenerados. Para determinar las condiciones de no degeneración, calculamos el determinante de la matriz Hessiana de $\bar{\mathcal{H}}^{(1)}$ y $\bar{\mathcal{H}}^{(2)}$ en cada punto crítico \mathcal{O}_j (ver Tabla 3.1.3).

Puntos críticos	$\det(D^2\bar{\mathcal{H}}^{(j)})$
\mathcal{O}_1	$\frac{35}{36}(b+1)(b-1)h^2$
\mathcal{O}_2	$\frac{5}{36}(b+1)(b-1)(b-2)(5b-2)h^2$
$\mathcal{O}_3, \mathcal{O}_4$	$\frac{5(6-b)(2-b)(1+b)h^2}{9(3-b)}$
$\mathcal{O}_5, \mathcal{O}_6$	$\frac{7(6-b)(1-b)(2-5b)h^2}{9(9-5b)}$

Tabla 3.1.3: Determinante de la matriz Hessiana en los puntos críticos de $\bar{\mathcal{H}}^{(j)}$.

En lo que sigue, denotaremos por $p^* \in \mathcal{N}_0(h)$ la solución periódica asociada al punto crítico $\bar{p} \in \mathbb{CP}_h$, esto es, $p^* = \rho_\pi^{-1}(\bar{p})$, donde $\rho_\pi: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ es la aplicación

de Hilbert definida por $\rho_\pi(x, y) = (\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4)$. De la Tabla 3.1.3 y el Teorema de Reeb se obtiene el siguiente resultado.

Teorema 3.1.1 *Sea $\mathcal{H}_0 = h > 0$. El sistema Hamiltoniano asociado al Hamiltoniano (3.1.3) tiene a los más 6 soluciones periódicas $\varphi(t, \varepsilon)$ de periodo $T(\varepsilon) = 2\pi + \varepsilon^2 T^* + O(\varepsilon^4)$ tales que $\varphi(t, 0) = p^* = \rho_\pi^{-1}(\bar{p})$.*

- i) Si $b \in (-\infty, 2/5) \setminus \{-1\}$ entonces $\bar{p} \in \{\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2, \dots, \mathcal{O}_6\}$.
- ii) Si $b \in (2/5, 2) \setminus \{1\}$ entonces $\bar{p} \in \{\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2, \mathcal{O}_3, \mathcal{O}_4\}$.
- iii) Si $b \in (2, \infty)$ entonces $\bar{p} \in \{\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2\}$.
- iv) Si $b = -1$ entonces $\bar{p} \in \{\mathcal{O}_5, \mathcal{O}_6\}$.
- v) Si $b = 2/5$ entonces $\bar{p} \in \{\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_3, \mathcal{O}_4\}$.
- vi) Si $b = 1$ entonces $\bar{p} \in \{\mathcal{O}_3, \mathcal{O}_4\}$.
- vii) Si $b = 2$ entonces $\bar{p} = \mathcal{O}_1$.

Demostración. Es consecuencia inmediata de la descripción dada en el párrafo anterior y la Tabla 3.1.3. □

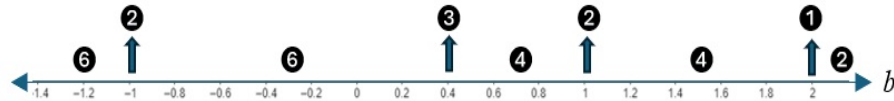


Figura 3.3: Línea de bifurcación de soluciones periódicas.

Observación 3.1.4 *Cuando $b \in \{2/5, 2\}$ el punto crítico \mathcal{O}_2 es degenerado y el Teorema de Reeb no aplica. Estos casos están asociados a bifurcaciones de soluciones periódicas como veremos mas adelante.*

Teorema 3.1.2 *La estabilidad de las soluciones periódicas del Teorema 3.1.1 es como sigue.*

- A) *La solución generada por \mathcal{O}_1 es linealmente estable cuando $b \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ e inestable cuando $b \in (-1, 1)$.*

- B) La solución generada por \mathcal{O}_2 es linealmente estable cuando $b \in (-\infty, -1) \cup (2/5, 1) \cup (2, +\infty)$ e inestable cuando $b \in (-1, 2/5) \cup (1, 2)$.
- C) Las soluciones generadas por \mathcal{O}_3 y \mathcal{O}_4 son linealmente estables cuando $b \in (-1, 1) \cup (1, 2)$ e inestables cuando $b \in (-\infty, -1)$.
- D) Las soluciones generadas por \mathcal{O}_5 y \mathcal{O}_6 existen y son linealmente estables cuando $b \in (-\infty, 2/5)$.

Demostración. Por la segunda parte del Teorema de Reeb, se sabe que la estabilidad de las soluciones periódicas es heredada de la estabilidad del correspondiente punto crítico. Ahora, si $A_{\bar{p}} = \mathbb{J}D^2\bar{\mathcal{H}}(\bar{p})$ es la matriz de linealización asociada a $\bar{\mathcal{H}}$ en el punto crítico \bar{p} , entonces el polinomio característico asociado es

$$p(\lambda) = \lambda^2 + \det[D^2\bar{\mathcal{H}}(\bar{p})].$$

De aquí, es evidente que si $\det[D^2\bar{\mathcal{H}}(\bar{p})]$ es positivo entonces los valores propios de $A_{\bar{p}}$ son imaginarios puros. En este caso, el punto crítico \bar{p} es estable (un centro), dando lugar a una solución periódica linealmente estable. Por otra parte, si $\det[D^2\bar{\mathcal{H}}(\bar{p})]$ es negativo, los valores propios son reales en cuyo caso el punto crítico \bar{p} es inestable (un punto silla) y entonces la solución periódica correspondiente es inestable en el sentido de Lyapunov. El determinante de la matriz Hessiana $D^2\bar{\mathcal{H}}$ en cada punto crítico es dado en la Tabla 3.1.3, de lo cual se sigue el resultado. \square

En la Figura 3.4 se muestra la evolución de los retratos de fase de los puntos críticos en la carta (U_1, ψ_1) .

Finalmente, analizaremos las bifurcaciones de soluciones periódicas que se reconstruyen de los puntos críticos en el espacio reducido. Del análisis anterior y el Teorema 3.1.1 se deduce que una posible bifurcación correspondiente al punto crítico $\mathcal{O}_2 = (0, 2h, 0, 0)$ toma lugar cuando $b \in \{2/5, 2\}$. Para llevar a cabo nuestro análisis, usaremos la transformación T_2 , el Hamiltoniano reducido (3.1.11) y las relaciones en (2.2.6). Note que el punto crítico \mathcal{O}_2 corresponde al punto $(0, 0)$ en la variables (Q, P) .

Teorema 3.1.3 *El Hamiltoniano $\mathcal{H}_\varepsilon(x, y)$ experimenta una bifurcación periódica pitchfork supercrítica cuando $b = 2/5$ y $b = 2$.*

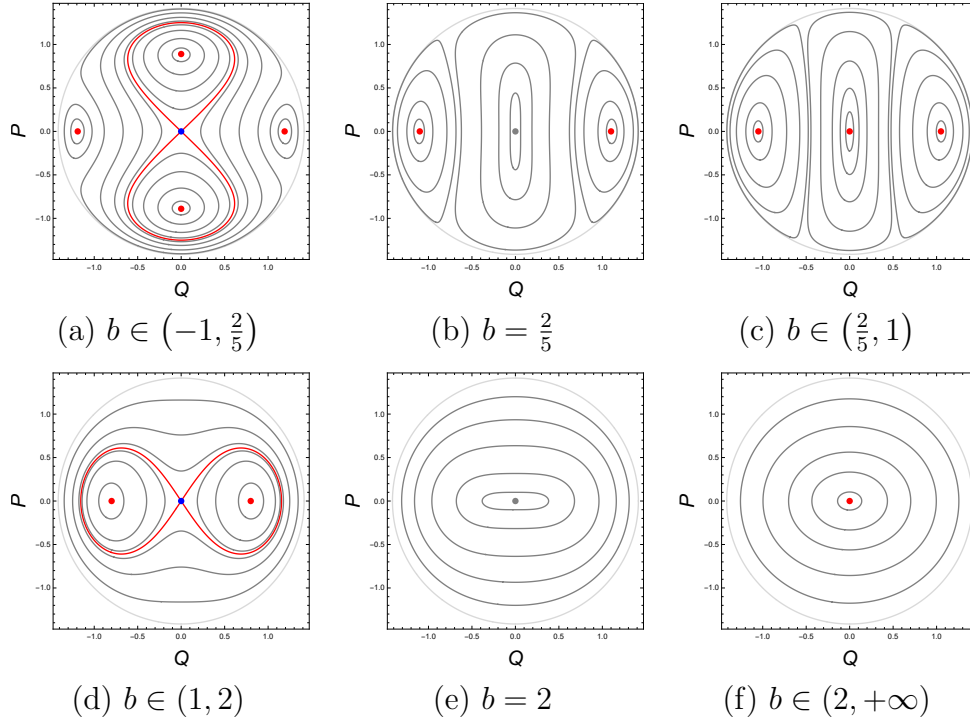


Figura 3.4: Evolución del flujo en la carta (U_2, ψ_2) centrado en $b = 2/5$ y $b = 2$.

Demostración. El Hamiltoniano reducido (3.1.11) puede ser expresado en la forma

$$\bar{\mathcal{H}}^{(2)}(Q, P) = c_{20}(b)Q^2 + c_{02}(b)P^2 + c_{40}(b)Q^4 + c_{22}(b)Q^2P^2 + c_{04}(b)P^4,$$

donde los coeficientes son dados por

$$\begin{aligned} c_{20} &= \frac{5}{12}h(b-2)(b+1), & c_{02} &= \frac{1}{12}h(b-1)(5b-2) \\ c_{40} &= -\frac{5}{48}(b-3)(b+1), & c_{22} &= -\frac{1}{24}(5b^2-12b-3), \\ c_{04} &= -\frac{1}{48}(b-1)(5b-9). \end{aligned}$$

Evaluando los coeficientes en $b = 2/5$ obtenemos que

$$c_{20} = -\frac{14h}{15}, \quad c_{02} = 0, \quad c_{40} = \frac{91}{240}, \quad c_{22} = \frac{7}{24}, \quad c_{04} = -\frac{7}{80}.$$

Además, $c'_{02}(2/5) = \frac{dc_{02}}{db}\Big|_{b=2/5} = -\frac{h}{4} \neq 0$, lo que implica que $(0, 0)$ es un punto de transición de $\bar{\mathcal{H}}^{(2)}$ (ver Observación 2.3.11). Así, por el Teorema 2.3.6, se conclu-

ye que una bifurcación periódica pitchfork toma lugar cuando $b = 2/5$. De forma análoga, evaluando los coeficientes en $b = 2$ encontramos que

$$c_{20} = 0, \quad c_{02} = \frac{2h}{3}, \quad c_{40} = \frac{5}{16}, \quad c_{22} = \frac{7}{24}, \quad c_{04} = -\frac{1}{48} \quad \text{y} \quad c'_{20}(2) = \frac{13h}{12}.$$

Luego, el Teorema 2.3.6 (intercambiando el orden de las coordenadas Q y P) implica que una bifurcación periódica pitchfork ocurre en $b = 2$. \square

Observación 3.1.5 *El Hamiltoniano $\mathcal{H}_\varepsilon(x, y) = \mathcal{H}_0(x, y) + \varepsilon\mathcal{V}_1(x)$ con potencial (3.1.2) y $d = 1$, esto es,*

$$\mathcal{H}_\varepsilon(x, y) = \frac{1}{2}(x_1^2 + y_1^2) + \frac{1}{2}(x_2^2 + y_2^2) + \varepsilon \left(\frac{c}{3}x_1^3 + x_1x_2^2 \right), \quad (3.1.12)$$

puede ser obtenido del Hamiltoniano de Hénon-Heiles mediante una rotación. Por tanto, el escenario para las bifurcaciones de soluciones periódicas en el Hamiltoniano (3.1.12) es equivalente al de (3.1.3).

3.1.2. Perturbaciones Cuárticas

Proposición 3.1.6 *El Hamiltoniano $\mathcal{H}_\varepsilon(x, y) = \mathcal{H}_0(x, y) + \varepsilon^2\mathcal{V}_2(x)$ es invariante por la simetría \mathcal{S}_1 y \mathcal{S}_2 cuando el potencial \mathcal{V}_2 es de la forma*

$$\mathcal{V}_2(x) = \alpha x_1^4 + \beta x_2^4 + \gamma x_1^2 x_2^2.$$

Demostración. Sea $\mathcal{V}_2(x) = b_1x_1^4 + b_2x_1^3x_2 + b_3x_1^2x_2^2 + b_4x_1x_2^3 + b_5x_2^4$. Procediendo como en la prueba de la Proposición 3.1.1 y haciendo $b_1 = \alpha$, $b_3 = \gamma$ y $b_5 = \beta$, obtenemos el Hamiltoniano

$$\mathcal{H}_\varepsilon(x, y) = \frac{1}{2}(x_1^2 + y_1^2) + \frac{1}{2}(x_2^2 + y_2^2) + \varepsilon^2\mathcal{V}_2(x), \quad (3.1.13)$$

con potencial $\mathcal{V}_2(x) = \alpha x_1^4 + \beta x_2^4 + \gamma x_1^2 x_2^2$. \square

Cuando $\alpha = \beta = -a/4$ y $\gamma = -(a + b)/2$, la función (3.1.13) corresponde al Hamiltoniano con potencial de Armbruster-Guckenheimer-Kim (AGK). El Hamiltoniano AGK ha sido estudiado en [2] en el contexto de la existencia de soluciones periódicas y toros KAM. Por otro lado, en [28] se estudió la existencia y estabilidad

de soluciones periódicas del Hamiltoniano (3.1.13) con $\gamma = 1$. Motivados por este trabajo, restringimos nuestro estudio de bifurcaciones al Hamiltoniano cuártico

$$\mathcal{H}_\varepsilon(x, y) = \frac{1}{2}(x_1^2 + y_1^2) + \frac{1}{2}(x_2^2 + y_2^2) + \varepsilon^2 (\alpha x_1^4 + \beta x_2^4 + x_1^2 x_2^2). \quad (3.1.14)$$

El Hamiltoniano (3.1.14) es conocido como Hamiltoniano galáctico y fue introducido por Andrieu en [5] para modelar el movimiento en el núcleo de una galaxia.

Después de normalizar el Hamiltoniano (3.1.14), el Hamiltoniano resultante \mathcal{H}_2 en función de los polinomios invariantes asume la forma

$$\mathcal{H}_2(\pi) = \frac{1}{8} (3\alpha\pi_1^2 + 3\beta\pi_2^2 + 3\pi_3^2 + \pi_4^2) \quad (3.1.15)$$

y su campo de Poisson asociado es

$$\begin{cases} \dot{\pi}_1 &= \pi_3\pi_4, \\ \dot{\pi}_2 &= -\pi_3\pi_4, \\ \dot{\pi}_3 &= \frac{\pi_4}{4} [(1 - 6\alpha)\pi_1 - (1 - 6\beta)\pi_2], \\ \dot{\pi}_4 &= \frac{3\pi_3}{4} [(1 - 2\beta)\pi_2 - (1 - 2\alpha)\pi_1]. \end{cases} \quad (3.1.16)$$

Los puntos $\mathcal{O}_1 = (2h, 0, 0, 0)$ y $\mathcal{O}_2 = (0, 2h, 0, 0)$ son equilibrios del sistema (3.1.16) y $\alpha = 1/6$, $\beta = 1/3$, $\alpha = 1/2$ y $\beta = 1/2$ son posibles valores de bifurcación.

Definiendo los conjuntos paramétricos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1^1 &= \{(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 : \alpha = 1/6, \beta \in (1/2, \infty)\}; \quad \mathcal{L}_1^2 = \{(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 : \alpha = 1/6, \beta \in (-\infty, 1/2) \setminus \{1/6\}\}; \\ \mathcal{L}_2^1 &= \{(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 : \beta = 1/6, \alpha \in (1/2, \infty)\}; \quad \mathcal{L}_2^2 = \{(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 : \beta = 1/6, \alpha \in (-\infty, 1/2) \setminus \{1/6\}\}; \\ \mathcal{L}_3^1 &= \{(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 : \alpha = 1/2, \beta \in (-\infty, 1/6)\}; \quad \mathcal{L}_3^2 = \{(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 : \alpha = 1/2, \beta \in (1/6, +\infty) \setminus \{1/2\}\}; \\ \mathcal{L}_4^1 &= \{(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 : \beta = 1/2, \alpha \in (-\infty, 1/6)\}; \quad \mathcal{L}_4^2 = \{(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 : \beta = 1/2, \alpha \in (1/6, +\infty) \setminus \{1/2\}\}; \\ \mathcal{A}_1 &= \{(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 : \alpha < 1/6, 1/6 < \beta < 1/2\}; \quad \mathcal{A}_2 = \{(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 : 1/6 < \alpha < 1/2, \beta < 1/6\}; \\ \mathcal{B}_1 &= \{(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 : 1/6 < \alpha < 1/2, \beta > 1/2\}; \quad \mathcal{B}_2 = \{(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 : \alpha > 1/2, 1/6 < \beta < 1/2\}; \\ \mathcal{C}_1 &= \{(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 : \alpha < 1/6, \beta > 1/2\}; \quad \mathcal{C}_2 = \{(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 : \alpha > 1/2, \beta < 1/6\} \end{aligned} \quad (3.1.17)$$

y denotando $\mathcal{A} = \bigcup_{j=1}^2 \mathcal{A}_j$, $\mathcal{B} = \bigcup_{j=1}^2 \mathcal{B}_j$, $\mathcal{C} = \bigcup_{j=1}^2 \mathcal{C}_j$, $\mathcal{D} = \mathbb{R}^2 \setminus \overline{(\mathcal{A} \cup \mathcal{B} \cup \mathcal{C})}$, $\sigma_1 = (1/6, 1/2)$, $\sigma_2 = (1/2, 1/6)$, $\sigma_3 = (1/6, 1/6)$, y $\sigma_4 = (1/2, 1/2)$, obtenemos el

siguiente resultado demostrado en [28].

Proposición 3.1.7 *Sobre el espacio reducido \mathbb{CP}_h , el sistema (3.1.16) tiene a lo más 6 puntos críticos aislados, cuatro son de tipo rectilíneo: $\mathcal{O}_1, \dots, \mathcal{O}_4$ y dos de tipo elíptico: $\mathcal{O}_5, \mathcal{O}_6$ (ver Tabla 3.1.4).*

i) *En la región \mathcal{D} existen seis puntos críticos.*

ii) *En la región $\mathcal{A} \cup \mathcal{B} \cup \left(\bigcup_{j=1}^4 \mathcal{L}_j^2 \right)$, existen cuatro puntos críticos.*

- *Para $(\alpha, \beta) \in \mathcal{A} \cup \mathcal{L}_1^2 \cup \mathcal{L}_2^2$, los puntos críticos son de tipo rectilíneo.*

- *Para $(\alpha, \beta) \in \mathcal{B} \cup \mathcal{L}_3^2 \cup \mathcal{L}_4^2$, los puntos críticos son $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2, \mathcal{O}_5$ y \mathcal{O}_6 .*

iii) *En la región $\mathcal{C} \cup \left(\bigcup_{j=1}^4 \mathcal{L}_j^1 \right) \cup \{\sigma_j : j = 1, \dots, 4\}$, existen dos puntos críticos.*

- *Para $(\alpha, \beta) \in \mathcal{C} \cup \left(\bigcup_{j=1}^4 \mathcal{L}_j^1 \right) \cup \{\sigma_1, \sigma_2\}$ los puntos críticos son $\mathcal{O}_2, \mathcal{O}_2$.*

- *Para $(\alpha, \beta) \in \{\sigma_3\}$, los puntos críticos son \mathcal{O}_3 y \mathcal{O}_4 .*

- *Para $(\alpha, \beta) \in \{\sigma_4\}$, los puntos críticos corresponden a \mathcal{O}_5 y \mathcal{O}_6 .*

Puntos críticos	$\mathcal{O}_i = (\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4)$
\mathcal{O}_1	$(2h, 0, 0, 0)$
\mathcal{O}_2	$(0, 2h, 0, 0)$
\mathcal{O}_3	$\left(\frac{(2\beta-1)h}{\alpha+\beta-1}, \frac{(2\alpha-1)h}{\alpha+\beta-1}, \frac{\sqrt{(2\alpha-1)(2\beta-1)h}}{ \alpha+\beta-1 }, 0 \right)$
\mathcal{O}_4	$\left(\frac{(2\beta-1)h}{\alpha+\beta-1}, \frac{(2\alpha-1)h}{\alpha+\beta-1}, -\frac{\sqrt{(2\alpha-1)(2\beta-1)h}}{ \alpha+\beta-1 }, 0 \right)$
\mathcal{O}_5	$\left(\frac{(6\beta-1)h}{3\alpha+3\beta-1}, \frac{(6\alpha-1)h}{3\alpha+3\beta-1}, 0, \frac{\sqrt{(6\alpha-1)(6\beta-1)h}}{ 3\alpha+3\beta-1 } \right)$
\mathcal{O}_6	$\left(\frac{(6\beta-1)h}{3\alpha+3\beta-1}, \frac{(6\alpha-1)h}{3\alpha+3\beta-1}, 0, -\frac{\sqrt{(6\alpha-1)(6\beta-1)h}}{ 3\alpha+3\beta-1 } \right)$

Tabla 3.1.4: Puntos críticos del campo (3.1.16)

La variación del número de puntos críticos está asociada a las rectas de bifurcación: $\alpha = 1/6$, $\alpha = 1/2$, $\beta = 1/6$ y $\beta = 1/2$ que corresponden a los conjuntos \mathcal{L}_j^k , $j = 1, \dots, 4$, $k = 1, 2$ definidos en (3.1.17) (ver Figura 3.5).

De la Tabla 3.1.4 podemos observar que los pares de equilibrios $\{\mathcal{O}_3, \mathcal{O}_4\}$ y $\{\mathcal{O}_5, \mathcal{O}_6\}$ colisionan con \mathcal{O}_1 cuando $\alpha = 1/6$ y $\alpha = 1/2$, respectivamente. De la

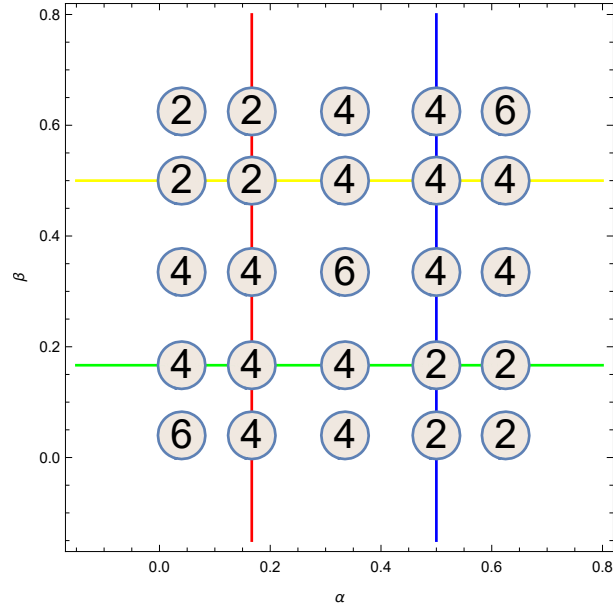


Figura 3.5: Diagrama de bifurcación de puntos críticos.

misma forma, colisionan con \mathcal{O}_2 cuando $\beta = 1/6$ y $\beta = 1/2$, respectivamente. Este escenario corresponde a una bifurcación pitchfork de equilibrios.

En lo que sigue, nos restringimos al estudio de bifurcaciones de soluciones periódicas de tipo pitchfork que se originan cuando $\alpha \in \{1/6, 1/2\}$.

El Hamiltoniano (3.1.14) en las variables tipo Reeb toma la forma

$$\mathcal{H}_\varepsilon(L, Q, \ell, P) = L + \varepsilon^2 \mathcal{V}_2(L, Q, \ell, P), \quad (3.1.18)$$

mientras que el Hamiltoniano normalizado se escribe como

$$\mathcal{H}_\varepsilon^N(L, Q, \ell, P) = L + \varepsilon^2 \mathcal{H}_2(L, Q, P) + O(\varepsilon^4), \quad (3.1.19)$$

donde

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_2 = & \frac{3}{2}\alpha L^2 + \frac{1}{4}L [3(1 - 2\alpha)Q^2 + (1 - 6\alpha)P^2] + \\ & \frac{1}{8}(Q^2 + P^2) [3(\alpha + \beta - 1)Q^2 + (3\alpha + 3\beta - 1)P^2]. \end{aligned}$$

El Hamiltoniano reducido se obtiene de (3.1.19) haciendo $L = h$, truncando hasta términos de grado ε^2 , dividiendo por ε^2 y eliminando términos constantes.

Así, el Hamiltoniano reducido sobre $\mathbb{C}\mathbb{P}_h$ es dado por

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{H}}(Q, P) = & \frac{1}{4}h [3(1 - 2\alpha)Q^2 + (1 - 6\alpha)P^2] + \frac{1}{8} \\ & (Q^2 + P^2) [3(\alpha + \beta - 1)Q^2 + (3\alpha + 3\beta - 1)P^2]. \end{aligned} \quad (3.1.20)$$

Ahora, usando (2.2.5) identificamos los equilibrios de la Tabla 3.1.4 con los puntos de \mathbb{R}^2 mostrados en la Tabla 3.1.2, los cuales corresponden a puntos críticos del Hamiltoniano reducido $\bar{\mathcal{H}}$.

Punto crítico	(\mathbf{U}_1, ψ_1)
\mathcal{O}_1	$(0, 0)$
\mathcal{O}_2	--
\mathcal{O}_3	$\left(\frac{\sqrt{(2\alpha-1)h}}{\sqrt{\alpha+\beta-1}}, 0 \right)$
\mathcal{O}_4	$\left(-\frac{\sqrt{(2\alpha-1)h}}{\sqrt{\alpha+\beta-1}}, 0 \right)$
\mathcal{O}_5	$\left(0, \frac{\sqrt{(6\alpha-1)h}}{\sqrt{3\alpha+3\beta-1}} \right)$
\mathcal{O}_6	$\left(0, -\frac{\sqrt{(6\alpha-1)h}}{\sqrt{3\alpha+3\beta-1}} \right)$

Tabla 3.1.5: Puntos críticos de $\bar{\mathcal{H}}$ en las variables (Q, P) .

A continuación, mostraremos que bifurcaciones de soluciones periódicas correspondientes al punto crítico $\mathcal{O}_1 = (0, 2h, 0, 0)$ toma lugar cuando $\alpha = 1/6$.

Teorema 3.1.4 *Si $\beta \in (1/6, +\infty)$ entonces el Hamiltoniano $\mathcal{H}_\varepsilon(x, y)$ experimenta una bifurcación periódica pitchfork supercrítica en $\alpha = 1/6$.*

Demostración. El Hamiltoniano reducido (3.1.20) puede ser expresado en la forma

$$\bar{\mathcal{H}}(Q, P) = c_{20}(\alpha)Q^2 + c_{02}(\alpha)P^2 + c_{40}(\alpha)Q^4 + c_{22}(\alpha)Q^2P^2 + c_{04}(\alpha)P^4,$$

donde los coeficientes son dados por

$$\begin{aligned} c_{20} &= \frac{3}{4}h(1 - 2\alpha), & c_{02} &= \frac{1}{4}h(1 - 6\alpha), \\ c_{40} &= \frac{3}{8}(\alpha + \beta - 1), & c_{22} &= \frac{1}{4}(3\alpha + 3\beta - 2), & c_{04} &= \frac{1}{8}(3\alpha + 3\beta - 1). \end{aligned}$$

Evaluando los coeficientes en $\alpha = 1/6$ obtenemos que

$$c_{20} = \frac{h}{2}, \quad c_{02} = 0, \quad c_{40} = \frac{1}{16}(6\beta - 5), \quad c_{22} = \frac{3}{8}(2\beta - 1), \quad c_{04} = \frac{1}{16}(6\beta - 1)$$

y $c'_{02}(1/6) = \left. \frac{dc_{02}}{d\alpha} \right|_{\alpha=1/6} = -\frac{3h}{2} \neq 0$. Como c_{20} y c_{04} son no nulos cuando $\beta \in (1/6, +\infty)$, entonces $(0, 0)$ es un punto de transición de $\bar{\mathcal{H}}$. Así, por el Teorema 2.3.6, se concluye que una bifurcación periódica pitchfork toma lugar cuando $\alpha = 1/6$. Además, la bifurcación es supercrítica ya que c_{20} y c_{04} tienen el mismo signo. \square

3.2. Bifurcaciones periódicas centro-silla

En esta sección describimos un procedimiento para determinar bifurcaciones periódicas centro-silla mediante el uso de las variables de Reeb y el Teorema 2.3.5.

3.2.1. Perturbaciones Cúbicas

Considere el Hamiltoniano

$$\mathcal{H}_\varepsilon(x, y) = \mathcal{H}_0(x, y) + \varepsilon\mathcal{V}_1(x), \quad (3.2.1)$$

donde $\mathcal{V}_1(x) = a_1x_1^3 + a_3x_1x_2^2 + a_4x_2^3$.

En primer lugar, introducimos coordenadas tipo Reeb (L, Q, ℓ, P) a través de la transformación simpléctica $T_1: \Omega \mapsto \mathbb{R}^4$ definida en el Ejemplo 1.2.5. Un tratamiento similar es realizable usando la transformación T_2 .

El Hamiltoniano (3.2.1) en variables de Reeb asume la forma

$$\mathcal{H}(L, Q, \ell, P) = L + \varepsilon\mathcal{V}_1(L, Q, \ell, P), \quad (3.2.2)$$

donde

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_1 = & a_1(2L - Q^2 - P^2)^{3/2} \cos^3 \ell + a_3\sqrt{2L - Q^2 - P^2} \cos \ell (Q \cos \ell - P \operatorname{sen} \ell)^2 \\ & + a_4(Q \cos \ell - P \operatorname{sen} \ell)^3. \end{aligned}$$

A continuación, hacemos una normalización (o promedio) por el método de Lie-Deprit en las variables de Reeb (ver sección 1.5.1). El Hamiltoniano normalizado hasta términos de orden ε^2 se escribe como

$$\mathcal{H}_\varepsilon(L, Q, \ell, P) = L + \varepsilon^2 \mathcal{H}_2(L, Q, P) + O(\varepsilon^4), \quad (3.2.3)$$

donde

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_2 = & -\frac{15}{4}a_1^2L^2 + \frac{1}{12}L [5(3a_1 + a_3)(3a_1 - 2a_3)Q^2 + (3a_1 - a_3)(15a_1 - 2a_3)P^2] \\ & - \frac{5}{4}a_3a_4Q(Q^2 + P^2)\sqrt{2L - Q^2 - P^2} + \frac{1}{16}(Q^2 + P^2) [5(-3a_1^2 + 2a_1a_3 + a_3^2 - 3a_4^2)Q^2 \\ & + (15a_1^2 - 14a_1a_3 + 3a_3^2 + 15a_4^2)P^2]. \end{aligned}$$

El Hamiltoniano reducido es obtenido de \mathcal{H}_2 haciendo $L = h$. A continuación, expandimos el Hamiltoniano reducido en torno a un punto de la forma $(Q, P) = (x_0, 0)$ y eliminamos términos constantes. El Hamiltoniano resultante es

$$\bar{\mathcal{H}}(Q, P) = c_{10}Q + c_{20}Q^2 + c_{02}P^2 + c_{30}Q^3 + c_{12}QP^2 + \dots, \quad (3.2.4)$$

donde c_{ij} son constantes que dependen de los parámetros a_1, a_3, a_4 y x_0 . Los puntos suspensivos indican términos de grado mayor o igual a 4 en las variables (Q, P) . Para determinar las condiciones sobre los parámetros para que una bifurcación centro-silla de equilibrios ocurra, usaremos el Teorema 2.3.5. Usando Mathematica 14, resolvemos el sistema $c_{10}(a_1, a_3, a_4, x_0) = 0$, $c_{20}(a_1, a_3, a_4, x_0) = 0$ para a_1, x_0 de modo que c_{02} y c_{30} no se anulen. De las 6 soluciones que se obtienen, la más simple en términos de las relaciones entre los parámetros corresponde a

$$a_1 = \frac{2a_3}{3} + \frac{3a_4^2}{4a_3}, \quad x_0 = 3a_4 \sqrt{\frac{2h}{4a_3^2 + 9a_4^2}}. \quad (3.2.5)$$

Como existe libertad para los parámetros a_3 y a_4 , con el fin de obtener una familia uniparamétrica de Hamiltonianos, tomaremos $a_3 = 1/2$, $a_4 = 1/3$ y renombramos $a_1 = a$. Usando estos valores en (3.2.5) encontramos que $a = 1/2$ y $x_0 = \sqrt{h}$.

Adicionalmente, el Hamiltoniano (3.2.1) toma la forma

$$\mathcal{H}_\varepsilon(x, y) = \frac{1}{2}(x_1^2 + y_1^2) + \frac{1}{2}(x_2^2 + y_2^2) + \varepsilon \left(ax_1^3 + \frac{1}{2}x_1x_2^2 + \frac{1}{3}x_2^3 \right). \quad (3.2.6)$$

En el siguiente Teorema mostraremos que una bifurcación periódica centro-silla toma lugar para el Hamiltoniano (3.2.6) cuando $a = 1/2$.

Teorema 3.2.1 *El Hamiltoniano $\mathcal{H}_\varepsilon(x, y)$ definido en (3.2.6) experimenta una bifurcación periódica centro-silla cuando $a = 1/2$.*

Demostración. Reemplazando los valores $a_3 = 1/2$ y $a_4 = 1/3$ en (3.2.4), el Hamiltoniano reducido toma la forma

$$\bar{\mathcal{H}}(Q, P) = c_{10}(a)Q + c_{20}(a)Q^2 + c_{02}(a)P^2 + c_{30}(a)Q^3 + c_{12}(a)QP^2 + \dots,$$

donde

$$\begin{aligned} c_{10}(a) &= \frac{15}{16}h^{3/2}(4a^2 - 1), & c_{20}(a) &= -\frac{5}{32}h(2a - 1)(6a - 1), \\ c_{02}(a) &= \frac{1}{96}h(180a^2 - 12a - 23), & c_{30}(a) &= -\frac{5}{48}h(36a^2 - 12a - 11), \\ c_{12}(a) &= -\frac{1}{16}h(60a^2 - 24a - 1). \end{aligned}$$

De acuerdo al Teorema 2.3.5, para mostrar que una bifurcación centro-silla ocurre cuando $a = 1/2$, bastará verificar que $x_0 = \sqrt{h}$ es un punto extremo de $\bar{\mathcal{H}}$ cuando $a = 1/2$. En efecto, cuando $a = 1/2$ los coeficientes c_{ij} toman los valores

$$c_{10} = c_{20} = 0, \quad c_{02} = \frac{h}{6}, \quad c_{12} = -\frac{\sqrt{h}}{8}, \quad c_{30} = \frac{5\sqrt{h}}{6}$$

y además, $c'_{10} = \frac{dc_{10}}{da}(1/2) = \frac{15}{4}h^{3/2}$. Como c_{02}, c_{30} y c'_{10} no se anulan cuando $a = 1/2$, se concluye que $x_0 = \sqrt{h}$ es un punto extremo de $\bar{\mathcal{H}}$ y por lo tanto, una bifurcación periódica centro-silla toma lugar cuando $a = 1/2$. \square

El retrato de fase con las bifurcaciones de equilibrios que generan la bifurcación periódica centro-silla en $a = 1/2$ se muestra en la Figura 3.6.

Las bifurcaciones de equilibrios también se pueden visualizar sobre la esfera $\mathbb{C}\mathbb{P}_h$. Para conseguirlo, reemplazamos $a_3 = 1/2$, $a_4 = 1/3$ en el Hamiltoniano normalizado

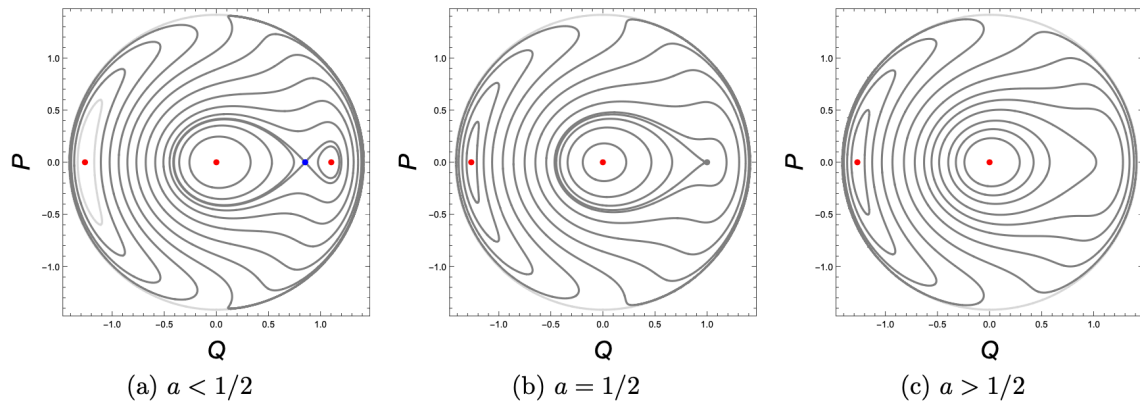


Figura 3.6: Evolución del flujo en la carta (U_1, ψ_1) centrada en $a = 1/2$.

(3.2.2) y luego escribimos el Hamiltoniano resultante en términos de los invariantes usando las relaciones (2.2.5). Así, el Hamiltoniano reducido sobre la esfera toma la forma

$$\bar{\mathcal{H}} = -\frac{1}{192} [180a^2\pi_1^2 + 25\pi_2^2 + 40\pi_2\pi_3 + 20(1 + 3a)\pi_3^2 - 4(1 - 21a)\pi_4^2]. \quad (3.2.7)$$

El retrato de fase con las bifurcaciones de equilibrios sobre la esfera $\mathbb{C}\mathbb{P}_h$ se muestra en la Figura 3.7.

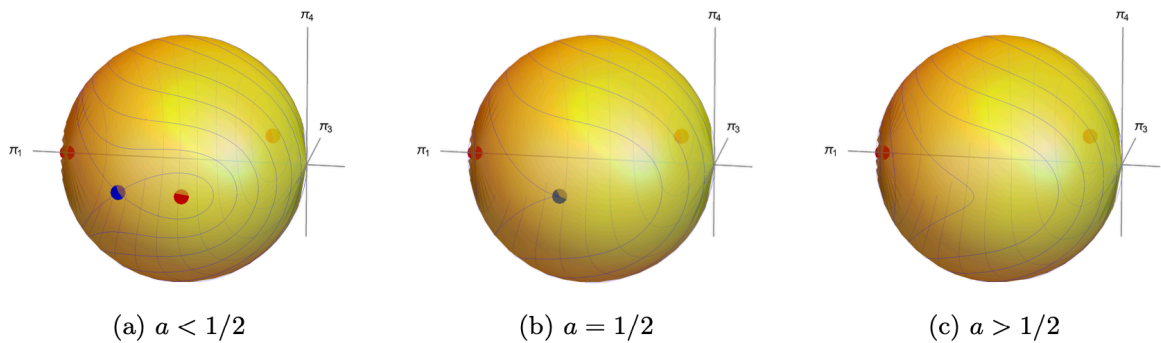


Figura 3.7: Evolución del flujo sobre la esfera $\mathbb{C}\mathbb{P}_h$ centrada en $a = 1/2$.

3.2.2. Perturbaciones Cuárticas

Considere el Hamiltoniano

$$\mathcal{H}_\varepsilon(x, y) = \mathcal{H}_0(x, y) + \varepsilon \mathcal{V}_2(x), \quad (3.2.8)$$

donde $\mathcal{V}_1(x) = a_1 x_1^4 + a_2 x_1^3 x_2 + a_3 x_1^2 x_2^2 + a_4 x_1 x_2^3 + a_5 x_2^4$.

Procediendo como en el caso cúbico, obtenemos que la forma normal del Hamiltoniano (3.2.8) en variables de Reeb toma la forma

$$\mathcal{H}(L, Q, \ell, P) = L + \varepsilon^2 \mathcal{H}_2(L, Q, P) + O(\varepsilon^4), \quad (3.2.9)$$

donde

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_2 = & \frac{3}{2} a_1 L^2 + \frac{1}{4} L [3(a_3 - 2a_1)Q^2 + (a_3 - 6a_1)P^2] \\ & + \frac{3}{8} \sqrt{2L - Q^2 - P^2} [2a_2 LQ + (a_4 - a_2)QP^2 + (a_4 - a_2)Q^3] \\ & + \frac{1}{8} (Q^2 + P^2) [3(a_1 - a_3 + a_5)Q^2 + (3a_1 - a_3 + 3a_5)P^2]. \end{aligned}$$

A continuación, hacemos $L = h$ en \mathcal{H}_2 para obtener el Hamiltoniano reducido y expandimos el Hamiltoniano en torno al punto $(Q, P) = (x_0, 0)$. Eliminando los términos constantes encontramos que el Hamiltoniano reducido toma la forma

$$\bar{\mathcal{H}} = c_{10}Q + c_{02}Q^2 + c_{02}P^2 + c_{30}Q^3 + c_{12}QP^2 + \dots \quad (3.2.10)$$

donde c_{ij} dependen de los parámetros a_k y x_0 . En particular, tenemos que

$$\begin{aligned} c_{10} = & -\frac{3}{2} x_0 [h(2a_1 - a_3) + (-a_1 + a_3 - a_5)x_0^3] \\ & + \frac{3}{4\sqrt{2h - x_0^2}} [2h^2 a_2 + h(-5a_2 + 3a_4)x_0^2 + 2(a_2 - a_4)x_0^4]. \end{aligned}$$

Note que $x_0 = 0$ anula c_{10} solamente cuando $a_2 = 0$. Luego, para simplificar los cálculos, hacemos $2a_1 - a_3 = -a_1 + a_3 - a_5 = 0$ obteniendo $a_3 = 2a_1$ y $a_5 = a_1$.

Usando estas relaciones en c_{10} y c_{02} encontramos

$$c_{10} = \frac{3h^{3/2}a_2}{2\sqrt{2}}, \quad c_{20} = 0, \quad c_{02} = -ha_1, \quad c_{30} = c_{12} = -\frac{3\sqrt{h}(3a_2 - 2a_4)}{8\sqrt{2}}$$

cuando $x_0 = 0$. Del análisis anterior se sigue que cuando $a_2 = 0$, el origen es un punto de equilibrio. Además, asumiendo que $a_1 \cdot a_4 \neq 0$, los coeficientes c_{02} , c_{30} y c'_{10} no se anulan en $a_2 = 0$. Esto implica que el origen es un punto extremo de $\bar{\mathcal{H}}$ cuando $a_2 = 0$ (ver Observación 2.3.9). En particular, haciendo $a_1 = 1$, $a_2 = a$ y $a_4 = 1$, tenemos el siguiente resultado.

Teorema 3.2.2 *El Hamiltoniano $\mathcal{H}_\varepsilon(x, y)$ definido por*

$$\mathcal{H}_\varepsilon(x, y) = \frac{1}{2}(x_1^2 + y_1^2) + \frac{1}{2}(x_2^2 + y_2^2) + \varepsilon^2 [(x_1^2 + x_2^2)^2 + ax_1^3x_2 + x_1x_2^3]$$

experimenta una bifurcación periódica centro-silla cuando $a = 0$.

Conclusiones y trabajo futuro

En esta tesis, estudiamos analíticamente las bifurcaciones de soluciones periódicas en sistemas Hamiltonianos en resonancia $1 : 1$, donde la perturbación es dada por un potencial cúbico y cuártico. Específicamente, se han abordado los siguientes proyectos:

I) BIFURCACIONES PERIÓDICAS DE TIPO PITCHFORK EN SISTEMAS HAMILTONIANOS EN RESONANCIA $1 : 1$. Las principales contribuciones de este proyecto son las siguientes:

- i)* Establecemos un resultado general sobre las bifurcaciones tipo pitchfork de soluciones periódicas mediante teoría de reducción. Este resultado es enunciado en el Teorema 2.3.6.
- ii)* Caracterizamos familias cúbicas y cuárticas de Hamiltonianos en resonancia $1 : 1$ con simetrías discretas de reflexión. Las bifurcaciones pitchfork son frecuentes en este tipo de Hamiltonianos simétricos.
- iii)* En cada familia de Hamiltonianos simétricos, determinamos el sistema de Poisson asociado y caracterizamos todas las soluciones de equilibrio. Además, obtenemos el Hamiltoniano normalizado y el sistema Hamiltoniano reducido en las variables de Reeb.
- iv)* Estudiamos la dinámica en el sistema Hamiltoniano reducido. Aquí, determinamos los puntos críticos no degenerados y su estabilidad. Luego, usando el Teorema de Reeb “reconstruimos” estos puntos críticos como soluciones periódicas con el mismo tipo de estabilidad en el sistema original.
- v)* En el sistema reducido, determinamos condiciones sobre los parámetros para que ocurran bifurcaciones pitchfork de puntos críticos.

- iv)* Finalmente, usando el Teorema 2.3.6 determinamos condiciones de no degeneración en los parámetros para que las bifurcaciones pitchfork de puntos críticos se reconstruyan como bifurcaciones pitchfork periódicas.

Resultados parciales de este proyecto fueron presentados en el XXXI CONGRESO DE MATEMÁTICA CAPRICORNIO (COMCA 2023) con la charla titulada: “*Bifurcaciones de soluciones periódicas en sistemas Hamiltonianos en resonancia 1 : 1*”

II) BIFURCACIONES PERIÓDICAS DE TIPO CENTRO-SILLA EN SISTEMAS HAMILTONIANOS EN RESONANCIA 1 : 1.

Las contribuciones de este segundo proyecto son las siguientes:

- i)* Establecemos un resultado general sobre bifurcaciones tipo centro-silla de soluciones periódicas mediante teoría de reducción. Este resultado es enunciado en el Teorema 2.3.5.
- ii)* Consideramos familias de Hamiltonianos cúbicos y cuárticos y los expresamos en variables de Reeb. A continuación, normalizamos (promediamos) los Hamiltonianos y determinamos el sistema Hamiltoniano reducido asociado.
- iii)* En el sistema Hamiltoniano reducido, imponemos condiciones sobre los parámetros para que una bifurcación centro-silla de puntos críticos tome lugar.
- iv)* Finalmente, usando el Teorema 2.3.5 determinamos condiciones de no degeneración en los parámetros para que las bifurcaciones centros-silla de puntos críticos se reconstruyan como bifurcaciones centro-silla periódicas.

Los resultados de estos proyectos se escribirán en formato artículo para ser sometidos a una revista WOS de sistemas dinámicos.

Como trabajo futuro, se proponen algunos proyectos que pueden considerarse como una extensión del estudio realizado en esta tesis.

- A) Caracterizar Hamiltonianos de grado cinco y seis en resonancia 1 : 1 donde ocurran bifurcaciones periódicas pitchfork y centro-silla.

- B) Extender el estudio realizado en el Proyecto I) para la familia de Hamiltonianos tipo Hénon-Heiles de quinto grado

$$\mathcal{H}_\varepsilon(x, y) = \frac{1}{2} (x_1^2 + y_1^2) + \frac{1}{2} (x_2^2 + y_2^2) + \varepsilon^3 \mathcal{P}(x, y). \quad (3.2.11)$$

donde

$$\mathcal{P}(x, y) = \frac{a}{5} x_1^5 + b x_1^3 x_2^2 + \frac{c}{5} x_1 x_2^4,$$

y a, b, c son parámetros reales.

Bibliografía

- [1] P. ACOSTA-HUMÁNEZ, M. ALVAREZ-RAMÍREZ, AND T. J. STUCHI, *Nonintegrability of the Armbruster - Guckenheimer - Kim Quartic Hamiltonian through Morales - Ramis Theory*. SIAM J. Appl. Dyn. Syst., **17**(1) (2018), 78-96.
- [2] M. ÁLVAREZ-RAMÍREZ, A. GARCÍA, AND J. VIDARTE, *Armbruster-Guckenheimer-Kim Hamiltonian system in 1:1 resonance*. Russian Journal of Nonlinear Dynamics, **17**(1) (2021), 59-76
- [3] P. ANDRLE, *A third integral of motion in a system with a potential of the fourth degree*, Bulletin of the Astronomical Institutes of Czechoslovakia, **17**(4) (1966), 169-175.
- [4] R. ABRAHAM AND J. E. MARSDEN, *Foundations of Mechanics 2nd edn*. New York: Benjamin-Cummings (1978)
- [5] P. ANDRLE, *A Third Integral of Motion in a System with a Potential of the Fourth Degree*. Phys. Lett. A. , **17**(4) (1966), 169-175.
- [6] V. ARNOLD, V. KOZLOV, AND A. NEISHTADT, *Mathematical Aspects of Classical and Celestial Mechanics. Encyclopaedia of Mathematical Sciences vol 3. Dynamical Systems III - 3rd edn*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg (2006)
- [7] J. BINNEY AND S. TREMAINE, *Galactic Dynamics*, Second Edition, Princeton University Press, 2008.
- [8] H. BROER, I. HOVEIJN, G. LUNTER, AND G. VEGTER, *Bifurcations in Hamiltonian Systems. Computing Singularities by Gröbner Bases. (Lecture Notes in Mathematics)*. Springer (2003)

- [9] N. CARANICOLAS AND H. VARVOGLIS, *Families of periodic orbits in a quartic potential*. *Astron. Astrophys* **141** (1984), 383-388
- [10] R. CUSHMAN, M. KUMMER, AND D. ROD, *On averaging, Reduction, and Symmetry in Hamiltonian Systems*. *Journal of Differential Equations* **49** (1983), 359-414.
- [11] A. DEPRIT, *Canonical transformations depending on a small parameter*. *Celestial Mech.* **1** (1969), 12-30.
- [12] A. DEPRIT, AND A. ELIPE, *The Lissajous Transformation: 2. Normalization*. *Celest. Mech. Dyn. Astron.*, 1991, vol. 51, no. 3, pp. 227-250.
- [13] K. EFSTATHIOU, D.A. SADOVSKIÍ, AND B. I. ZHILINSKIÍ, *Analysis of rotation-vibration relative equilibria on the example of a tetrahedral four atom molecule*. *SIAM J. Appl. Dyn. Syst.* **3**(3) (2004), 261-351.
- [14] M. EL SAMATOLY, *Averaging and bifurcation theory PhD Thesis*. University of Cincinnati (1984)
- [15] M. C. GUTZWILLER, *Chaos in Classical and Quantum Mechanics*. *Interdisciplinary Applied Mathematics* **1**, Springer-Verlag, New York, 1990.
- [16] H. HANSSMANN, *Local and Semi-Local Bifurcations in Hamiltonian Dynamical Systems: Results and Examples. (Lecture Notes in Mathematics)*. Berlin: Springer (2007)
- [17] E. LACOMBA AND J. LLIBRE, *Dynamics of a galactic Hamiltonian system*, *J. Math. Phys.* **53** (2012), 9 pp.
- [18] J. MARSDEN AND A. WEINSTEIN, *Reduction of symplectic manifolds with symmetry*. *Rep. Math. Phys* **5** (1974), 121-130.
- [19] K.R. MEYER, J.F. PALACIÁN, P. YANGUAS, AND H. S. DUMAS, *Periodic solutions in Hamiltonian systems, averaging, and the lunar problem*, *SIAM J. Appl. Dyn. Syst.* **7** (2) (2008), 311-340.

- [20] K.R. MEYER AND D. OFFIN, *Introduction to Hamiltonian Dynamical Systems and the N-Body Problem (Applied Mathematical Sciences vol 90) 3rd edn.* New York: Springer (2017)
- [21] K.R. MEYER, J.F. PALACIÁN, AND P. YANGUAS, *Singular reduction of resonant Hamiltonians.* Nonlinearity **31** (2018), 2854-2894
- [22] J. MOSER, *Regularization of Kepler's problem and the averaging method on a manifold* Comm. Pure. Appl. Math., **23** (1970), 609-636
- [23] J. PALACIÁN, C. VIDAL, J. VIDARTE, AND P. YANGUAS, *Periodic Solutions and KAM tori in a Triaxial Potential,* SIAM J. Appl. Dyn. Syst. **16** (2017), 159-187.
- [24] T. POSTON AND I. STEWART, *Catastrophe Theory and its Applications.* Boston, MA: Pitman (1978)
- [25] G. REEB, *Sur certaines propriétés topologiques des trajectoires des systèmes dynamiques.* Mém. Acad. Royale Belgique, Cl.Sc. t. **27** (1952), 1-64
- [26] J. SANDERS, F. VERHULST, AND J. MURDOCK, *Averaging Methods in Non-linear Dynamical Systems.* Springer-Verlag, 2007.
- [27] H. SCHOMERUS, *Periodic orbits near bifurcations of codimension two: Classical mechanics, semiclassics and Stokes transitions.* J. Phys. A: Math. Gen. **31** (1998), 4167-4196
- [28] J. VIDARTE, Y. VERA-DAMIÁN, AND W. GONZALES, *Periodic orbits in a Hamiltonian system of stellar type.* Physica D, (2024), 1-10. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.physd.2024.134261>
- [29] M. URIBE, M., J. VIDARTE, AND D. CARRASCO, *Periodic solutions in a 2D-symmetric Hamiltonian system through reduction and averaging method.* Dynamical Systems, (2024), 1-20. DOI: <https://doi.org/10.1080/14689367.2024.2349563>