

UNIVERSIDAD CATÓLICA DE LA SANTÍSIMA CONCEPCIÓN

FACULTAD DE INGENIERÍA
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA ELÉCTRICA



UCSC

Optimización con restricciones para estimar la concentración de sólidos en sedimentación usando Tomografía de Impedancia Eléctrica Sergio Daniel Valenzuela Cifuentes

Informe de Habilitación Profesional para optar al título de:
Ingeniero Civil Eléctrico

Profesor Patrocinante:
Dr. Samuel Vergara R.

Comisión evaluadora:
Dr. Jaime Cariñe
Dr. Muhammad Nisar

Concepción, Junio 2025

UNIVERSIDAD CATÓLICA DE LA SANTISIMA CONCEPCION
Facultad de Ingeniería
Departamento de Ingeniería Eléctrica

Profesor Patrocinante:
Dr. Samuel Vergara R.

Optimización con restricciones para estimar la concentración de sólidos en sedimentación usando tomografía de impedancia eléctrica

Sergio Daniel Valenzuela Cifuentes

Informe de Habilitación Profesional
para optar al Título de

Ingeniero Civil Eléctrico

Junio, 2025

Resumen

Este proyecto de tesis aborda el desarrollo y evaluación de métodos de optimización con restricciones para mejorar la reconstrucción del perfil de concentración de sólidos en procesos de sedimentación mediante tomografía de impedancia eléctrica (EIT).

El objetivo principal fue comparar y mejorar la estimación del perfil de concentración utilizando técnicas de optimización con restricciones, respecto a los resultados obtenidos mediante el método de Gauss-Newton con regularización de Laplace.

Esto sirve para aumentar la precisión y estabilidad de las reconstrucciones de concentración de sólidos. Para ello, se realizaron simulaciones de mediciones en EIT utilizando el software EIDORS en MATLAB, se generaron modelos de malla con diferente distribución de elementos, se mapearon perfiles de concentración de sólidos y distribuciones de conductividad eléctrica utilizando la relación de Perry y Chilton, se simularon los voltajes correspondientes, y se aplicaron algoritmos de optimización con restricciones, específicamente SQP e Interior-Point mediante la función *fmincon* de MATLAB.

Se obtuvo que la aplicación del método SQP sobre un modelo de malla con distribución uniforme de elementos permitió disminuir el error cuadrático de las reconstrucciones y en comparación con el método de Gauss-Newton con regularización de Laplace. Esta reducción del error se tradujo en una mejora significativa en la estimación del perfil de concentración. Por otra parte, el método Interior-Point presentó buena estabilidad en las soluciones, aunque con un mayor costo computacional.

A los alumnos del pasado, presente y futuro de la carrera de Ingeniería Civil Eléctrica de la U.C.S.C.

Agradecimientos

En primer lugar, quiero dedicar un agradecimiento muy especial a mi madre, Nidia Cifuentes, cuyo amor y apoyo incondicional han sido fundamentales en cada paso de este proceso. Gracias por tu constante paciencia, por creer en mí incluso en los momentos más difíciles, y por ser una fuente constante de fortaleza y motivación. Este logro es también el reflejo de todo lo que me has enseñado y del amor que siempre me has brindado.

Agradezco profundamente a mis amigos y compañeros Camila Vallejos, Sebastián Ortiz, Carlos Jiménez, Diego Albarrán, Brayan Uribe, Rubén Cisterna, Nicolás Jara y Alexander Thompson por su apoyo constante y su comprensión durante todo el desarrollo de este proyecto. Gracias por su amistad, sus palabras de aliento y por estar siempre ahí para escucharme y darme ánimo cuando más lo necesitaba. Su compañía ha hecho este camino mucho más llevadero y me ha ayudado a superar cada desafío.

No puedo dejar de agradecer a mis fieles compañeros, mis gatos Juanito, Lucho y Lupe, por su presencia constante y su manera especial de calmarme cuando las largas horas de trabajo parecían interminables. Aunque no puedan comprender los detalles, su apoyo silencioso y su compañía han sido una fuente de consuelo en momentos de estrés. Gracias por hacer mis días más alegres y por ser unos amigos fieles, siempre dispuestos a ofrecerme un poco de compañía cuando más lo necesitaba.

También agradezco profundamente a mi profesor guía, Samuel Vergara, por su orientación, paciencia y valiosos consejos, los cuales fueron esenciales para llevar a cabo este trabajo. Su experiencia y apoyo constante me han permitido superar los retos que surgieron durante el desarrollo del proyecto, siempre brindándome las herramientas necesarias para mejorar mi enfoque y comprensión.

Este trabajo ha sido un viaje desafiante y enriquecedor, y cada paso ha sido posible gracias al apoyo de todos los que me han rodeado. A lo largo de este proceso, cada obstáculo enfrentado y cada logro alcanzado me ha acercado más a mi objetivo, y estoy agradecido por las lecciones que he aprendido en el camino. Este trabajo no solo refleja el esfuerzo personal, sino también el respaldo de quienes han estado a mi lado en todo momento.

Tabla de Contenidos

LISTA DE TABLAS	VIII
LISTA DE FIGURAS	IX
NOMENCLATURA.....	X
ABREVIACIONES	XI
CAPÍTULO 1. INTRODUCCIÓN	1
1.1. INTRODUCCIÓN GENERAL	1
1.2. TRABAJOS PREVIOS	2
1.2.1 Tomografía de impedancia eléctrica	2
1.2.2 Sedimentación.....	4
1.2.3 Discusión	8
1.3. HIPÓTESIS DE TRABAJO	9
1.4. OBJETIVOS	9
1.4.1 Objetivo General	9
1.4.2 Objetivos Específicos.....	9
1.5. ALCANCES Y LIMITACIONES	9
1.6. TEMARIO Y METODOLOGÍA	10
1.6.1 Temario.....	10
1.6.2 Metodología.....	11
CAPÍTULO 2. PROCESO DE SEDIMENTACIÓN	13
2.1. INTRODUCCIÓN	13
2.2. SEDIMENTACIÓN	13
2.3. MODELOS DE SEDIMENTACIÓN.....	15
2.3.1 Modelo Kynch.....	15
2.3.2 Modelo Fenomenológico	16
CAPÍTULO 3. TOMOGRAFÍA DE IMPEDANCIA ELÉCTRICA.....	18
3.1. INTRODUCCIÓN	18
3.2. TOMOGRAFÍA DE IMPEDANCIA ELÉCTRICA.....	18
3.2.1 Problema Directo	20
3.2.2 Métodos de solución del problema Directo	20
3.2.3 Problema Inverso.....	22
3.3. OPTIMIZACIÓN	22
3.3.1 Optimización con restricciones	23
3.3.2 Condiciones de optimización	24
3.4. SOFTWARE EIDORS	25
3.4.1 Reconstrucción de imágenes en Eiders	26
CAPÍTULO 4. MODELOS DE ELEMENTOS FINITOS	27
4.1. INTRODUCCIÓN	27
4.2. MODELOS DE ELEMENTOS FINITOS.....	27
4.2.1 Modelo generado por Netgen	27
4.2.2 Modelo uniforme.....	28
CAPÍTULO 5. PROCEDIMIENTO	31
5.1. INTRODUCCIÓN	31
5.2. SISTEMA DE TRABAJO	31
5.2.1 Mapeo de concentración de solidos a conductividad	32
5.2.2 Obtención de voltajes	33
5.2.3 Mapeo de conductividad en 2D a 1D	34
5.2.4 Mapeo de conductividad en 1D a concentración en 1D	34

5.2.5	Optimización con restricciones usando Fmincon	35
5.2.5.1	Función de Costo y Restricciones.....	36
5.2.5.2	Parámetros de optimización de Fmincon	37
5.2.5.3	Problemas de optimización.....	38
5.2.5.4	Gradiente	43
5.2.5.5	Algoritmo de optimización.....	44
CAPÍTULO 6.	RESULTADOS	46
6.1.	INTRODUCCIÓN	46
6.2.	CONCENTRACIÓN DE SOLIDOS A CONDUCTIVIDAD.....	46
6.3.	MODELOS FINITOS	48
6.4.	RECONSTRUCCIÓN DE CONDUCTIVIDAD EN 2D CON GN Y REG-LAPLACE	51
6.5.	MAPEO DE CONDUCTIVIDAD.....	52
6.6.	MAPEO DE CONCENTRACIÓN	55
6.7.	OPTIMIZACIÓN CON RESTRICCIONES	57
6.7.1	Resultado 2D problema 1	57
6.7.2	Resultados 2D problema 2.....	58
6.7.3	Resultados 2D problema 3.....	60
6.7.4	Comparación de resultados en 1D	61
6.7.5	Mapeos de concentración	63
CAPÍTULO 7.	CONCLUSIONES	66
7.1.	SUMARIO	66
7.2.	CONCLUSIONES	67
7.3.	TRABAJOS FUTUROS.....	68
BIBLIOGRAFÍA.....		69

Lista de Tablas

Tabla 3.1 Métodos de reconstrucción del problema directo.....	21
Tabla 3.2 Esquema del proceso de reconstrucción de imagenes en EIDORS.....	26
Tabla 6.1 RMSE con Prior Laplace en los diferentes tiempos de sedimentación modelo Netgen.....	52
Tabla 6.2 RMSE con Prior Laplace en los diferentes tiempos de sedimentación modelo manual.....	53
Tabla 6.3 RMSE con Prior Laplace los valores más bajos.....	53
Tabla. 6.4 MAE en los problemas 2 y 3 con respecto al original en el mapeo de conductividad.....	63
Tabla. 6.5 MAE para ambos algoritmos en el mapeo de concentración.....	64

Lista de Figuras

Fig. 2.1 Sedimento producto de la sedimentación de una mezcla.	13
Fig. 2.2 Diagrama del proceso de sedimentación.....	14
Fig. 3.1 Ejemplificación de un sistema básico de EIT	20
Fig. 4.1 Modelos utilizados.....	29
Fig. 4.2 Modelos utilizados(Zoom).....	29
Fig. 5.1 Mapeo de concentración de sólidos (Arriba) a conductividad (abajo)	32
Fig. 5.2 Voltajes simulados en 3 tiempos de sedimentacion del modelo uniforme.	33
Fig. 5.3 Voltajes simulados en 3 tiempos de sedimentacion del modelo uniforme(En un script)	34
Fig. 5.4 Representacion del modelo aplicando restricciones del problema 1.....	40
Fig. 5.5 Representacion del modelo aplicando restricciones del problema 2.....	41
Fig. 5.6 Representacion del modelo aplicando restricciones del problema 3.....	42
Fig. 6.1 Altura vs concentracion de solidos	47
Fig. 6.2 Altura vs conductividad en el tiempo..	47
Fig. 6.3 Modelos utilizados	49
Fig. 6.4 conductividades de sedimentacion modelo malla uniforme en difentes tiempos	50
Fig. 6.5 conductividades de sedimentacion modelo malla Netgen en difentes tiempos	50
Fig. 6.6 Recons de distribucion de conductividad con Laplace modelo uniforme	51
Fig. 6.7 Recons de distribucion de conductividad con Laplace modelo netgen	52
Fig. 6.8 Mapeo de conductividad 1D de ambos modelos en el tiempo 25 (s) de la sedimentacion	53
Fig. 6.9 Mapeo de conductividad 1D de ambos modelos en el tiempo 50 (s) de la sedimentación	54
Fig. 6.10 Mapeo de conductividad 1D de ambos modelos en el tiempo 150(s) de la sedimentación	54
Fig. 6.11 Mapeo de concentracion de solidos en T=25 seg	55
Fig. 6.12 Mapeo de concentracion de solidos en T=50 seg	56
Fig. 6.13 Mapeo de concentracion de solidos en T=150 seg	56
Fig. 6.14 Modelo optimizado mediante problema 1.....	58
Fig. 6.15 Modelo optimizado mediante problema 2, Interior-Point (A) y SQP (B)	59
Fig. 6.16 Modelo optimizado mediante problema 3, SQP " $\nabla 1 \times 10^{-3}$ "(A) y SQP ($\nabla pred$)	60
Fig. 6.17 Mapeo de conductividad en T=25.....	62
Fig. 6.18 Mapeo de conductividad en T=50.....	62
Fig. 6.19 Mapeo de conductividad en T=150.....	63
Fig. 6.20 Mapeo de concentracion en T=25.....	64
Fig. 6.21 Mapeo de concentracion en T=50.....	65
Fig. 6.22 Mapeo de conductividad en T=150.....	65

Nomenclatura

$f_k(\varnothing, t)$	: Función de densidad de flujo.
$f_{bk}(\varnothing)$	: Función de densidad de flujo batch de Kynch.
$q(t)$	: Velocidad volumétrica.
$\sigma_e(\varnothing)$	: Esfuerzo efectivo
g	: Aceleración de gravedad
$(\varnothing)$	: Concentración Volumétrica
$\sigma_e'(\varnothing)$	: Derivada del esfuerzo efectivo.
$\Delta\rho$	: Diferencia entre densidad del sólido y líquido de la solución.
σ_m	: Conductividad de la mezcla
σ_l	: Conductividad del líquido
σ_s	: Conductividad del sólido
P_m	: Densidad de la mezcla
V_m	: Voltajes medidos
V_s	: Voltajes simulados
Ω	: Región interna del tomógrafo.

Abreviaciones

Mayúsculas

E.I.T	: Tomografía de Impedancia Eléctrica.
G.N.	: Gauss Newton.
F.E.M	: Elementos finitos.
B.E.M	: Elementos de contorno
F.D.M	: Diferencias finitas
Eidors	: Programa de reconstrucción para tomografía de impedancia eléctrica y óptica difusa
RMSE	: Error cuadrático medio
MAE	: Error cuadrático medio

Capítulo 1. Introducción

1.1. Introducción General

La sedimentación se define como el proceso mediante el cual las partículas sólidas presentes en una solución líquida o gaseosa se separan gradualmente del medio en el que se encuentran. Este proceso puede ser influenciado tanto por la gravedad como por fuerzas externas. Durante la sedimentación gravitacional, la solución experimenta una separación en tres fases físicas distintas: clarificación, sedimentación y compactación. Estas fases se distinguen por interfaces específicas conocidas como interfaz de agua clara e interfaz de consolidación, las cuales se representan matemáticamente como discontinuidades. Además la sedimentación de sólidos es un proceso clave en muchas aplicaciones prácticas, científicas e industriales, que contribuye a la gestión eficiente de recursos, la protección del medio ambiente y la mejora de la calidad del agua y otros líquidos.

La identificación de las interfaces son las que permiten modelar el proceso de sedimentación en diferentes casos. Para hacerlo existe el proceso de obtención experimental, esta es una forma de obtención de parámetros de manera visual, la cual dependen del tipo de líquido muestreado por lo que si este es poco opaco, no se identificará con exactitud las interfaces además esto también puede variar en gran medida dependiendo de quien realice las mediciones. Por ende una mejor forma de obtener estos parámetros es mediante la Tomografía de Impedancia Eléctrica (EIT, por sus siglas en inglés).

La EIT permite estimar propiedades eléctricas internas de una región, como la conductividad o la impedancia, mediante la inyección de corriente en electrodos dispuestos alrededor del perímetro y la medición de los voltajes resultantes. A diferencia de los métodos ópticos, la EIT no se ve afectada por la opacidad del fluido, ya que se basa en la respuesta eléctrica del medio. Esto posibilita identificar tanto las interfaces como las concentraciones locales a distintas alturas en la columna de sedimentación.

El objetivo principal de esta tesis fue mejorar la estimación del perfil de concentración de sólidos en columnas de sedimentación utilizando EIT, mediante la aplicación de técnicas de optimización con restricciones, y compararlas con los resultados obtenidos por el método clásico de Gauss-Newton con regularización de Laplace. Para abordar este objetivo, se diseñó una malla

de simulación con distribución uniforme de elementos, buscando mejorar la resolución espacial de las reconstrucciones. El proceso de optimización se realizó utilizando la función *fmincon* de MATLAB, que permite resolver problemas de optimización no lineal con restricciones. Se implementaron restricciones de igualdad y desigualdad que aseguran soluciones físicamente coherentes con el proceso de sedimentación. Además, se evaluaron dos algoritmos disponibles en *fmincon*: Sequential Quadratic Programming (SQP) e Interior-Point, considerando su precisión, estabilidad y costo computacional. Finalmente, se aplicaron estrategias de reducción de dimensionalidad, como el agrupamiento de elementos de la malla, con el objetivo de reducir el tiempo de cómputo sin comprometer la calidad de las reconstrucciones.

1.2. Trabajos Previos

En esta sección se expondrán diversos estudios anteriores vinculados con la tomografía de Impedancia eléctrica, la reconstrucción de imágenes, la resolución del problema inverso mal condicionado y la sedimentación de sólidos. El propósito es obtener una perspectiva amplia y detallada de diferentes enfoques y configuraciones.

1.2.1 Tomografía de impedancia eléctrica

- ❖ S. Valenzuela, “Evaluación de posición de electrodos para determinar el perfil de concentración durante sedimentación” Informe de Introducción a la Habilitación Profesional, Universidad Católica de la Santísima Concepción, 2024.[1]

En esta investigación, el objetivo fue evaluar distintas posiciones de electrodos para estimar la concentración de sólidos en sedimentación con EIT en base al modelo usado por Carrasco y obtener mejores resultados que este. Para ello, se modificó el modelo original de su tesis, cambiando la distribución de los electrodos, pero manteniendo la cantidad y además se mantuvo la conductividad de la mezcla. Se generaron 2 modelos: en el primero, los electrodos estaban desfasados, y en el segundo, los electrodos estaban en una sola columna y en ambos se posicionó un electrodo en el fondo. Posteriormente, se realizaron mapeos a conductividad para simular voltajes. Con estos voltajes, se llevaron a cabo las reconstrucciones de conductividad mediante elementos finitos, utilizando tres métodos diferentes: Laplace, Noser y Thikonov, dando como resultado que el método de Laplace era el mejor de los 3 y además superaba los resultados de Carrasco.

- ❖ E. Carrasco, “Obtención de perfil de concentración de sólidos en sedimentación mediante tomografía de impedancia eléctrica,” Tesis de grado Universidad Católica de la Santísima Concepción, 2024.[2]

Este estudio se enfoca en la obtención de perfiles de concentración de sólidos en tomografía de impedancia eléctrica (EIT). Inicialmente, se desarrollan modelos de sedimentación para establecer los perfiles de concentración de sólidos estos modelos son creados mediante EIDORS el cual es un software de código abierto desarrollado en Matlab y utilizado en el campo de la EIT Posteriormente, se convierten estos perfiles en mapas de conductividad, los cuales se utilizan para simular voltajes que permiten generar reconstrucciones de conductividad mediante diversos algoritmos. Además, se llevan a cabo reconstrucciones tanto en 2D como en 1D para comparar los resultados en diferentes momentos de medición.

- ❖ F. M. N. Fernando and M. M. Alejandro, “Análisis de algoritmos de reconstrucción de imágenes EIT en el diagnóstico de la EPOC” Memoria de Titulo, Universidad. Del Cauca, Popayán, 2018.[3]

Esta tesis se enfoca en la Tomografía por Impedancia Eléctrica (EIT), una técnica avanzada que posibilita la observación de cambios en la impedancia del cuerpo humano de manera no invasiva y sin necesidad de radiación. Además de exponer las aplicaciones de esta técnica en la medicina, el trabajo se adentra en las reconstrucciones de imágenes, explicando detalladamente sus procesos y los algoritmos involucrados. Todo esto se lleva a cabo mediante el uso de Matlab con el software EIDORS, diseñado específicamente para la reconstrucción y visualización de imágenes en tomografía por impedancia eléctrica.

- ❖ S. Vergara, “Estimación de características de baja dimensionalidad utilizando tomografía de impedancia eléctrica.” Programa de Doctorado Universidad de Concepción, 2019.[4]

En esta memoria se presenta una explicación de la tomografía de impedancia eléctrica que es una tecnología que permite estimar la distribución de conductividad de un área o un volumen., incluyendo su modelo fenomenológico este fenómeno que describe la formación de discontinuidades en el proceso de sedimentación identificando claramente dos etapas: sedimentación

y consolidación permitiendo la representación de soluciones con sólidos floculados, los cuales son compresibles y también las soluciones numéricas correspondientes. Se proponen métodos para estimar características de baja dimensionalidad debido a las dificultades para la obtención de reconstrucciones de alta resolución, ya que el este se presenta como problema indeterminado. Estos métodos incluyen tanto enfoques basados en optimización estos requieren la formulación de modelos que aprovechan la información previa. Esta se incorpora también como restricciones del problema de optimización y también los métodos directos basados en modelos y este se basan en la obtención de características utilizando modelos, cuyos parámetros se obtienen mediante entrenamiento.

- ❖ Sathyanarayan Rao (2025). Electrical Impedance Tomography Image Reconstruction using MATLAB based freeware EIDORS (<https://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/59263-electrical-impedance-tomography-image-reconstruction-using-matlab-based-freeware-eidors>), MATLAB Central File Exchange. Abril, 2025 [5]

EIDORS es un software libre basado en MATLAB, utilizado para resolver tanto el problema directo como el inverso en Tomografía por Impedancia Eléctrica (EIT). Este código se utiliza para mostrar la reconstrucción de imágenes, aprovechando el algoritmo de inversión incorporado en la herramienta.

1.2.2 Sedimentación

- ❖ J. Carreño, “Detección y seguimiento de interfaces tipo fluido-Sedimento”. Memoria de título Ingeniería Civil Mecánica, Santiago de Chile, 2014.[6]

Este estudio analiza en detalle el proceso de sedimentación en el cual las partículas sólidas de una solución decantan separándose del medio líquido, explicando dos tipos principales: la sedimentación gravitacional y la acelerada. Se explican los modelos de la sedimentación de manera textual y matemática siendo estos el modelo de Kynch la cual describe adecuadamente procesos de sedimentación con soluciones ideales, donde las partículas son incompresibles y el modelo Fenomenológico que describe la formación de discontinuidades en el proceso de sedimentación identificando claramente dos etapas: sedimentación y consolidación permitiendo la representación de soluciones con sólidos floculados, los cuales son compresibles.

- ❖ P. Tossavainen, M. Vauhkonen, V. Kolehmainen, and K. Youn Kim, “Tracking of moving interfaces in Sedimentation processes using Electrical Impedance Tomography,” Chem. Eng. Sci., vol. 61, no. 23, pp. 7717–7729, Dec. 2006,[7]

En este texto se explica y describe el proceso de sedimentación el cual consiste en un proceso en el cual las partículas sólidas presentes en un medio líquido decantan al ser sometidas a una fuerza. Esta fuerza puede ser la fuerza de gravedad o una fuerza producida por una aceleración externa, también se muestran los métodos matemáticos de reconstrucción del sistema, utilizando el método de Elementos Finitos (FEM) el cual se usa para simular el movimiento de partículas sólidas en un líquido y predecir la velocidad y el patrón de sedimentación en función de varios parámetros, como la densidad de las partículas y la viscosidad del líquido. Las mediciones se realizan utilizando un modelo que cuenta con 6 electrodos colocados en un solo lado del tanque de sedimentación. Se presentan los resultados de las pruebas utilizando dos métodos: uno en el cual las velocidades de sedimentación son constantes, y otro en el cual las velocidades varían linealmente.

- ❖ M. Manrique, A. Cornejo. “Caracterización geoquímica y mineralógica de relaves mineros La Ciénaga – La Libertad”, INGEMET, Boletín serie B, N°78, p. 147, Lima, 2022 [8]

Este estudio se enfoca en la caracterización geoquímica y mineralógica de los relaves mineros La Ciénaga en Perú, generados por la Compañía Aurífera Maraón S.A. entre 1993 y 1996. A través de muestreos y análisis, se identifican cinco depósitos de relaves con concentraciones variables. Mediante el estudio mencionado se obtuvieron los valores de conductividad líquida y sólida, que se utilizaron para poder generar los diferentes mapas de concentración de sólidos a conductividad.

- ❖ J. Cullivan, M. Wang, G. Bolton, G. Baker, W. Clark, and R. Williams, “Linear EIT for Sedimentation and Sediment Bed Characterization”. vol. 9, nº 3, pp. 910-915, 2006.[9]

El texto presenta una investigación sobre el uso de la tomografía de impedancia eléctrica (EIT) para estudiar sedimentos y sedimentación. Se discuten problemas relacionados con la estrategia de detección y sensibilidad de medición en el contexto de la EIT con sensores lineales para la observación tanto de las propiedades del lecho de sedimentos como de la sedimentación. Se emplearon sondas de EIT con diferentes configuraciones de electrodos para realizar mediciones en cilindros de llenos de diversos materiales sedimentados. Se destacan las conclusiones obtenidas sobre la eficacia de las medidas de cuatro electrodos y la importancia de la reconstrucción tomográfica para identificar con precisión la ubicación de la interfaz del sobrenadante. Además, el estudio ofrece una interpretación detallada de los resultados obtenidos, incluyendo conclusiones sobre la eficacia de ciertas configuraciones de electrodos y estrategias de medición.

- ❖ L. Salas, “Tratamiento cero descargas líquidas de agua de relave con valorización de sólidos y salmuera”, Tesis-Memoria de Título, Univ. Concepción, Chile, 2022.[10]

En este estudio de tesis se propone un tratamiento integrado del agua de relave en la minería del cobre. Utilizando tecnologías como precipitación química, intercambio iónico, osmosis inversa, calcinación de carbonato de calcio y electrodiálisis de membranas bipolares, se demuestra la viabilidad técnica y económica. Como en el proyecto de título mencionado el estudio fue enfocado en el tratamiento de aguas servidas, sirvió para el conocimiento de diversos valores de conductividad para generar el mapeo de concentración de sólidos, no solo con valores de relaves mineros, sino que también se utilizó de estos valores a modo de prueba para conocer cómo se comporta la sedimentación con valores de conductividad de plantas de aguas servidas.

- ❖ V. Maldonado Yactayo, "Operaciones Unitarias II (INQ-3450)", cap. 7, Universidad Autónoma de Santo Domingo, República Dominicana, 2020. [11]

Este trabajo aborda el proceso de sedimentación de sólidos, destacando su impacto en la caracterización de flujos de partículas suspendidas en un fluido conductor. La sedimentación, fenómeno físico esencial en el tratamiento de aguas, se refiere a la remoción de partículas mediante la acción gravitacional, y puede ser influenciada por propiedades como la densidad, el tamaño y la forma de las partículas. En el contexto de la EIT, este proceso afecta directamente las mediciones de impedancia, alterando la distribución de conductividad reconstruida a través de tomografía. Este trabajo profundiza en cómo las partículas discretas y floculentas se comportan durante la sedimentación y cómo estos efectos pueden ser modelados para mejorar la precisión de las imágenes reconstruidas.

- ❖ M. Lera Modino, "Estudio de la transición entre la sedimentación zonal y floculada mediante la aplicación de técnicas de análisis de imagen", Trabajo Fin de Máster, Univ. Pontificia de Valencia, España, sept. 2021. [12]

Esta investigación se enfoca en la sedimentación de sólidos en el tratamiento de aguas residuales, un proceso fundamental para la eliminación de partículas suspendidas en el agua. La sedimentación, aplicada en equipos como desarenadores y clarificadores, se clasifica en distintos regímenes: sedimentación discreta, floculada, zonal y por compresión. De estos, la sedimentación floculada es la más predominante en los clarificadores, mientras que la sedimentación zonal solo ocurre cuando estos sistemas fallan. La transición entre ambos regímenes ha sido poco estudiada, y la caracterización precisa de este fenómeno es crucial para optimizar los procesos de tratamiento. El objetivo de este trabajo es estudiar esta transición y los perfiles de sedimentación, utilizando imágenes de diferentes tipos de fangos y caracterizando sus comportamientos en función de la concentración de sólidos suspendidos.

1.2.3 Discusión

Este estudio facilita la comprensión de algunos principios esenciales para el uso de EIDORS, con especial enfoque en la creación de modelos y el ajuste preciso de la posición de los electrodos. Esto es crucial para mejorar la precisión de las reconstrucciones obtenidas mediante TIE. [3] [5]

Estos estudios abordan el proceso de sedimentación de partículas en un fluido, describiendo tanto los modelos teóricos como los métodos experimentales para analizar este proceso. Se enfocan en los diferentes tipos de sedimentación, como la sedimentación discreta y floculada, y sus modelos matemáticos, así como en la utilización del Método de Elementos Finitos (FEM) para simular la sedimentación y medir la velocidad y el patrón de caída de partículas. Esto resulta útil para trabajar en EIT, ya que el conocimiento de los regímenes de sedimentación y los métodos para modelarlos me permite mejorar la reconstrucción de imágenes. [6] [7]

Estos estudios presentan los principios fundamentales de la EIT, ofreciendo una visión detallada de su funcionamiento y de las diversas aplicaciones que permite. A lo largo del texto, se brinda una explicación completa tanto en términos conceptuales como matemáticos, destacando las aplicaciones prácticas de la TIE en campos como la medicina y la ingeniería. [1][2][4]

Además, los textos abordan de manera exhaustiva el proceso de sedimentación, analizando cómo este puede variar en función de distintos factores. También se examina cómo la posición estratégica de los electrodos y la cantidad de mediciones realizadas influyen en los resultados finales. [8][9] [10][11][12]

En estos estudios se abordó la estimación del perfil de concentración durante la sedimentación mediante EIT, empleando distintas configuraciones de electrodos y algoritmos de reconstrucción basados en el método de Gauss-Newton con diferentes regularizaciones. Estas investigaciones han demostrado que la ubicación de los electrodos y la estructura de la malla influyen significativamente en la calidad de las reconstrucciones, proporcionando imágenes con diferentes niveles de precisión.

El conocimiento generado en estos trabajos constituye una base sólida para el presente estudio, ya que permite comprender cómo los factores geométricos del modelo afectan los resultados. Además, validan el uso del método de Gauss-Newton como una herramienta de referencia confiable, tanto para realizar reconstrucciones iniciales como para establecer una comparación objetiva frente a nuevas propuestas basadas en optimización con restricciones. A partir de esta base, se busca explorar si modificaciones en la distribución de elementos y la aplicación de restricciones pueden mejorar los resultados obtenidos con los enfoques tradicionales.[1][2]

1.3. Hipótesis de Trabajo

Es posible obtener una estimación más precisa del perfil de concentración de sólidos en columnas de sedimentación mediante tomografía de impedancia eléctrica, utilizando técnicas de optimización con restricciones, en comparación con el método de Gauss-Newton con regularización de Laplace.

1.4. Objetivos

1.4.1 Objetivo General

Comparar la estimación del perfil de concentración de sólidos en columnas de sedimentación obtenida mediante tomografía de impedancia eléctrica utilizando optimización con restricciones mediante los algoritmos SQP e Interior-Point, respecto a la estimación generada por el método de Gauss-Newton con regularización de Laplace.

1.4.2 Objetivos Específicos

- Evaluar los beneficios medioambientales asociados a las técnicas de reconstrucción y los resultados obtenidos en la estimación de concentración de sólidos mediante EIT.
- Obtener reconstrucciones referenciales con método Gauss-Newton.
- Evaluar estimación de perfiles de concentración utilizando optimización con distintas restricciones.
- Comparar Resultados de Gauss-Newton con optimización con restricciones.

1.5. Alcances y Limitaciones

Para obtener perfiles de concentración de sólidos, se llevarán a cabo simulaciones exclusivamente en Matlab utilizando Eiders y Netgen.

1.6. Temario y Metodología

1.6.1 Temario

Capítulo 2: Procesos de Sedimentación y Modelos Teóricos

Se describe el fenómeno de sedimentación de sólidos en un fluido, abordando los modelos matemáticos que lo representan. Se presentan los modelos de Kynch y el fenomenológico, explicando su formulación y los sistemas de identificación asociados con este último.

Capítulo 3: Tomografía de Impedancia Eléctrica (EIT) y su Aplicación

Se introduce la EIT como una herramienta de imagen no invasiva, detallando su procedimiento y aplicaciones. Se explican los conceptos de problema directo e inverso, así como los métodos de solución y regularización utilizados. Además, se describe el software Eiders, su función en la reconstrucción de imágenes, así como los modelos empleados en el estudio.

Capítulo 4: Modelos FEM

Se presentan los modelos de malla utilizados en el proyecto, comparando una malla generada automáticamente con Netgen y una malla creada manualmente con una distribución horizontal uniforme de elementos. Se analiza el impacto de la estructura de la malla en la reconstrucción de la conductividad y en la estabilidad de los resultados.

Capítulo 5: Procedimiento

Se describe el procedimiento utilizado para el desarrollo del estudio, iniciando con una investigación bibliográfica sobre sedimentación y EIT. Se detallan las simulaciones realizadas en MATLAB, incluyendo el proceso de mapeo de concentración a conductividad y la obtención de voltajes. Además, se explica el uso de la función `fmincon` para la optimización con restricciones, abordando los algoritmos de SQP e Interior-Point y los problemas planteados para la optimización.

Capítulo 6: Resultados y Análisis

Se presentan los resultados obtenidos en el estudio, tanto de la optimización con restricciones como los generados mediante el método de Gauss-Newton, incluyendo sus reconstrucciones de conductividad en 2D y su conversión a 1D para facilitar la interpretación. Se analizan los efectos de la optimización en la precisión de la reconstrucción y la influencia de la estructura de la malla en la estabilidad de los resultados. Además, se comparan los resultados obtenidos con los distintos problemas aplicados, así como la diferencia entre los resultados de la optimización con restricciones y los obtenidos mediante Gauss-Newton."

Capítulo 7: Conclusiones

Se resumen los resultados del estudio, destacando la importancia de la optimización con restricciones en la mejora de la reconstrucción de imágenes en EIT. Se discute el impacto de la discretización de la malla, la selección de parámetros de optimización y la precisión del modelo.

1.6.2 Metodología

Evaluar los beneficios medioambientales asociados a las técnicas de reconstrucción y los resultados obtenidos en la estimación de concentración de sólidos mediante EIT.

Se desarrolló un análisis teórico sobre los posibles beneficios medioambientales derivados de una estimación más precisa del perfil de concentración en procesos de sedimentación. Esto incluye consideraciones como la mejora en el monitoreo de sistemas de tratamiento de agua, una mayor eficiencia en el uso de insumos, y una reducción potencial en el impacto ambiental de procesos industriales que dependen de la separación sólido-líquido.

Obtención de reconstrucciones referenciales con el método de Gauss-Newton

Se diseñó una malla con distribución uniforme de elementos y una automáticamente usando Netgen, con ella se hizo una conversión de concentración de sólidos a conductividad eléctrica mediante la relación empírica propuesta por Perry y Chilton, permitiendo así simular distribuciones de conductividad coherentes con un nivel de concentración homogénea. A partir de estas simulaciones, se generaron reconstrucciones referenciales del perfil de concentración de sólidos utilizando el método de Gauss-Newton con regularización de Laplace, todo dentro del entorno de simulación EIDORS en MATLAB.

Estimación de perfiles de concentración utilizando optimización con restricciones

Se empleó el comando *fmincon* de MATLAB para resolver problemas de optimización utilizando los algoritmos *Sequential Quadratic Programming* (SQP) e *Interior-Point*, se incorporaron restricciones de igualdad y desigualdad, y definieron 3 escenarios distintos, cada uno con diferentes modalidades de trabajo, en cada caso, se establecieron los parámetros necesarios para la simulación, y los resultados fueron mapeados en términos de concentración de sólidos y conductividad eléctrica.

Comparación entre las reconstrucciones optimizadas y las obtenidas por Gauss-Newton

Los resultados obtenidos por los algoritmos de optimización fueron comparadas con los del Gauss-Newton en términos de error medio absoluto (MAE). Además, se generaron gráficos comparativos del mapeo de concentración en 1D para analizar las diferencias visuales.

Capítulo 2. Proceso de Sedimentación

2.1. Introducción

Este capítulo se aborda la sedimentación, donde se detallan sus tipos, tales como la sedimentación gravitacional y la sedimentación acelerada. Además, se presentan los modelos que tiene la sedimentación, como el modelo de Kynch y el modelo fenomenológico, junto con sus correspondientes ecuaciones matemáticas. Asimismo, se exploran algunos sistemas de identificación relacionados con el modelo fenomenológico.

2.2. Sedimentación

El proceso de sedimentación implica la separación de partículas suspendidas en un medio líquido debido a una fuerza externa, ya sea la gravedad (sedimentación gravitacional) o una aceleración inducida (sedimentación acelerada). Durante la sedimentación, pueden formarse dos tipos de agregados: los floculados (Fig 2.1a) y los no floculados (Fig 2.1b). Los sólidos floculados se agrupan en cúmulos o flóculos de tamaño específico antes de asentarse, mientras que los sólidos no floculados permanecen dispersos. En caso de que los sólidos no se agrupen por sí mismos, se pueden añadir productos químicos para acelerar el proceso de sedimentación. Estos productos pueden actuar como floculantes, promoviendo la aglomeración de sólidos, o como surfactantes, reduciendo la tensión superficial del fluido para permitir una sedimentación más rápida de las partículas.

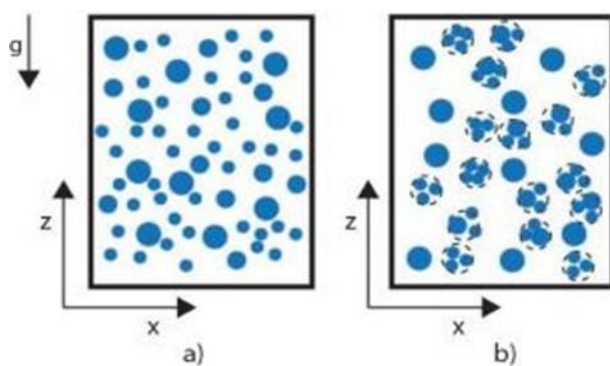


Fig.2.1. Sedimento producto de la sedimentación de una mezcla Sin floculado (a) y con floculado (b). [5]

Sedimentación gravitacional

La sedimentación gravitacional ocurre cuando las partículas en una solución están influenciadas únicamente por la fuerza de la gravedad. En este proceso, las partículas se desplazan hacia abajo, depositándose en el fondo del recipiente para formar un sedimento o lodo. Este fenómeno es comúnmente observado en una variedad de contextos, desde procesos industriales hasta fenómenos naturales. Durante la sedimentación, las partículas más pesadas tienden a asentarse más rápidamente que las más ligeras, lo que conduce a la formación de capas distintas en el sedimento. Este proceso puede ser influenciado por una serie de factores, como la densidad y el tamaño de las partículas, así como la viscosidad y la temperatura del medio. [1]

Sedimentación espesamiento

Al iniciar la sedimentación gravitacional, se dispone de una solución homogénea de líquido y sólido, la cual se vierte en una columna de sedimentación y se deja en reposo para permitir la influencia de la fuerza de gravedad. Con el transcurso del tiempo, en el estanque de sedimentación se pueden distinguir tres fases, como se muestra en las figuras adjuntas. [1]

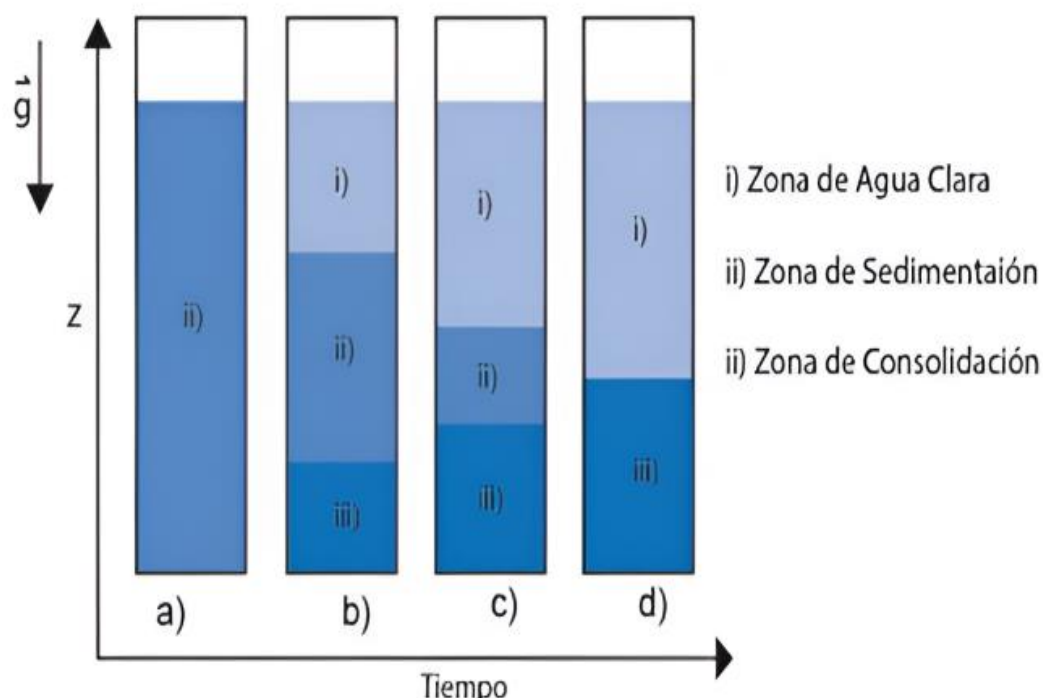


Fig. 2.2. Diagrama del proceso de sedimentación. [2]

En la figura 2.2 se pueden observar las zonas del proceso de sedimentación, la zona (i) es la etapa de clarificación, donde no hay presencia de sedimentos, la zona (ii) es la etapa de transición, donde se encuentra la mezcla de solución sólido-líquido; y la zona (iii) representa la etapa de compactación, donde prevalece el sólido precipitado y el líquido ocupa solo los espacios entre partículas. Al finalizar la fase de transición, se alcanzan una etapa de compactación y una etapa de clarificación (d). Como se mencionó previamente, en la fase de transición coexisten tanto líquido como sólido, pudiendo ocurrir tanto sedimentación libre como sedimentación dificultada en esta zona. La densidad de partículas en esta etapa se mantiene constante a lo largo del proceso de sedimentación. [2]

Sedimentación Acelerada

En este proceso se emplean fuerzas adicionales sobre la mezcla para agilizar la separación entre el líquido y el sólido. Comúnmente, esto se logra aplicando una fuerza centrífuga, la cual implica colocar la mezcla en un recipiente rotatorio y hacerlo girar rápidamente. Esta acción incrementa la velocidad de separación entre los sólidos y los líquidos, facilitando su posterior extracción. [1]

2.3. Modelos de sedimentación

En esta sección se ofrece una descripción de dos modelos ampliamente utilizados para analizar el comportamiento de las partículas en sedimentación dentro de un fluido: el Modelo de Kynch y el Modelo Fenomenológico. Asimismo, se presentan las ecuaciones correspondientes a cada uno de estos modelos. [2]

2.3.1 Modelo Kynch

Es la primera teoría de sedimentación, esta teoría fue elaborada en el año 1952, la cual describe procesos de sedimentación con soluciones ideales, y las partículas son incompresibles, como el caso de esferas de vidrios o partículas de minerales no floculadas. Este modelo de Kynch se basa en la propagación de ondas en una suspensión idealizada donde la suspensión es un continuo y presenta el proceso de sedimentación por la ecuación de continuidad de sólidos.

A partir de este modelo, se define la función de densidad de flujo de Kynch, la cual está representada mediante las ecuaciones (1) a (4):

$$f_k(\phi, t) = q(t)\phi + f_{bk}(\phi) \quad (1)$$

Donde $f_k(\phi, t)$ es la densidad de flujo de Kynch y depende de la concentración volumétrica (ϕ) definida en (2) y $q(t)$ es la velocidad volumétrica.

$$\phi = \frac{V_s}{V_s + V_f} \quad (2)$$

Esta ecuación V_s y V_f son el volumen del sólido y del líquido, respectivamente. Con esta concentración volumétrica, se puede definir la densidad de la mezcla P_m mediante la ecuación.

$$P_m = P_1\phi + (1 - \phi)P_p \quad (3)$$

Donde $P_1\phi$ y P_p son las densidades del sólido y del fluido, respectivamente.

Finalmente, el término $f_{bk}(\phi)$ de la ecuación (1) se define mediante la ecuación (4):

$$f_{bk}(\phi) = - \frac{\Delta p \phi^2 (1 - \phi)^2 g}{\alpha(\phi)} \quad (4)$$

Donde Δp es la diferencia de presión, g es la aceleración debido a la gravedad, y $\alpha(\phi)$ es una función que depende de ϕ .

2.3.2 Modelo Fenomenológico

El modelo conceptual desarrollado a partir de 1970 explica la aparición de discontinuidades durante la sedimentación y las etapas de sedimentación y consolidación. Este modelo, basado en los principios de conservación de masa y momento lineal, permite obtener balances macroscópicos en suspensiones, tratándolas como medios continuos.

Las partículas, uniformes en forma y densidad, son pequeñas en comparación con el recipiente, garantizando condiciones homogéneas para el estudio de sedimentación. Los sólidos y líquidos son incompresibles en su estado puro, simplificando el análisis. La solución está completamente floculada al inicio del espesamiento, influenciando la velocidad y patrón de sedimentación. No hay transferencia de masa entre sólido y líquido, manteniéndose las partículas discretas durante la sedimentación, que es un proceso gravitacional.

Una parte fundamental del modelo consiste en el uso de las ecuaciones necesarias para describir el comportamiento del medio. Entre ellas se encuentran la ecuación de esfuerzo efectivo de los sólidos (σ) y la densidad de flujo $f(\phi)$, donde ϕ representa la fracción volumétrica de sólidos. Estas ecuaciones implican restricciones sobre las propiedades físicas del material y las interacciones entre partículas. Estas representaciones se pueden apreciar en las ecuaciones (5) y (6)

$$\frac{\partial \sigma(\phi)}{\partial z} = -\Delta p(\phi)g - \frac{\alpha(\sigma)v_r}{1-\sigma} \quad (5)$$

La ecuación (5) describe el esfuerzo efectivo de los sólidos en función de la altura z , la diferencia de presión $\Delta p(\phi)$, la aceleración gravitatoria g , y otros términos relacionados con las propiedades del material y la velocidad de sedimentación.

Además, se desarrolla una ecuación para calcular cómo varía el volumen de sólidos en un espesador a lo largo del tiempo t y la altura z , considerando las etapas de sedimentación y consolidación. Esta ecuación está dada por:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t}(\phi q(t) + f_{bk}(\phi)) = -\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{f_{bk}(\phi)\sigma e' f_{bk}(\phi)}{\partial p(\phi)g} \frac{\partial(\phi)}{\partial z} \right) \quad (6)$$

La ecuación (6) describe la evolución temporal de la fracción volumétrica ϕ y la interacción de los términos de flujo con la presión y la gravedad, lo que permite modelar el comportamiento dinámico de la mezcla a medida que avanza el proceso de sedimentación y consolidación.

Capítulo 3. Tomografía de Impedancia Eléctrica

3.1. Introducción

Este capítulo se centra en la tomografía de impedancia eléctrica, describiendo su concepto y la correspondiente ecuación matemática. Además, se aborda el problema directo y se detalla el método de solución para este. Asimismo, se explica el concepto del modelo inverso, también se explica el método de regularización utilizado y cómo funciona el software Eiders para este proyecto.

3.2. Tomografía de Impedancia eléctrica

La tomografía de impedancia eléctrica (EIT) es una técnica de reconstrucción de imágenes no intrusiva y no destructiva que se caracteriza por su alta resolución temporal, lo que la hace muy útil en aplicaciones de tomografía de procesos para analizar características del flujo. En el proceso de EIT, los electrodos se disponen alrededor del objeto de interés, a través de los cuales se hace pasar una corriente eléctrica. Las excitaciones resultantes, producidas por la presencia del material dentro del objeto, se registran en la superficie de los electrodos. Utilizando la relación entre corriente y voltaje, se puede reconstruir la distribución interna del objeto. Sin embargo, este proceso presenta desafíos debido a su naturaleza no lineal y mal condicionada, especialmente cuando se tienen pocas mediciones, lo que dificulta obtener imágenes de alta calidad. A pesar de esto, existen aplicaciones en las que no es necesario tener una reconstrucción detallada de la distribución de conductividad [4].

Las ecuaciones (7) a (9) describen el modelo matemático que rige el proceso de EIT. Estas ecuaciones involucran el potencial eléctrico u , la impedancia de los electrodos Z_l , y la conductividad σ , entre otros términos. Las ecuaciones son las siguientes:

$$\nabla \cdot (\sigma \nabla u) = 0, \quad \text{en } \Omega \quad (7)$$

$$u + Z_l \sigma \frac{\partial u}{\partial n} = U_l, \quad \text{en } e_l \subset \partial \Omega, \quad l = 1, 2, \dots, L \quad (8)$$

$$\int_{e_l} \sigma \frac{\partial u}{\partial n} dS = I_l \quad x \in e_l, l = 1, 2, \dots, L \quad (9)$$

$$\sigma \frac{\partial u}{\partial n} = 0, \quad x \in \partial\Omega \setminus \bigcup_{l=1}^L e_l \quad (10)$$

Las ecuaciones (7), (8), (9) y (10) representan la ecuación del contorno, donde:

u : representa el potencial eléctrico.

z_l : Impedancia de contacto en el electrodo l .

σ : La conductividad.

Ω : El dominio o la región interna

$\partial\Omega$: Frontera o Contorno del dominio

$\frac{\partial u}{\partial n}$: La corriente eléctrica.

U_l : es el voltaje aplicado en el electrodo l .

e_l : Representa la región donde se encuentra el electrodo l .

La Figura 3.1 representa un esquema del sistema de inyección y medición en (EIT), basado en una configuración circular de 8 electrodos (representados como puntos azules) distribuidos uniformemente en el contorno del dominio de estudio. En este método, se inyecta corriente eléctrica (I) entre un par de electrodos, en este caso el electrodo 1 y el electrodo 2, como se indica con la flecha roja. Esta inyección genera un campo eléctrico en el interior del medio, cuya trayectoria también está esquematizada con flechas rojas que representan las distintas rutas que puede seguir la corriente dentro del dominio. Simultáneamente, se realizan mediciones de voltaje (V) entre otros pares de electrodos que no participan en la inyección, representadas por las líneas negras con la letra “V”. En la figura, las mediciones se hacen entre electrodos adyacentes (3–4, 4–5, 5–6, 6–7 y 7–8), esto permite captar diferencias de potencial alrededor del perímetro. Este proceso se repite de manera secuencial, rotando los pares de electrodos de inyección y medición, asegurando así una cobertura completa del dominio. [2].

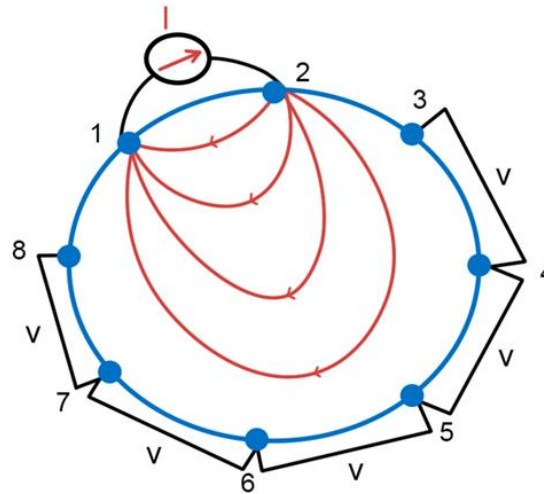


Fig. 3.1 Ejemplificación de un sistema básico de EIT.

3.2.1 Problema Directo

El problema directo es la obtención de los voltajes en los electrodos de medición mediante una estimulación predefinida en un entorno donde se conoce la conductividad. En general, este desafío se enfrenta empleando métodos numéricos, ya que estos presentan la ventaja de poder adaptarse a diversas geometrías con relativa facilidad. [4]

3.2.2 Métodos de solución del problema Directo

Los métodos para la solución del problema directo han evolucionado desde diversas configuraciones geométricas con resistencias. Para abordar dominios generales y facilitar la reconstrucción no lineal, se requieren procedimientos numéricos. Los métodos más comunes para la solución de ecuaciones diferenciales parciales son el método de diferencias finitas, método de elemento finitos y método de elementos de contorno, en la tabla 3.1 se presenta una descripción de estos métodos.

Tabla 3.1 Métodos de reconstrucción del problema directo

Métodos	Descripción
Diferencias Finitas (FDM)	El primero deriva de una aproximación mediante el teorema de Taylor y es el más sencillo de implementar. Consiste en discretizar la región con una malla uniforme y encontrar la solución evaluando la función en cada nodo de esta. Este método sin embargo no se adapta fácilmente a distintas geometrías y requiere mallas de alta densidad
Elementos Finitos (FEM)	Se basa en dividir un dominio (como una estructura o cuerpo) en subdominios no intersectantes llamados elementos finitos. Cada elemento finito representa una porción del dominio y se caracteriza por un conjunto de puntos llamados nodos. Los nodos están conectados entre sí, formando una malla que cubre todo el dominio
Elementos Contorno (BEM)	En lugar de dividir el dominio en elementos internos, el BEM se concentra en la frontera del objeto o estructura. La frontera se divide en segmentos o elementos de línea.

En este proyecto se utiliza el método de elementos finitos (FEM), este método implica la conversión de un objeto de naturaleza continua en un modelo discreto aproximado, un proceso conocido como discretización. La información sobre lo que sucede dentro de este modelo aproximado se obtiene mediante la interpolación de los valores conocidos en los nodos. En este método se segmenta el dominio del problema en elementos finitos, los cuales están determinados por un conjunto de puntos nodales. Las incógnitas se estiman mediante funciones definidas en estos puntos. Este enfoque se fundamenta en el principio del mínimo potencial de energía y se emplea para simular diversos fenómenos físicos, tales como la mecánica de sólidos, la transferencia de calor y electromagnetismo. [1]

3.2.3 Problema Inverso

El problema inverso en EIT se refiere a la obtención de la conductividad de una región a partir de estimulaciones conocidas y mediciones en su contorno. Este problema es no lineal y está mal condicionado, lo que significa que hay más incógnitas que ecuaciones disponibles, ya que las ecuaciones dependen de las mediciones y las incógnitas están relacionadas con los elementos del modelo.

Para abordar este problema, la región de interés se divide en un número finito de elementos. La solución del problema inverso se obtiene a partir del problema directo, que se resuelve utilizando FEM y requiere técnicas de optimización para su resolución.

De manera simplificada, en el problema directo se conoce la conductividad " σ " y se busca determinar los valores de voltaje " V ". En el problema inverso, ocurre lo contrario: se conocen los valores de voltaje " V " y se quiere determinar la conductividad " σ ".

Este proceso se puede llevar a cabo mediante algoritmos de reconstrucción y regularización y mediante algoritmos de optimización. [2]

3.3. Optimización

La optimización es un proceso matemático que busca encontrar la mejor solución posible dentro de un conjunto de opciones, maximizando o minimizando una función objetivo. El objetivo de un problema de optimización es determinar el valor óptimo de una función $f(x)$, donde x representa las variables del problema. [2][4]

El valor óptimo puede ser:

- **Máximo:** cuando se busca la mayor ganancia, eficiencia o rendimiento.
- **Mínimo:** cuando se busca reducir costos, errores o desperdicio.

El proceso de optimización puede clasificarse en:

Optimización sin restricciones: donde se busca el mejor resultado sin limitaciones impuestas a las variables.

Optimización con restricciones: donde las soluciones deben cumplir ciertas condiciones o límites.

3.3.1 Optimización con restricciones

En muchos problemas reales, las soluciones óptimas deben cumplir ciertas condiciones, llamadas restricciones. El problema de optimización con restricciones está definido en la ecuación (11), donde se busca minimizar una función $f(\sigma)$ bajo las siguientes restricciones:

$$\min_{\sigma} f(\sigma) \tag{11}$$

$$\begin{aligned} \text{Sujeto a: } & g(\sigma) \leq 0 \\ & h(\sigma) = 0 \end{aligned}$$

Donde

$f(\sigma)$: Función objetivo en función de la conductividad

$h(\sigma) = 0$: Restricciones de igualdad

$g(\sigma) \leq 0$: Restricciones de desigualdad

3.3.2 Condiciones de optimización

Las condiciones de optimización necesarias para encontrar el valor óptimo de están definidas por las ecuaciones (12) a (15), que describen tanto las condiciones de primer y segundo orden como la formulación del problema de optimización.

Condición de primer orden:

La condición de primer orden indica que un punto σ^* es un óptimo si y solo si

$$\nabla f(\sigma^*) = 0 \quad (12)$$

Esta condición asegura que σ^* sea un candidato a ser un mínimo o máximo. No obstante, por sí sola, no garantiza que se trate de un mínimo o máximo, por lo que se debe recurrir a la condición de segundo orden para determinar la naturaleza del punto.

Condición de segundo orden:

Se analiza la curvatura de la función a través de la matriz Hessiana $k(\sigma)$, que está formada por las segundas derivadas parciales de $f(\sigma)$

$$k(\sigma) = \begin{bmatrix} \frac{\delta^2 f(\sigma)}{\delta \sigma_1^2} & \frac{\delta^2 f(\sigma)}{\delta \sigma_1 \delta \sigma_n} \\ \frac{\delta^2 f(\sigma)}{\delta \sigma_n \delta \sigma_1} & \frac{\delta^2 f(\sigma)}{\delta \sigma_n^2} \end{bmatrix} \quad (13)$$

Dependiendo de la naturaleza de la matriz:

Si $K(\sigma)$ es definida positiva, σ^* es un mínimo local

Si $K(\sigma)$ es definida negativa, σ^* es un máximo local

Si $K(\sigma)$ es indefinida, σ^* es un punto de silla

Planteamiento del Problema de Optimización

El problema de optimización se plantea de la siguiente manera en las ecuaciones (14) y (15):

$$\min_{\sigma} f(\sigma) \quad (14)$$

Donde la función objetivo es $f(\sigma)$ mide la diferencia entre los voltajes medidos (V_m) y los voltajes simulados $V_s(\sigma)$

$$\min_{\sigma} \|V_m - V_s(\sigma)\|^2 \quad (15)$$

Aquí, σ representa un vector con los valores de conductividad en cada elemento del modelo. Como los voltajes simulados dependen de la distribución de conductividad σ , el número de incógnitas es mayor que el número de ecuaciones (256 mediciones), lo que hace que el problema esté mal determinado.

Dado que la solución no es única, se requieren técnicas adicionales como regularización o restricciones para obtener una solución estable y físicamente consistente.

3.4. Software Eiders

Eiders (Electrical Impedance and Diffuse Optical Reconstruction Software) es un programa de código abierto creado en Matlab, diseñado para la reconstrucción de imágenes en EIT. Esta aplicación es capaz de abordar tanto el problema directo como el inverso en la EIT, permitiendo la generación de imágenes bidimensionales o tridimensionales que representan la distribución de la conductividad eléctrica en un área u objeto de interés,

Eiders permite la implementación de algoritmos para la reconstrucción y análisis de datos en EIT. Ofrece una plataforma versátil que facilita la experimentación con distintos métodos de reconstrucción y la visualización de resultados. Su uso es habitual en investigaciones y desarrollos en áreas como la monitorización de la ventilación pulmonar, la monitorización cerebral y otras disciplinas médicas y científicas. Al ser de código abierto, Eiders permite a los usuarios modificar y personalizar sus funciones de acuerdo con las necesidades particulares de sus proyectos. [3]

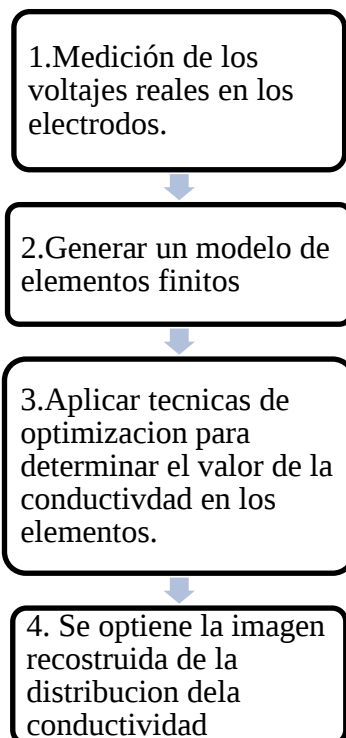
3.4.1 Reconstrucción de imágenes en Eiders

La reconstrucción de imágenes en Eiders se basa en la resolución del problema inverso. El objetivo es obtener una distribución precisa de la conductividad dentro de la región de interés a partir de las mediciones de voltaje en los electrodos ubicados en su contorno. Este proceso se logra mediante la solución iterativa del problema inverso, usando modelos computacionales que simulan las respuestas eléctricas en diferentes configuraciones.

En Eiders, la reconstrucción de imágenes comienza con la solución del problema directo, Una vez que los voltajes simulados se han comparado con las mediciones reales, se aplican técnicas de optimización para ajustar el modelo de conductividad, de manera que los voltajes simulados se aproximen a los medidos.

En la Figura 3.2 se presenta un esquema que resume el proceso de reconstrucción de imágenes en EIDORS. Este esquema permite visualizar de forma simplificada las etapas clave involucradas en la obtención de la distribución de conductividad a partir de las mediciones de voltaje.

Tabla 3.2. Esquema del proceso de reconstrucción de imagenes en EIDORS



Capítulo 4. Modelos de elementos finitos

4.1. Introducción

En este capítulo se presentan y describen en detalle los modelos utilizados durante el desarrollo de este proyecto. Un aspecto a considerar es la influencia que pueden tener las características geométricas de la malla, como la distribución y el tamaño de sus elementos, en la calidad de los resultados de las reconstrucciones, es por ello que se desarrollaron 2 modelos distintos. El primero fue generado automáticamente mediante el software Eidors utilizando Netgen, el cual produce una malla en la que el tamaño de los elementos varía según la proximidad a los electrodos. El segundo modelo fue construido manualmente a partir de una malla uniforme donde el tamaño de los elementos y su posicionamiento es simétrico a lo largo del modelo, este diseño es para imponer restricciones que obliguen a la homogeneidad en la distribución de la conductividad.

4.2. Modelos de elementos finitos

Los modelos de elementos de malla dividen el dominio en pequeñas regiones llamadas elementos finitos, conectados por nodos, permitiendo representar variaciones espaciales de una propiedad física. En este trabajo, estos modelos sirven para discretizar la conductividad del medio sedimentado y calcular su distribución a partir de mediciones de voltaje en los electrodos. Los elementos representan regiones homogéneas donde la conductividad es optimizada, mientras que los nodos conectan estos elementos y facilitan los calculos, en este proyecto se utilizaron 2 modelos uno que fue generado mediante el uso de Netgen y el otro modelo fue creado manualmente.

4.2.1 Modelo generado por Netgen

El primer modelo utilizado fue generado con el software Eidors mediante Netgen, esta es una herramienta que permite crear una representación detallada y precisa de una malla de elementos la cual se genera de forma automática en 2D y que toma como entrada una representación geométrica de un objeto o dominio que lo subdivide en elementos pequeños. Para cada uno de los electrodos presentes en esta malla se distribuyeron a lo largo del contorno de esta, con un electrodo adicional colocado en el fondo del recipiente. La disposición de los electrodos fue diseñada estratégicamente para optimizar la medición de voltajes y minimizar la diferencia de potencial entre las zonas superior e inferior del recipiente. Este diseño buscó mejorar la precisión y la consistencia de las mediciones, incrementando así la confiabilidad de la reconstrucción de datos obtenidos.

4.2.2 Modelo uniforme

El segundo modelo fue construido manualmente a partir de una malla básica, en la que un cuadrado se dividió en dos triángulos para formar los elementos fundamentales. Estos elementos se distribuyeron de manera uniforme a lo largo del recipiente, con el objetivo de eliminar zonas que pudieran influir de forma desigual en las reconstrucciones.

A diferencia del modelo generado por Netgen, donde el tamaño de los elementos varía según la proximidad a los electrodos, este modelo impone homogeneidad tanto en las dimensiones como en la distribución de todos los elementos. Se conservaron las proporciones del recipiente, ajustando el número total de elementos y nodos.

La principal motivación de este enfoque es que, al utilizar una malla con características uniformes, es posible aplicar restricciones que permiten reducir la dimensionalidad del problema. En particular, se implementaron restricciones de igualdad por fila, lo que implica que todos los elementos ubicados en una misma fila deben compartir un mismo valor de conductividad. Este tipo de estrategia solo puede aplicarse de manera eficaz sobre una malla con estructura uniforme. En modelos generados automáticamente mediante Netgen, los elementos no presentan una organización regular ni están alineados de forma clara por filas, lo que imposibilita imponer restricciones de igualdad de manera coherente. Además, la estructura uniforme facilita la transformación del problema desde una reconstrucción bidimensional hacia una aproximación unidimensional en función de la altura, lo cual es coherente con el comportamiento físico del proceso de sedimentación, donde las variaciones de conductividad se dan predominantemente en el eje vertical. De este modo, se reduce significativamente el espacio de búsqueda durante la optimización, mejorando la estabilidad y eficiencia del proceso.

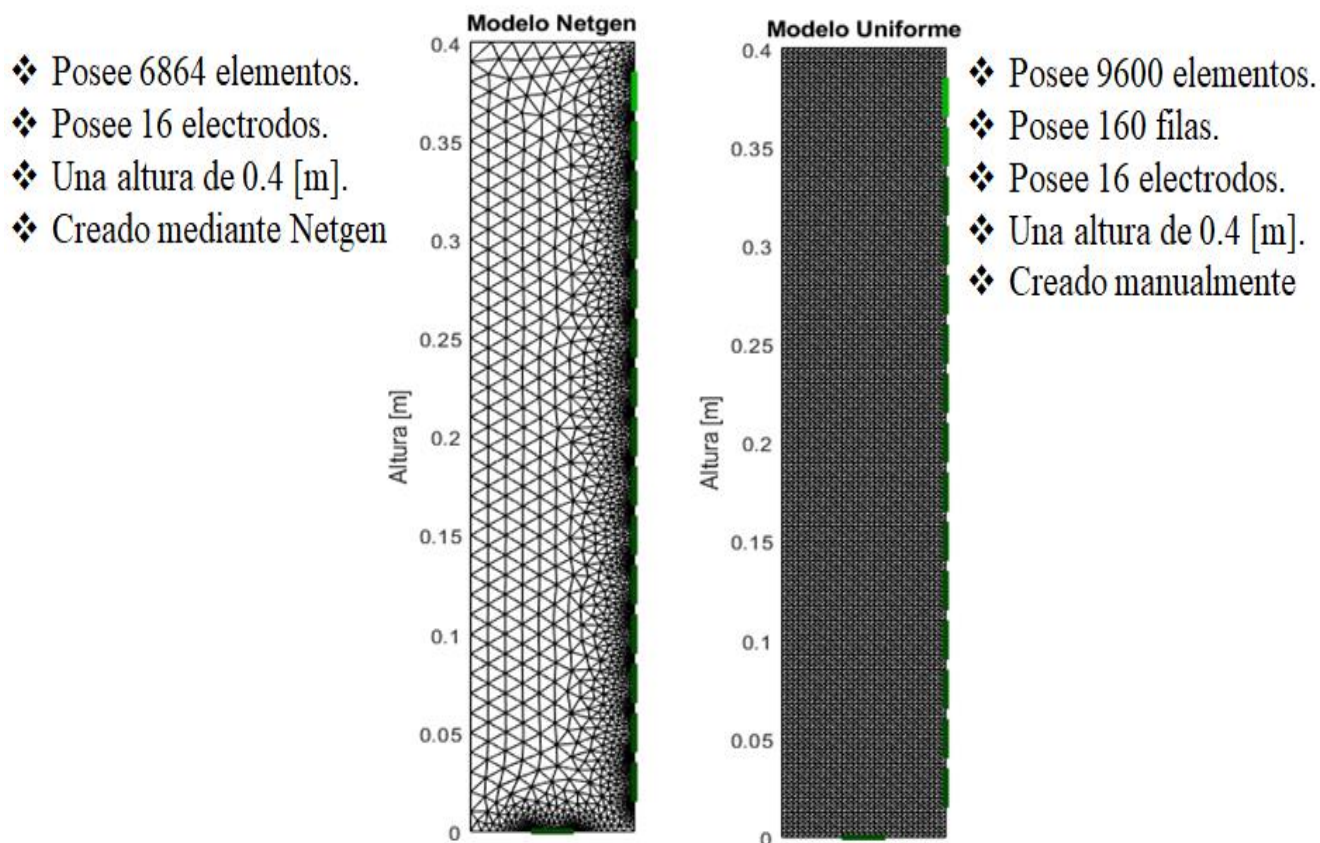


Fig. 4.1 Modelos Utilizados.

En la Figura 4.1 se muestran dos modelos con la misma configuración de electrodos, pero con diferencias en la cantidad y distribución de elementos. El modelo generado con Netgen cuenta con 6864 elementos, mientras que el modelo uniforme tiene 9600 elementos.

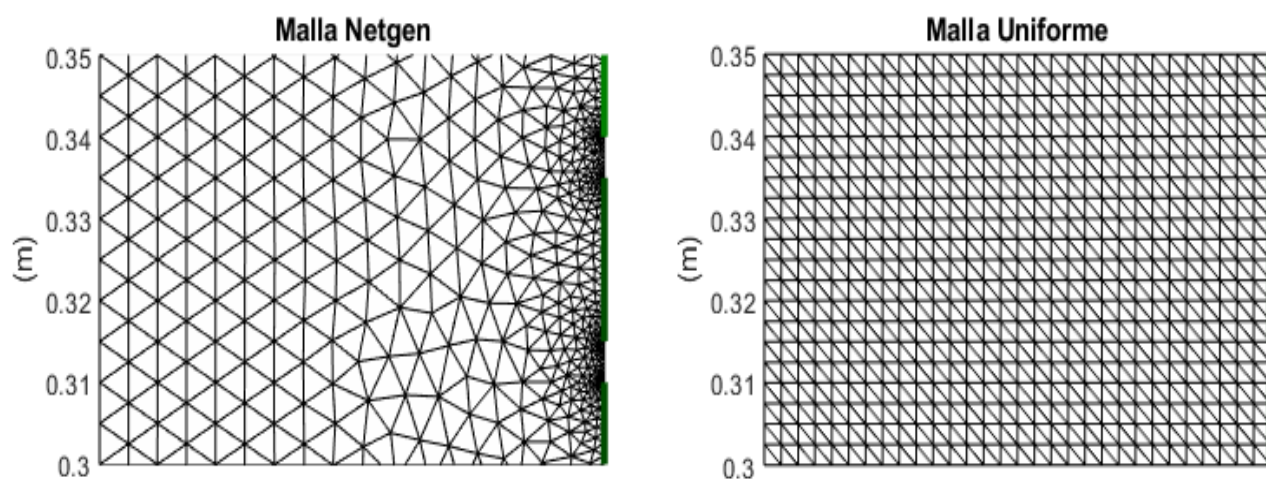


Fig. 4.2 Modelos Utilizados (Zoom).

En la Figura 4.2, donde se presenta un acercamiento de ambos modelos, se puede observar que en el caso del modelo uniforme, el tamaño y la posición de los elementos se mantienen constantes en toda la geometría. En contraste, en el modelo generado con Netgen, los elementos varían de tamaño, reduciéndose a medida que se acercan a los electrodos.

Este comportamiento se debe a que el refinamiento de la malla en Netgen se concentra en las zonas cercanas a los electrodos, donde se espera una mayor variación en la conductividad y en los valores de potencial eléctrico. La reducción del tamaño de los elementos en estas áreas permite capturar con mayor precisión los cambios locales, mejorando la calidad de la solución sin aumentar excesivamente el número total de elementos en el dominio.

Capítulo 5. Procedimiento

5.1. Introducción

El presente capítulo describe la metodología utilizada en este estudio, comenzando con una revisión bibliográfica para comprender los fundamentos del proceso de sedimentación y la EIT. Esta investigación permitió establecer las bases teóricas necesarias para modelar la relación entre la concentración de sólidos y la conductividad. Para la implementación, se empleó MATLAB como herramienta principal, realizando simulaciones que permitieron generar modelos representativos del proceso de sedimentación y obtener perfiles de concentración de sólidos. Se abordó la creación y solución de modelos mediante el método de elementos finitos, lo que incluyó el diseño manual de mallas con una distribución optimizada de nodos y elementos.

Además, se utiliza la función de optimización *Fmincon*, explorando sus parámetros clave y los diferentes algoritmos disponibles para la reconstrucción de imágenes de conductividad. Se detallan los métodos utilizados en el proceso de optimización, incluyendo las restricciones impuestas y su impacto en la precisión y estabilidad de los resultados. Finalmente, se presentan las estrategias aplicadas para mejorar la eficiencia computacional y la convergencia del modelo, asegurando una reconstrucción óptima de la distribución de conductividad en el medio sedimentado.

5.2. Sistema de trabajo

Primero, se llevó a cabo una revisión bibliográfica sobre el proceso de sedimentación y la EIT. A partir de esto, se extrajo el modelo utilizado, tras ello se creó otro modelo pero este se hizo de forma manual a partir de la creación de elementos distribuidos de manera uniforme a lo largo de todo el volumen en donde se estableció que este contaría con 160 filas de 60 elementos cada una y en ambos modelos se utiliza la configuración electrodos presentada en el capítulo 4, donde se utilizan 16 electrodos de los cuales uno se posiciona en el fondo de recipiente mientras que el resto al costado derecho del mismo. Para evaluar el funcionamiento del nuevo modelo, se inyectó corriente entre pares de electrodos de estimulación y se midió el voltaje en los electrodos restantes. A partir de estos datos, se procedió generar las reconstrucciones de la conductividad y la concentración de sólidos en tres tiempos diferentes: 25 s, 50 s y 150 s. Estas se realizaron a través del método de gauss Newton y el algoritmo de Laplace.

También se realizó una reconstrucción mediante un proceso de optimización utilizando la función Fmincon, con el objetivo de minimizar la diferencia cuadrática entre los voltajes medidos y simulados. Para ello, se formuló una función de costo que cuantificaba el error entre los datos experimentales y los generados por el modelo. La optimización se llevó a cabo empleando los algoritmos SQP (Programación Cuadrática Secuencial) e Interior-Point, ajustando los valores de conductividad en la malla para mejorar la reconstrucción. Además, se aplicaron restricciones de igualdad y desigualdad para garantizar la estabilidad y factibilidad de la solución, estableciendo tres diferentes métodos de resolución.

5.2.1 Mapeo de concentración de sólidos a conductividad

El mapeo de conductividad en perfiles concentración de sólidos en sedimentación es una herramienta para comprender la composición y las propiedades de las capas superficiales de la Tierra, con el mapeo de la concentración de sólidos a conductividad se pueden visualizar las diferentes etapas de la sedimentación con el pasar del tiempo, sin necesidad de depender de la visibilidad de la mezcla.

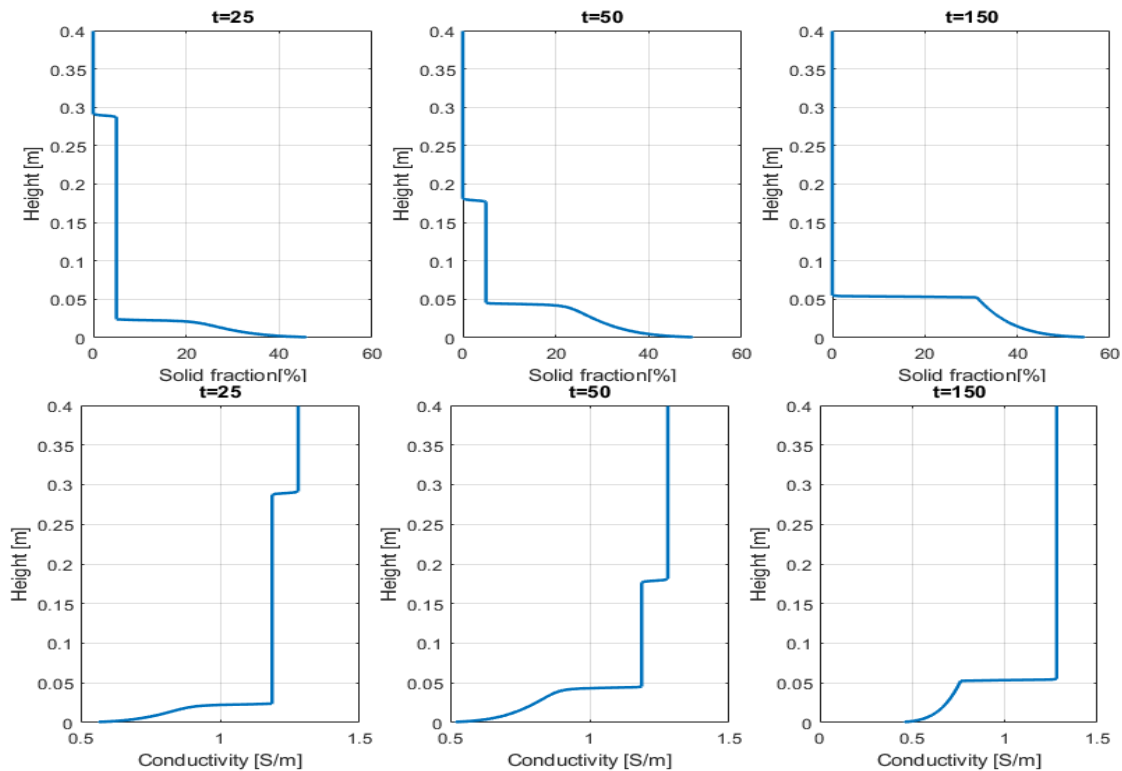


Fig. 5.1 Mapeo de concentración de sólidos (Arriba) a conductividad (abajo)

En la figura 5.1 se muestran los mapeos de concentración y conductividad del problema, en los cuales se pueden distinguir claramente las tres fases del proceso de sedimentación: agua clara, sedimentación y compactación. Estos perfiles de concentración se convierten a conductividad mediante la ecuación de Perry and Chilton (ecuación explicada en el capítulo 6) cual relacionan la conductividad líquida y sólida. Para ello se usaron como referencia los valores reportados de la conductividad de un relave peruano “la Ciénega” la cual relaciona la concentración con la conductividad de cada componente de la mezcla. [2][6][7]

5.2.2 Obtención de voltajes

Utilizando el mapeo de conductividad generado previamente, se obtuvieron los valores de voltaje correspondientes a los tres tiempos de estudio en el proceso de sedimentación. Estos voltajes simulados, obtenidos mediante la solución del problema directo, son fundamentales para validar el modelo numérico y constituyen la base necesaria para la posterior reconstrucción de imágenes. En la figura 5.2 se muestran los voltajes generados para el modelo con distribución uniforme de conductividad en cada uno de los tiempos analizados, mientras que en la figura 5.3 se presentan todos los voltajes combinados en un solo script.

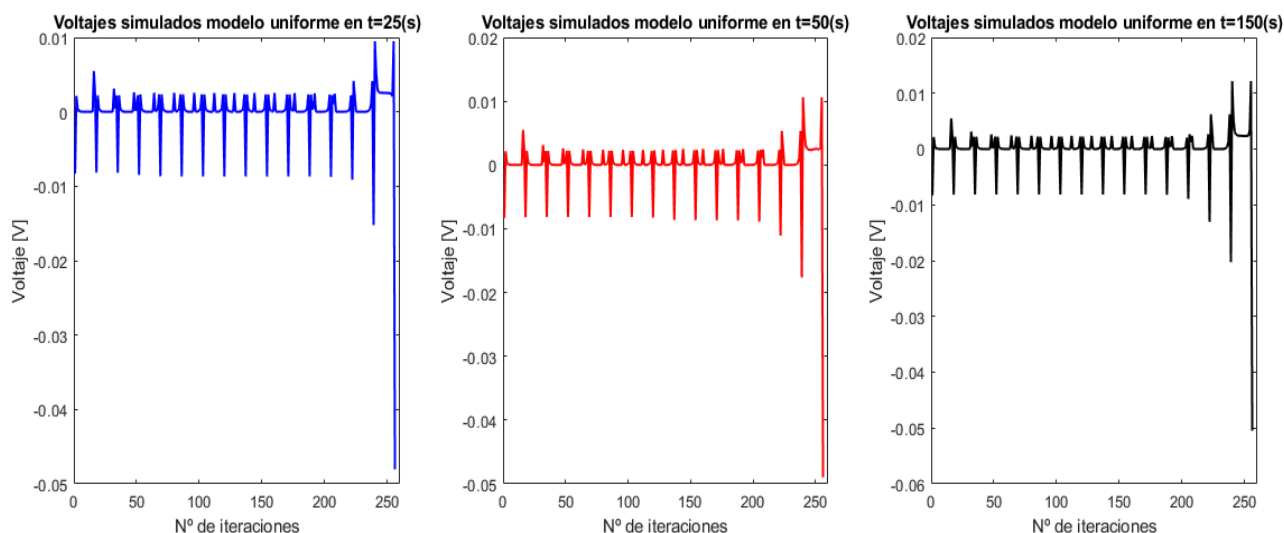


Fig. 5.2 Voltajes simulados en 3 tiempos de sedimentación de modelo uniforme.

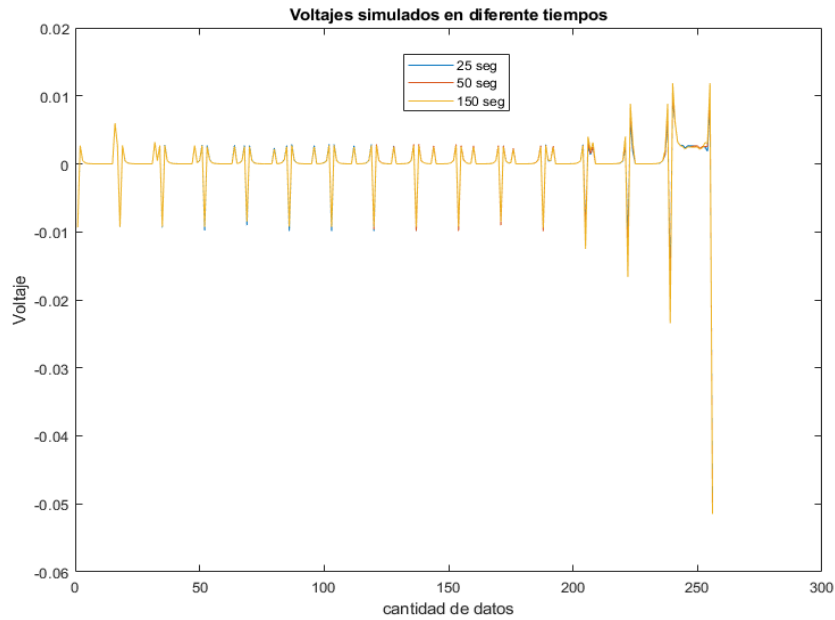


Fig. 5.3 Voltajes del modelo uniforme simulados en 3 tiempos de sedimentación. (En un script).

5.2.3 Mapeo de conductividad en 2D a 1D

Se generaron imágenes reconstruidas que representan la distribución de conductividad en 2D, lo que constituye un mapeo bidimensional de la conductividad. Este proceso se llevó a cabo utilizando el Toolbox de Eiders, el cálculo del Hiperparametro y con de regularización con el algoritmo de Laplace.

Una vez obtenidas las reconstrucciones en 2D, Matlab permitió transformarlas al plano 1D. Esta conversión se realizó con la finalidad de analizar el comportamiento de la conductividad en relación con el mapeo original y a su vez compararlo con el otro modelo.

5.2.4 Mapeo de conductividad en 1D a concentración en 1D

Una vez obtenidas los mapeos de conductividad en 1D en los diferentes tiempos de sedimentación, se transformaron a concentración obteniendo los diferentes mapeos de concentración en 1D para que de esta forma pueden ser comparado con el mapeo de concentración original.

5.2.5 Optimización con restricciones usando Fmincon

Función Fmincon

La función Fmincon es una herramienta de Matlab diseñada para resolver problemas de optimización no lineal con restricciones. Específicamente, permite minimizar una función objetivo sujeta a restricciones de desigualdad, igualdad, límites en las variables y restricciones no lineales generales.

Fmincon utiliza diferentes algoritmos de optimización, entre los cuales destacan el Método de Interior-Point y el Método SQP (Sequential Quadratic Programming), que son adecuados para problemas complejos y de alta dimensionalidad.

La elección de Fmincon se basó en tres razones principales:

- Su capacidad para manejar restricciones de igualdad y desigualdad de forma simultánea.
- La posibilidad de poder trabajar con modelos con gran cantidad de elementos mediante sus algoritmos como lo son Interior-Point y SQP, adecuados para funciones no lineales como las que surgen en EIT.
- Su integración directa con Matlab y EIDORS, lo que facilita la implementación en las simulaciones.

En este caso para resolver el problema se busca optimizar los parámetros del modelo de conductividad, que están representados por un conjunto de valores, la optimización se basó en minimizar una función de costo que midió la diferencia cuadrática entre los voltajes simulados por el modelo y las mediciones reales de voltaje. Para llevar a cabo la optimización, se establece un conjunto de parámetros que determinan el funcionamiento de fmincon durante la optimización, estos parámetros afectan la precisión y la velocidad.

5.2.5.1 Función de Costo y Restricciones

Lo Primero que se debe definir la función de costo y las restricciones del problema, tal como se muestra en las ecuaciones (16) a (20).

La función objetivo está dada por la ecuación (16), la cual busca minimizar el error cuadrático entre los voltajes medidos V_m y los voltajes simulados $V_s(\sigma)$:

$$\min_{\sigma} f(\sigma) = \|V_m - V_s(\sigma)\|^2 \quad (16)$$

Como Como se observa en la Ecuación (16), el criterio de optimización es minimizar la diferencia al cuadrado entre los voltajes medidos V_m y los voltajes simulados $V_s(\sigma)$. Este enfoque permite ajustar la distribución de la conductividad σ de manera que los voltajes simulados se acerquen lo más posible a los voltajes medidos, lo que mejora la precisión del modelo.

Restricciones

Para garantizar que la solución obtenida cumpla con ciertas condiciones físicas y matemáticas, se imponen restricciones al problema. Estas restricciones pueden ser tanto no lineales como lineales, y también se incluyen límites superiores e inferiores para las variables de decisión.

Restricciones No Lineales

Las restricciones no lineales son desigualdades de la forma:

$$C(\sigma) \leq 0 \text{ y } ceq(\sigma) = 0 \quad (17)$$

En (17) están las restricciones que se utilizan para definir condiciones específicas en la solución, como límites en la conductividad o en la distribución de materiales. Las ecuaciones de desigualdad y igualdad permiten imponer condiciones sobre el comportamiento del sistema que no se pueden expresar de forma lineal.

Restricciones Lineales

Las restricciones lineales se expresan en forma matricial, como se muestra en las ecuaciones (18) y (19):

$$A\sigma \leq b \quad (18)$$

$$A_{eq}\sigma = b_{eq} \quad (19)$$

En (18), A y b representan las desigualdades, mientras que en (19) A_{eq} y b_{eq} definen las condiciones de igualdad. Estas restricciones se utilizan para imponer relaciones lineales entre las variables del problema, como la conservación de energía o la sumatoria de ciertos parámetros.

Límites superiores e inferiores

Garantizan que las variables permanezcan dentro de un rango válido:

$$lb \leq \sigma \leq ub \quad (20)$$

En (20) se fijan los límites inferiores lb y superiores ub para cada componente de σ , garantizando que los valores de la conductividad o las variables de decisión no superen ciertos valores físicos o matemáticos establecidos para el sistema.

5.2.5.2 Parámetros de optimización de Fmincon

Un aspecto importante son los parámetros de optimización pues estos determinan cuándo el algoritmo debe terminar o cual es el cambio que sufrirá la solución tras cada iteración, asegurando que la solución obtenida sea lo suficientemente precisa sin realizar cálculos innecesarios. En Fmincon estos criterios controlan el número de iteraciones, la tolerancia a restricciones, etc. A continuación, se describen los principales parámetros que afectan al proceso de la optimización:

Max Iterations: Define el número máximo de iteraciones permitidas antes de que el algoritmo se detenga.

Step Tolerance: Representa el tamaño mínimo de cambio en las variables de decisión que fmincon considera significativo. Si la variación entre iteraciones cae por debajo de este umbral, el algoritmo asume que ha convergido a una solución estable y se detiene.

Optimality Tolerance: Controla qué tan pequeño debe ser el gradiente de la función objetivo en el punto óptimo. Un valor más bajo implica una solución más precisa, pero puede requerir más iteraciones y aumentar el tiempo de cálculo.

Constraint Tolerance: Define el nivel de violación permitido para las restricciones impuestas en el problema. Si las restricciones se cumplen dentro de este margen, la solución se considera válida y el algoritmo finaliza.

FiniteDifferenceStepSize: Determina el tamaño del salto del gradiente utilizado para calcular las derivadas numéricas cuando el gradiente no se proporciona de forma explícita. Un valor grande genera estimaciones imprecisas, mientras pequeño puede aumentar el costo computacional.

Algoritmo de optimización: Son los encargados de encontrar la mejor solución posible dentro del espacio de búsqueda. En fmincon, los algoritmos disponibles son SQP, Interior-Point, Trust-Region Reflective y Active-Set, cada uno con ventajas según la naturaleza del problema.

En este caso, se estableció un límite de 250 iteraciones, ya que este valor permite alcanzar una solución óptima sin que el tiempo de cómputo sea excesivo. Esto garantiza que el algoritmo tenga suficiente margen para mejorar la solución sin prolongar innecesariamente el procesamiento.

Para el caso de las tolerancias StepTolerance, OptimalityTolerance y ConstraintTolerance se fijaron en 1×10^{-12} , lo que significa que el algoritmo seguirá iterando hasta que el cambio en la función objetivo sea mínimo, asegurando así una mayor precisión en la solución.

Los parámetros que cambian a lo largo de las optimizaciones son la selección del algoritmo de optimización y el tamaño del paso para el cálculo del gradiente, estos se modifican para encontrar una solución óptima y también aunque no es un parámetro propio de Fmincon se modificaron los métodos de trabajo, todo estos cambios se describen a continuación.

5.2.5.3 Problemas de optimización

Para realizar la optimización se plantearon 3 diferentes problemas los cuales consistieron en realizar la optimización en cada elemento por separado y los otros hacen la optimización reduciendo el modelo por filas a lo largo de toda la malla- En los tres métodos, se estableció que el valor inicial de la conductividad fuera 1, ya que al modificar este parámetro se observaron inconsistencias, afectando la convergencia y precisión del proceso de optimización.

Problema 1

En este problema se estableció un conjunto de restricciones lineales las cuales están en base a las ecuaciones (18) y (19) en esta se implementó una restricción cuyo objetivo principal fue imponer que todos los elementos ubicados en una misma fila del modelo compartan un valor de conductividad común. Esta estrategia es posible gracias a la estructura de malla uniforme del modelo, donde los elementos están organizados de forma regular y alineados horizontalmente. La restricción se basa en establecer que la diferencia de conductividad entre elementos consecutivos dentro de una fila debe ser igual a cero. Esto se expresa mediante la ecuación (21):

$$\sigma_i - \sigma_{i+k} = 0, \quad \forall i = 1, 2, \dots, n - 1 \quad (21)$$

Donde σ_i representa la conductividad de un elemento i dentro de una fila, el término σ_{i+k} corresponde a elementos en la misma fila y n es la cantidad de elementos presentes en cada fila siendo estos 60. Estas igualdades garantizan que todos los elementos de cada fila mantengan una conductividad uniforme.

Por otro lado, se implementó una restricción no negatividad, esta restricción garantiza que cada valor de σ sea mayor o igual a cero, es decir, asegura la no negatividad de la conductividad, La implementación computacional de esta condición se realiza mediante una matriz identidad negativa que, al multiplicarse por el vector de conductividades, asegura que no exista un elemento negativo y esta representada por la ecuación (22):

$$\sigma_j \geq 0, \quad \forall j = 1, 2, \dots, N \quad (22)$$

Donde σ_j representa la conductividad del elemento j en el modelo y N es la cantidad de elementos siendo para este caso 9600. Este tipo de restricción es simple pero fundamental, ya que permite evitar soluciones no físicas sin imponer estructuras adicionales sobre la distribución espacial de la conductividad.

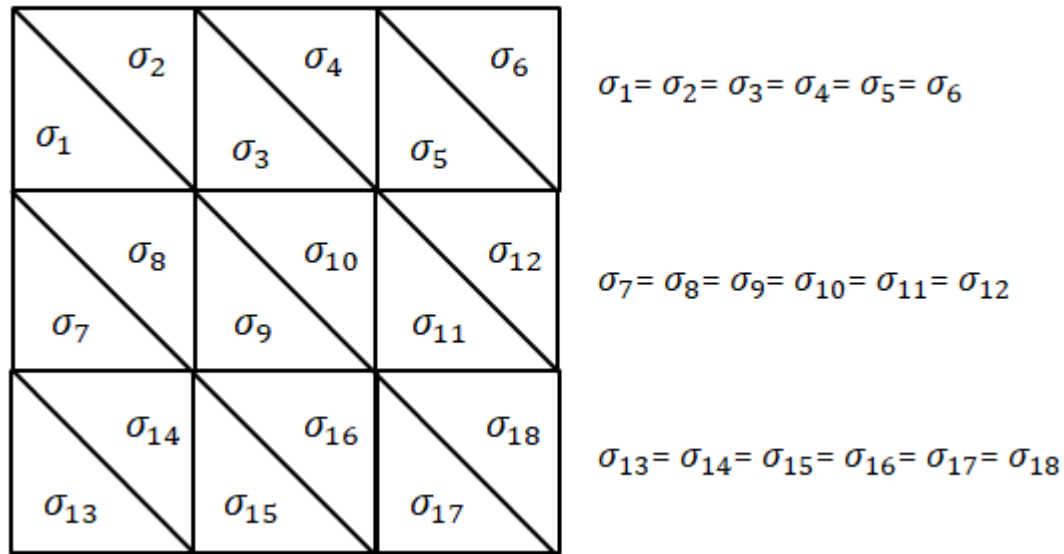


Fig. 5.4 Representación del modelo aplicando restricciones del problema 1

En la Figura 5.4 se muestra una sección simplificada del modelo, en la cual se toma una porción representativa de 18 elementos distribuidos en 3 filas. A diferencia del modelo completo, que cuenta con 9600 elementos y 160 filas, en esta representación no se incluyen los electrodos debido a la escala reducida. La figura permite visualizar las restricciones aplicadas en el Problema 1. Cada triángulo representa un elemento finito con su respectiva conductividad. Como se puede observar, los elementos están organizados en filas horizontales, y cada una de ellas contiene un número determinado de elementos.

La restricción implementada en este caso impone que todos los elementos ubicados en una misma fila compartan un único valor de conductividad. Específicamente, dicho valor corresponde al del primer elemento de cada fila. Por lo tanto, la conductividad del elemento 1 se iguala a la de los elementos 2, 3, 4, y así sucesivamente dentro de la primera fila. De manera análoga, en la segunda fila todos los elementos adoptan el valor del elemento 7, y este patrón se repite a lo largo de todo el dominio.

Este tipo de restricción reduce el número de variables independientes en el problema de optimización y permite representar el modelo de manera unidimensional en función de la altura, facilitando así una reconstrucción más eficiente y coherente con la naturaleza del proceso de sedimentación.

Problema 2

En este problema se ha aplicado una estrategia de simplificación basada en la reducción de la dimensionalidad de la malla. En lugar de considerar cada elemento de forma individual, se agruparon todos los elementos que se encuentran en la misma fila horizontal, de forma que los 60 elementos de cada fila pasen a ser solo uno lo que hace que la malla originalmente compuesta por 9600 elementos se redujo a un modelo de tan solo 160 elementos, esto facilita la manipulación de los datos y mejora considerablemente el tiempo de cómputo en el proceso de optimización.

Además en este problema solo se consideró la restricción de no negatividad, el objetivo de este enfoque fue explorar un modelo con más libertad, permitiendo que la función de costo encuentre otras configuraciones que pueden ser potencialmente mejores, aunque con el riesgo de obtener distribuciones de conductividad más irregulares o físicamente menos plausibles.

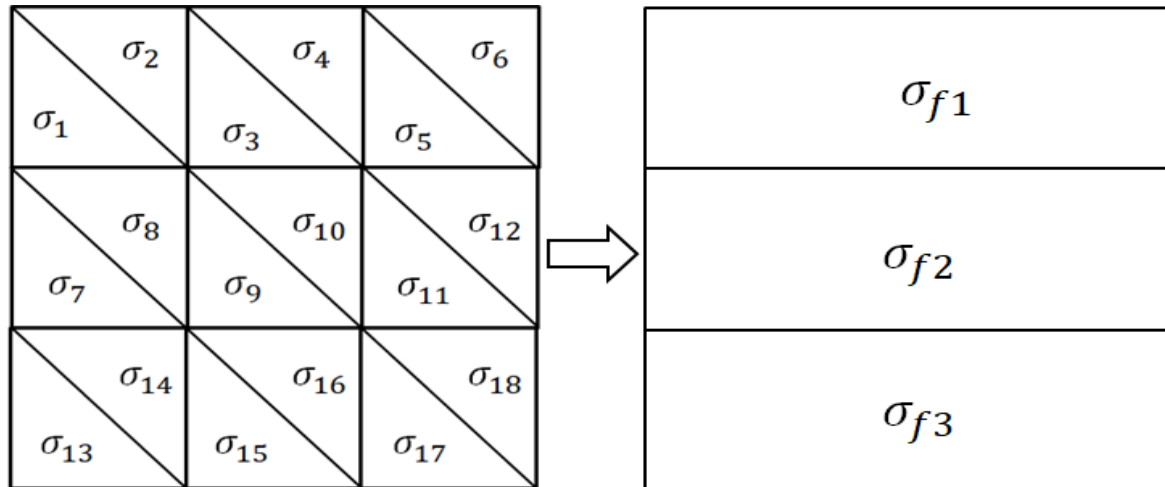


Fig. 5.5 Representacion del modelo aplicando restricciones del problema 2

La Figura 5.5 al igual que la figura anterior muestra una representación a pequeña escala del modelo en la que se muestra el proceso de reducción de dimensionalidad aplicado en el problema 2. En este caso en el modelo original a la izquierda, se observa que cada fila está compuesta por múltiples elementos (en este caso, 6 por fila a modo ilustrativo), cada uno con una conductividad independiente.

Para este problema se implementó una estrategia de agrupamiento por filas, la cual consistió en asignar un único valor de conductividad a todos los elementos contenidos en una misma fila, representado por σ_{fh} . De esta manera, en lugar de optimizar individualmente la conductividad de cada elemento, se optimiza una sola variable por fila. Esta simplificación permite reducir

significativamente la cantidad de variables independientes del modelo, lo cual se visualiza en el lado derecho de la figura, donde cada fila queda representada por un solo valor de conductividad.

Este enfoque tiene como objetivo reducir la variabilidad horizontal del modelo, permitiendo que la conductividad varíe únicamente en el eje vertical.

Problema 3

En la formulación del problema de optimización, se impusieron restricciones lineales para garantizar condiciones físicas y estructurales sobre la conductividad. En primer lugar, se implementó la restricción de no negatividad, asegurando que cada componente del vector de conductividades σ sea mayor o igual a cero, condición necesaria ya que la conductividad eléctrica, por definición física, no puede tomar valores negativos. Además, se implementó una restricción de monotonía creciente. Esta condición establece que la conductividad en una fila debe ser mayor o igual que la de la fila inmediatamente inferior, lo cual es consistente con el comportamiento típico del proceso de sedimentación. Matemáticamente, esta restricción se expresa tal como se puede observar en (23):

$$\sigma_{fh} - \sigma_{fh+1} \leq 0, h = 1, 2, \dots, 59 \quad (23)$$

Donde el subíndice h representa el número de fila en el modelo, 60 filas, numeradas desde la parte superior hacia la parte inferior del modelo. La variable σ_{fh} denota el valor de la conductividad de todos los elementos ubicados en la fila h , mientras que σ_{fh+1} representa la conductividad correspondiente a la fila inmediatamente inferior, es decir, la fila $h+1$.

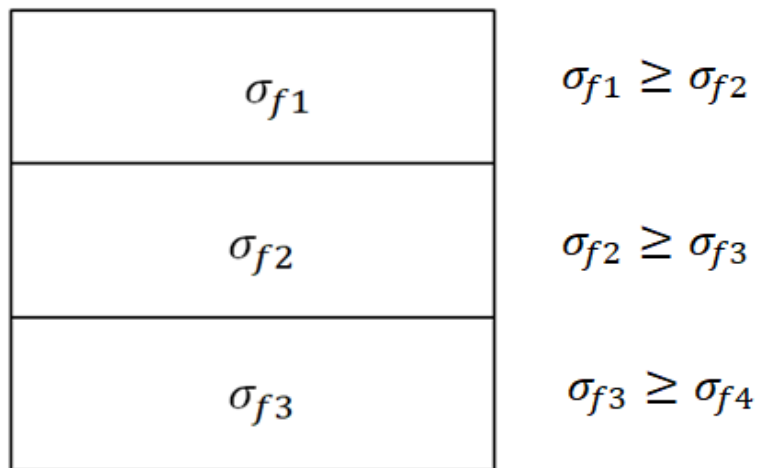


Fig. 5.6 Representación del modelo aplicando restricciones del problema 3

La Figura 5.6 presenta una pequeña representación esquemática de la implementación de la restricción de monotonía creciente aplicada en el Problema 3. En esta, cada bloque corresponde a un grupo de elementos agrupados por fila, con una única conductividad asociada. La condición establece que la conductividad debe aumentar o mantenerse constante a medida que se avanza en dirección vertical ascendente dentro del modelo, es decir, desde la base hacia la parte superior.

5.2.5.4 Gradiente

Un elemento fundamental en los métodos de optimización es el gradiente de una función objetivo. Este se define como el vector de derivadas parciales de la función respecto a cada una de sus variables independientes, y señala la dirección de máximo aumento de la función en un espacio multidimensional. En el contexto de minimización, la dirección contraria al gradiente indica el camino más rápido para disminuir el valor de la función, dado esto el cálculo del gradiente es crucial porque determina no solo la dirección del ajuste en cada iteración, sino también qué tan rápido cambia la función en esa dirección. En particular, el tamaño del paso en esa dirección afecta directamente la velocidad del proceso de optimización..

En `fmincon`, si el usuario no especifica manualmente un valor para el salto del gradiente, el algoritmo utiliza un valor por defecto de $1,49 \times 10^{-8}$, que es muy pequeño. Esto puede provocar una convergencia lenta, ya que el cambio de la función con respecto a las variables es mínimo. Por ello, ajustar este parámetro puede mejorar los resultados y reducir el tiempo computacional.

Dado que en este caso la función objetivo es compleja y no puede derivarse de forma analítica, `fmincon` utiliza un método numérico para estimar el gradiente: las diferencias finitas. Este método consiste en calcular derivadas parciales aproximadas evaluando la función en puntos cercanos. Las Ecuaciones (24) y (25) presentan este procedimiento.

El gradiente de una función $f(\sigma)$ de múltiples variables $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \dots, \sigma_n)$ es un vector que contiene sus derivadas parciales y se expresa como:

$$\nabla f(\sigma) = \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma_1}, \frac{\partial f}{\partial \sigma_2}, \frac{\partial f}{\partial \sigma_3}, \dots, \frac{\partial f}{\partial \sigma_n} \right)^T \quad (24)$$

La aproximación de las derivadas parciales mediante diferencias finitas se expresa de la como:

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_i} \approx \frac{f(\sigma_1 + \Delta\sigma, \sigma_2, \sigma_3, \dots \dots \sigma_n) - f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \dots \dots \sigma_n)}{\Delta\sigma} \quad (25)$$

Dónde:

$\Delta\sigma$: Es el incremento que se utiliza para aproximar la derivada.

$f(\sigma_1 + \Delta\sigma, \sigma_2, \dots \dots \sigma_n)$: Es el valor de la función $f(\sigma_i)$ evaluada en el punto donde $\Delta\sigma$ se ha incrementado.

$\frac{\partial f}{\partial \sigma_i}$: Es la derivada parcial de la función f con respecto a la variable σ_i

5.2.5.5 Algoritmo de optimización

Los algoritmos de optimización evalúan la calidad de una solución a través de una función objetivo, que en este caso representa el error cuadrático entre los voltajes simulados y medidos. Para minimizar este error, el algoritmo ajusta iterativamente las variables de decisión, asegurando al mismo tiempo que la solución cumpla con las restricciones. El proceso finaliza cuando se alcanza la mejor solución posible o cuando se cumple alguno de los criterios de término.

En este trabajo se utilizaron 2 algoritmos de optimización, Interior-Point y SQP. Estos se eligieron porque son dos de los algoritmos más adecuados dentro de Fmincon para resolver problemas con una gran cantidad de elementos.

Interior-Point

Es un algoritmo de optimización utilizando para resolver problemas de programación no lineal con restricciones. Este algoritmo trabaja dentro del dominio permitido, evitando las fronteras hasta alcanzar la solución óptima.

Para manejar las restricciones en el problema, el algoritmo introduce una función de barrera. Esta función convierten el problema en una secuencia de problemas de optimización sin restricciones mediante el uso de una la función de penalización logarítmica, tal como se muestra en la ecuación (26).

$$\min_{\sigma} \left[f(\sigma) - \mu \sum \ln(-g_i(\sigma)) \right] \quad (26)$$

Dónde:

μ : es un parámetro que controla la fuerza de la barrera. Cuanto más pequeño es μ más cerca de la frontera de las restricciones se permite que esté la solución.

$g_i(\sigma)$: Representa las restricciones de desigualdad.

$\log(g_i(\sigma))$ es válida solo cuando $g_i(\sigma) < 0$.

La idea detrás de este enfoque es que, a medida que μ se hace más pequeña, la penalización de la barrera disminuye, lo que permite que la solución se acerque gradualmente a la frontera de las restricciones.

SQP (Sequential Quadratic Programming)

El método SQP es un algoritmo basado en la aproximación sucesiva del problema original mediante subproblemas de optimización cuadrática. Este se muestra en la ecuación (27), este método es particularmente útil cuando la función objetivo y/o las restricciones son no lineales, como en la reconstrucción de conductividad en Tomografía de Impedancia Eléctrica (EIT).

En cada iteración, SQP resuelve un subproblema cuadrático que aproxima la función objetivo y las restricciones en el entorno del punto actual. Este subproblema se expresa como:

$$\min_{\sigma} \frac{1}{2} \Delta \sigma^T H_k \Delta \sigma + \nabla f(\sigma_k)^T \Delta \sigma \quad (27)$$

Sujeta a las restricciones linealizadas

$$\nabla g_i(\sigma_k)^T \Delta \sigma + g_i(\sigma_k) \leq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m$$

$$\nabla h_j(\sigma_k)^T \Delta \sigma + h_j(\sigma_k) \leq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

Dónde:

σ es el vector de conductividades en la malla.

$\Delta \sigma$ es la corrección aplicada a la solución en cada iteración.

H_k es una aproximación de la matriz Hessiana de la función objetivo.

∇f es el gradiente de la función objetivo en la iteración actual.

$g_i(\sigma)$ y $h_i(\sigma)$ representan las restricciones de desigualdad e igualdad, respectivamente

Capítulo 6. Resultados

6.1. Introducción

En el siguiente capítulo, se presentan los resultados obtenidos de las simulaciones de concentración y conductividad. Se incluyen gráficos en 2D y también en 1D, se hacen las comparaciones entre los gráficos del modelo uniforme y el del Netgen usando el algoritmo de Gauss Newton y también se muestran las reconstrucciones obtenidas mediante la optimización con restricciones mostrando los resultados de los diferentes algoritmos y métodos de optimización utilizados.

6.2. Concentración de sólidos a Conductividad

Se hizo una reconstrucción del comportamiento de la conductividad a lo largo de diferentes tiempos de sedimentación, abordando el problema directo y para la reconstrucción de la distribución de conductividad mediante el uso de diversos parámetros, tratando el problema inverso

En este caso, el mapeo de conductividad se basa en una fórmula que convierte la concentración de sólidos a conductividad, utilizando dos datos clave: la conductividad del sólido (σ_s) y la conductividad del líquido (σ_l). En este se mantuvieron los mismos valores usados en un relave peruano conocido como La Ciénega. [7]

$$\begin{aligned}\sigma_s &= 1.28 [S/m] \\ \sigma_l &= 6 \times 10^{-4} [S/m]\end{aligned}$$

La particularidad de estos valores de conductividad es que difieren significativamente entre sí, esto al momento de simular permite observar con mayor claridad cómo cambia la conductividad a lo largo de los diferentes tiempos de sedimentación.

Como se mencionó en el capítulo 5 para realizar el mapeo de concentración de sólidos a conductividad, se utilizó el Modelo de Perry y Chilton, mostrada en la ecuación (28), esta relaciona la conductividad líquida y sólida de una mezcla. Es importante destacar que la conductividad de la mezcla se representa por σ_m , mientras que φ corresponde a la concentración de sólidos.

$$\sigma_m = \sigma_l \left(\frac{(2\sigma_l + \sigma_s - 2(\sigma_s - \sigma_l)\varphi)}{(2\sigma_l + \sigma_s - (\sigma_s - \sigma_l)\varphi)} \right) \quad (28)$$

En la figura 6.1 se aprecia el perfil de concentración en los 3 instantes de tiempo. Por otro lado en 6.2 se ve el resultado de mapear la concentración a conductividad.

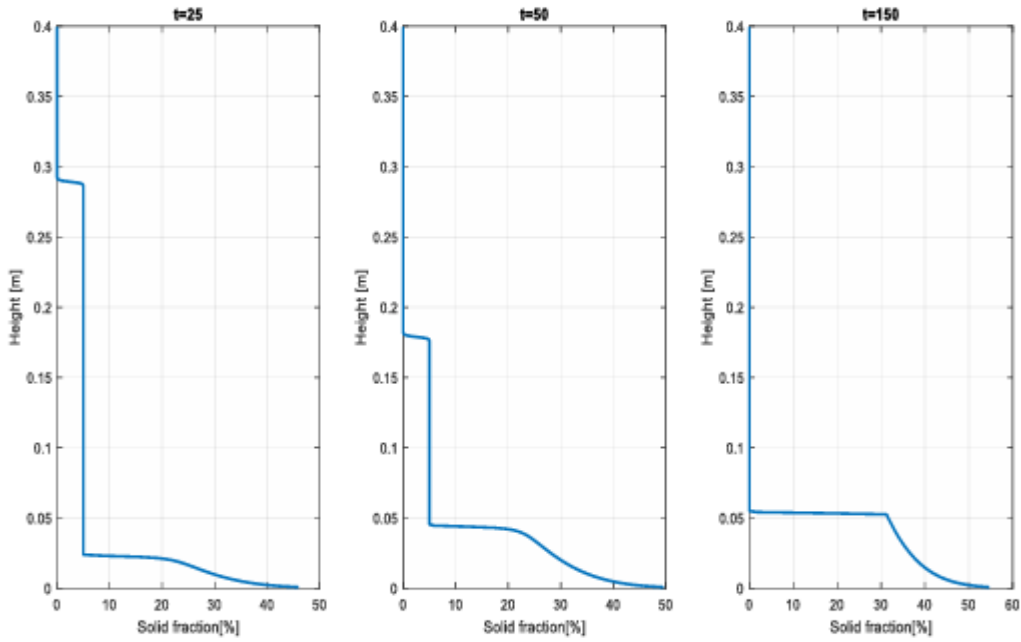


Fig. 6.1 Height vs concentración de sólidos

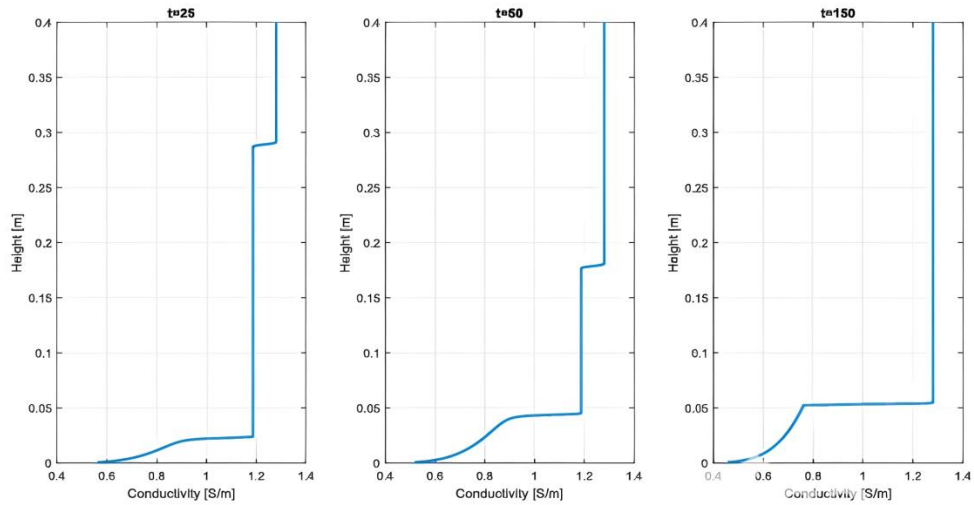


Fig. 6.2 Height vs conductividad en el tiempo

En la figura 6.1 se muestra la concentración de sólidos en función del tiempo, mientras que en la figura 6.2 se presenta la evolución de la conductividad a lo largo del tiempo. En esta última, se pueden distinguir claramente las tres fases del proceso de sedimentación: agua clara, sedimentación y compactación.

A los 25 segundos de sedimentación, aproximadamente 0.3 metros de altura corresponden a la fase de agua clara, una zona sin fracción de sólidos pero con una buena conductividad. Durante este periodo, la fase de sedimentación es la más predominante, caracterizada por la presencia de una solución sólido-líquido.

La fase de compactación aparece como la última fase observada en este momento, destacándose por una alta concentración de sólidos que aumenta debido a la compactación de partículas.

A los 50 segundos, se observa un patrón similar, aunque la fase de agua clara comienza a aumentar, mientras que la fase de sedimentación disminuye, ya que las partículas sólidas en la solución se están separando.

Finalmente, al llegar a los 150 segundos, solo se observan las fases de agua clara y compactación, lo que indica una separación completa de las partículas sólidas del líquido.

6.3. Modelos finitos

Como se mencionó anteriormente se generaron dos modelos que sirven para reconstruir el comportamiento de la conductividad a lo largo de diferentes tiempos de sedimentación, abordando el problema directo y para la reconstrucción de la distribución de conductividad mediante el uso de diversos parámetros, tratando el problema inverso.

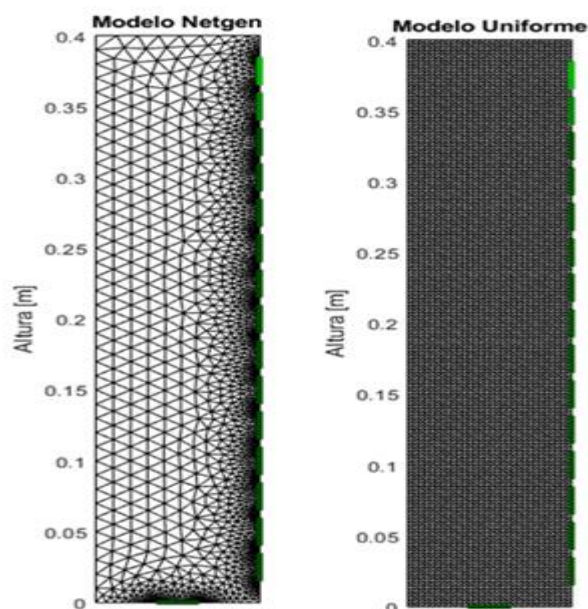


Fig. 6.3 Modelos utilizados

En la figura 6.3 se muestran los 2 modelos utilizados en este trabajo, el generado mediante Netgen y el generado manualmente. El propósito de generar diferentes modelos, es conocer el comportamiento de la conductividad en los diferentes tiempos de la sedimentación. Estos comportamientos de la conductividad ayudaran al conocer el comportamiento de los voltajes simulados para reconstruir la distribución de la conductividad en los tiempos mencionados.

En las figuras 6.4 y 6.5 se ilustran la variación de la conductividad del sólido en distintos momentos del proceso. Esta conductividad se representa mediante una escala de colores ubicada junto a cada mallado.

Como se observa en la figura, la conductividad sigue un patrón de asentamiento a medida que transcurre el tiempo, lo cual está directamente relacionado con el proceso de sedimentación y la posterior compactación del material.

Otro aspecto relevante es que, a mayor altura, la conductividad tiende a ser más elevada, lo que se debe a una menor concentración de sólidos en esa región.

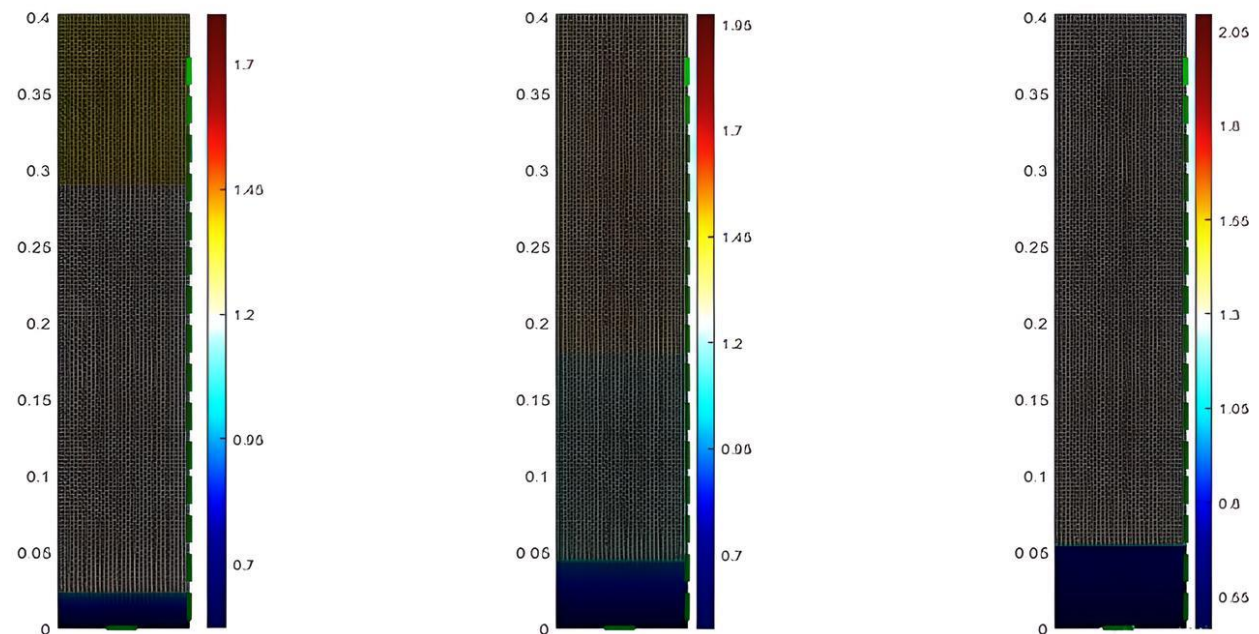


Fig. 6.4 Conductividades de Sedimentación modelo malla uniforme en diferentes tiempos

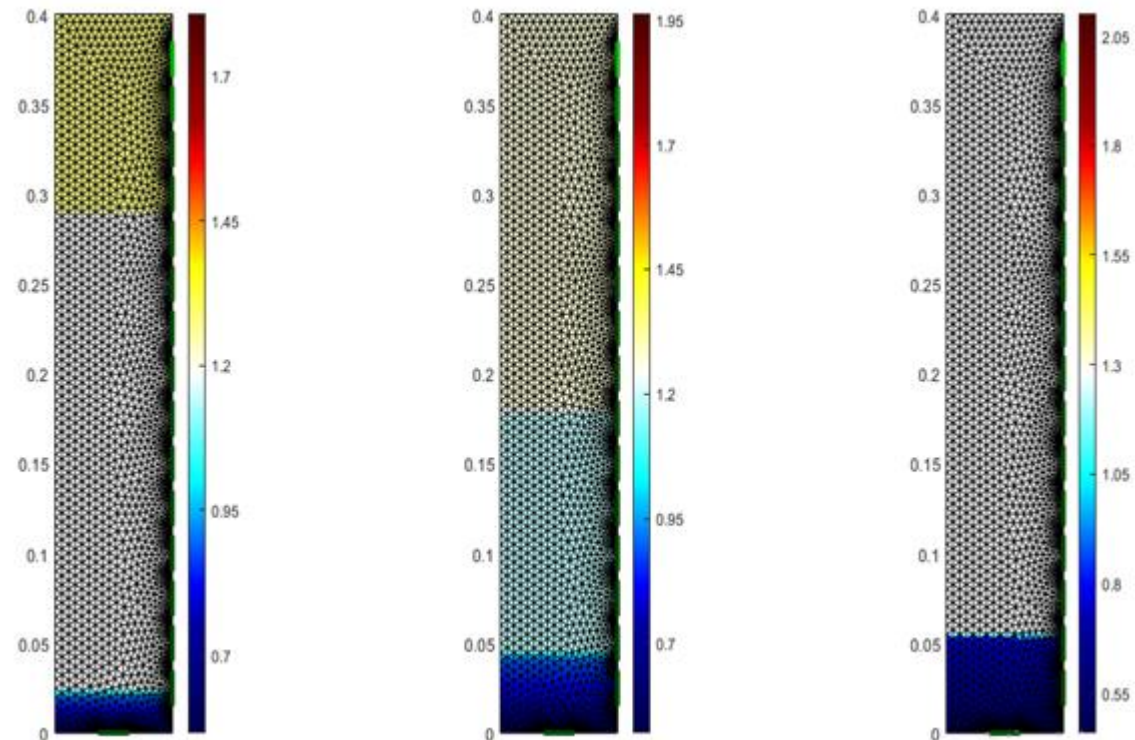


Fig. 6.5 Conductividades de Sedimentación modelo Netgen en diferentes tiempos.

6.4. Reconstrucción de Conductividad en 2D con GN y Rec-Laplace

En las figuras 6.6 y 6.7, se muestra las variaciones de conductividad en diferentes tiempos durante el proceso de sedimentación, usando el método de regularización de Laplace en ambos modelos en donde para tener la mejor reconstrucción se evaluaron distintos valores del Hiperparametro dentro de un rango que va desde 10^{-6} hasta 10^{-2} . El propósito de este ajuste es determinar el valor óptimo que permita obtener una reconstrucción de imagen con alta fidelidad, minimizando el error y conservando los detalles relevantes de la distribución de conductividad.

Para evaluar la calidad de la reconstrucción, se utilizó el Error cuadrático medio (RMSE), ya que permite cuantificar la diferencia entre los valores reconstruidos y los datos de referencia. Un RMSE bajo indica una mejor aproximación a la distribución real de conductividad.

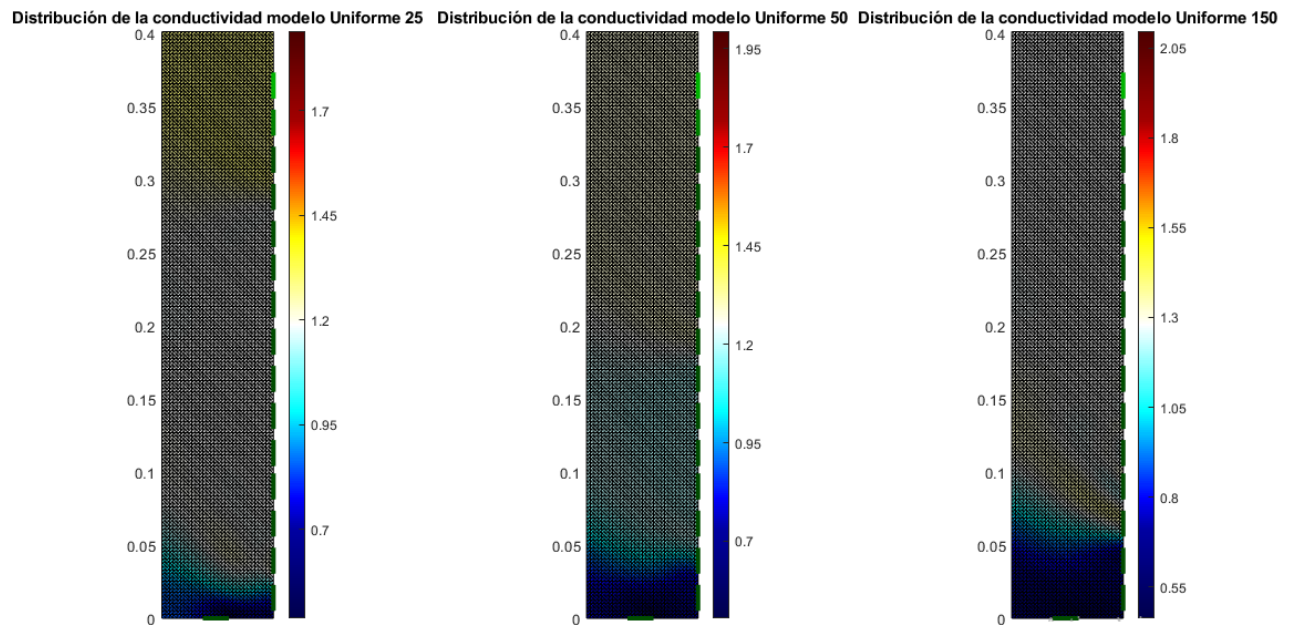


Fig. 6.6. Reconstrucción de distribución de conductividad con Laplace modelo uniforme

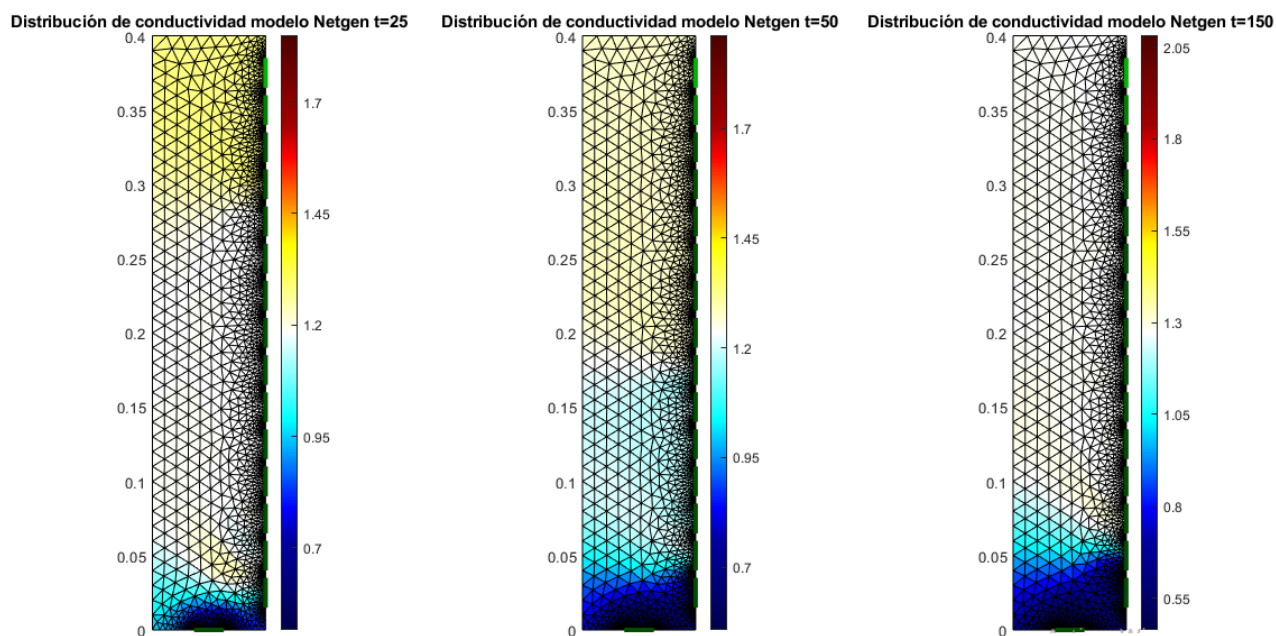


Fig. 6.7. Reconstrucción de distribución de conductividad con Laplace modelo Netgen

6.5. Mapeo de Conductividad

Para realizar el mapeo de conductividad en un plano 1D, se usan las reconstrucciones anteriormente enseñadas, estas reconstrucciones están en un plano 2D, y para poder hacer comparaciones se debe transformar estos datos a gráficos en 1D.

Al convertir los datos de un plano 2D a 1D se puede analizar cómo varía la conductividad con respecto al mapeo original mostrado en la Fig. 6.2. Una vez obtenidos los mapeos, se comparan los resultados de ambos modelos para determinar cuál ofrece el mapeo con mayor precisión en relación con el mapeo original. Los mapeos fueron generados optimizando el valor de RMSE, utilizando el Hiperparametro y se presentan en las tablas 6.1, 6.2 y 6.3.

Tabla. 6.1 RMSE con Prior Laplace en los diferentes tiempos de sedimentación modelo Netgen

Hiperparametro	25 seg	50 seg	150 seg
10^{-6}	0,0107	0,0105	0,0169
10^{-5}	0,0102	0,0107	0,0173
10^{-4}	0,0116	0,012	0,0181
10^{-3}	0,0188	0,017	0,0243
10^{-2}	0,0542	0,044	0,0643

Tabla. 6.2 RMSE con Prior Laplace en los diferentes tiempos de sedimentación modelo uniforme

Hiperparametro	25 seg	50 seg	150 seg
10^{-6}	0,0105	0,0103	0,0145
10^{-5}	0,0111	0,0113	0,0168
10^{-4}	0,013	0,0126	0,0201
10^{-3}	0,0233	0,0208	0,0295
10^{-2}	0,0545	0,05	0,0721

Tabla. 6.3 RMSE con Prior Laplace los valores más bajos

Modelo	25 seg	50 seg	150 seg
Uniforme	0,0105	0,0103	0,0155
Netgen	0,0102	0,0105	0,0169

Con los valores RMSE obtenidos, se puede concluir que el modelo nuevo obtuvo en promedio un menor valor RMSE, obteniendo mejores resultados en los tiempos de sedimentación $t=50$ (s) y $t=150$ (s) siendo 1,9% y 8% superior al modelo Netgen respectivamente, para el caso de $t=25$ (s), el modelo de Netgen supera al nuevo modelo en 0,0003 lo que equivale a un del 2.85% mejor que el nuevo modelo.

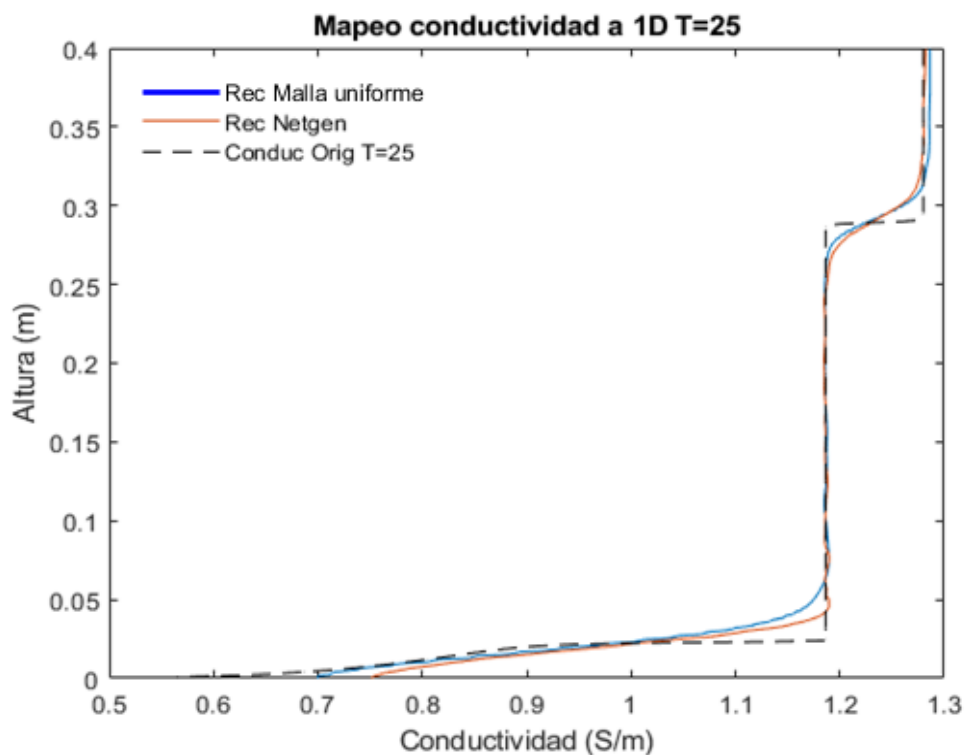


Fig. 6.8 Mapeo de conductividad 1D de ambos modelos en el tiempo 25 (s) de la sedimentación.

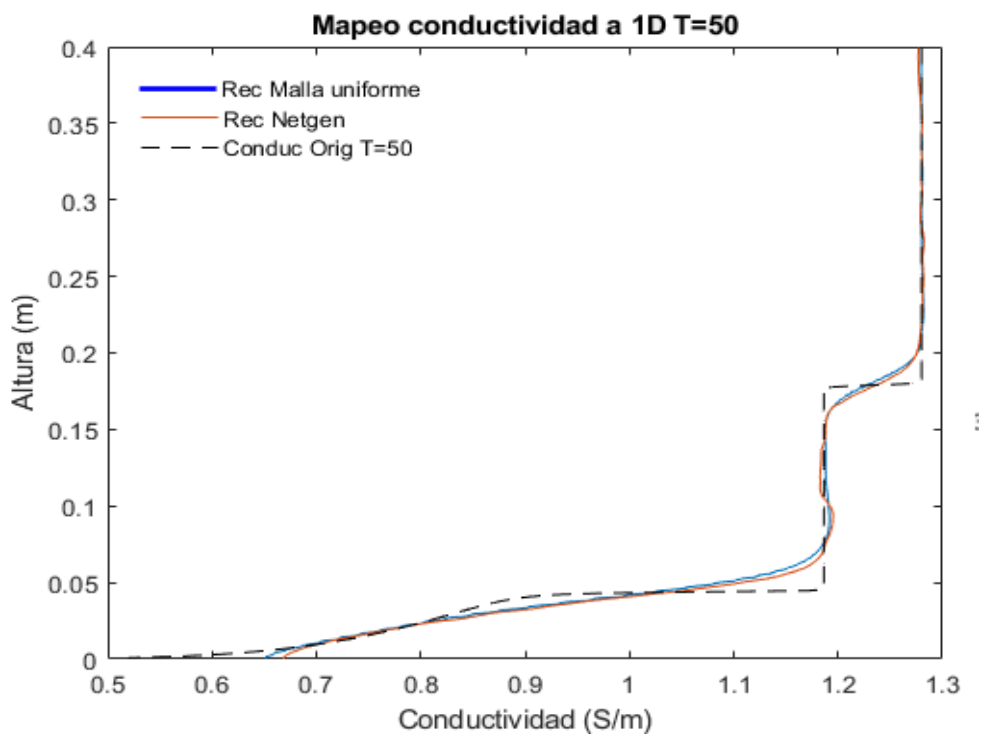


Fig. 6.9 Mapeo de conductividad 1D de ambos modelos en el tiempo 50 (s) de la sedimentación.

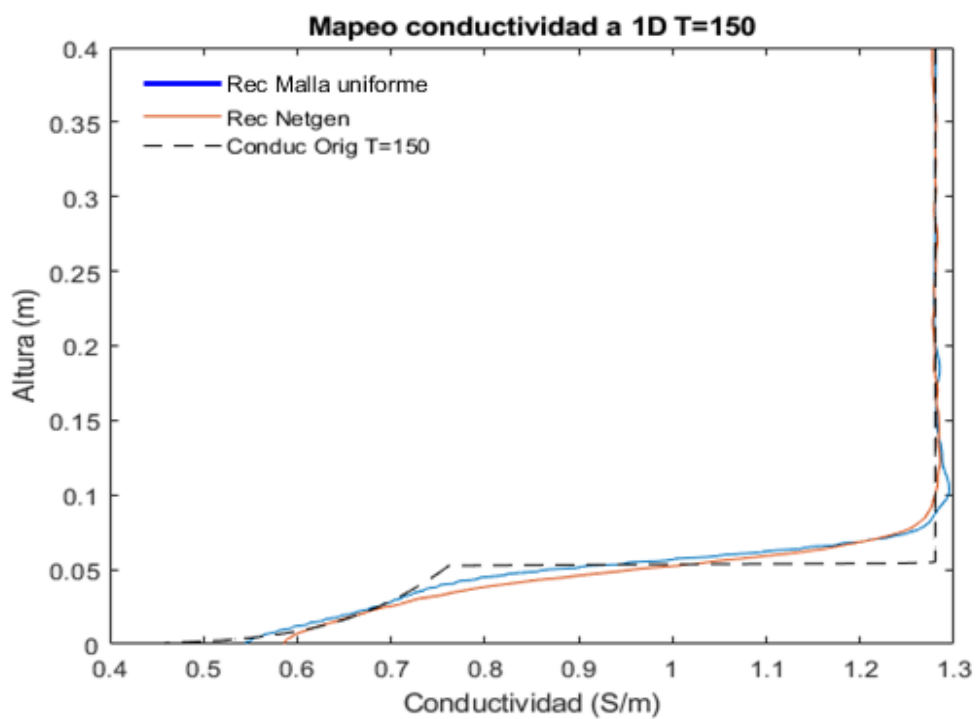


Fig. 6.10 Mapeo de conductividad 1D de ambos modelos en el tiempo 150 (s) de la sedimentación.

Como se puede observar en las figuras 6.8, 6.9 y 6.10, la conductividad tiende a oscilar debido a la sensibilidad de los electrodos, que son más sensibles en la zona en la que se encuentran (la posición de contorno). Sin embargo, la conductividad de las reconstrucciones es bastante similar a la conductividad original, especialmente en las zonas de clarificación y sedimentación. Las mayores discrepancias se presentan al pasar de la zona de compactación a la de sedimentación.

6.6. Mapeo de Concentración

Para obtener concentración de sólidos se procedió a trabajar de forma "inversa". Este proceso se realizó siguiendo una metodología similar a la anterior pero ahora se tomaron los datos de conductividad previamente mapeados y, utilizando los principios y ecuaciones del modelo de Perry and Chilton, esto con el fin de fue hacer una comparación detallada con el mapeo original de la concentración de sólidos, estas graficas se pueden ver en las figuras 6.11, 6.12 y 6.13 que se para cada uno de los casos (25 (s), 50 (s) y 150 (s)).

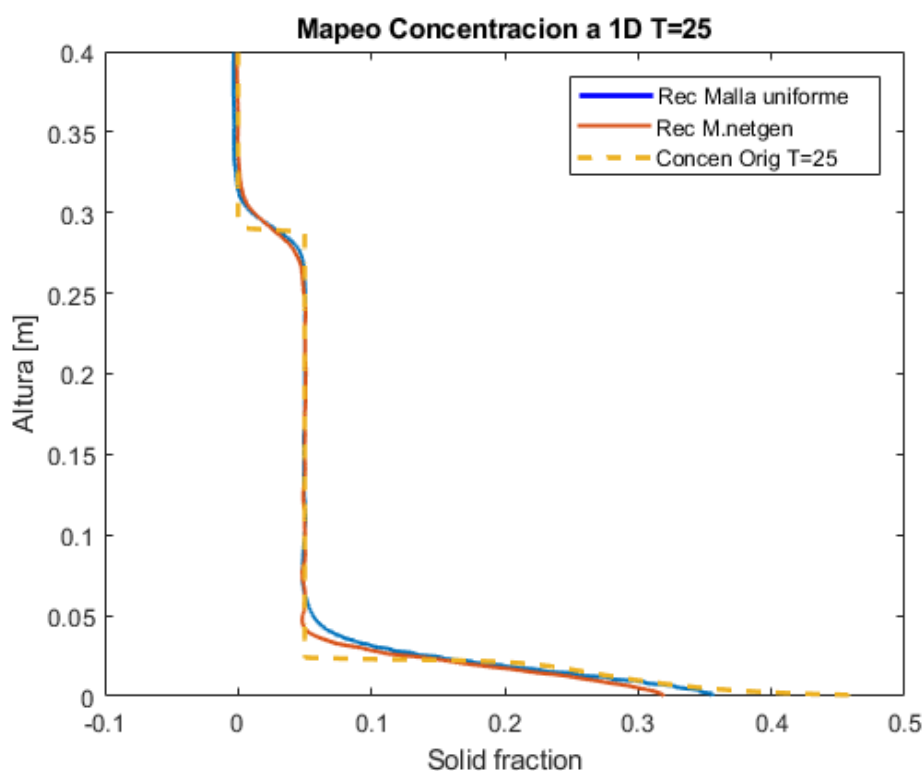


Fig. 6.11 Mapeo de concentración de sólidos en T=25 seg.

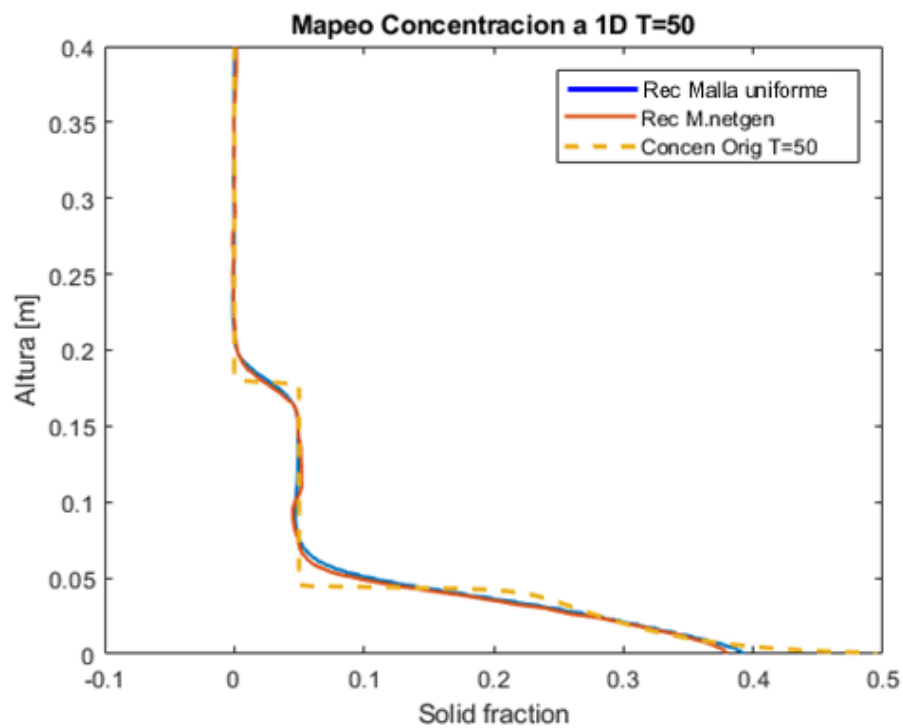


Fig. 6.12 Mapeo de concentración de sólidos en T=50 seg.

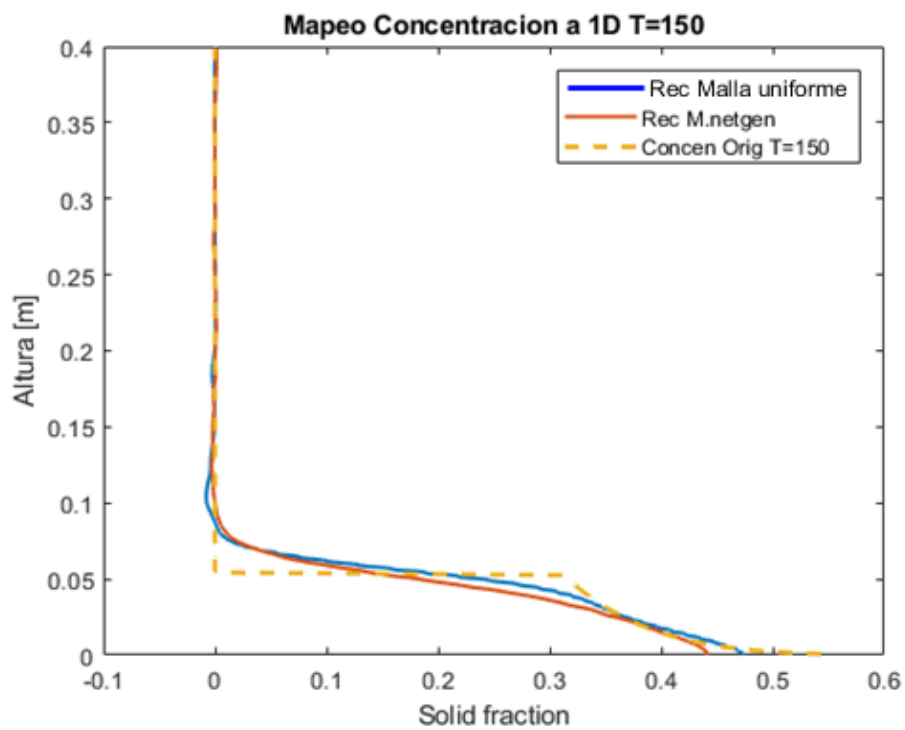


Fig. 6.13 Mapeo de concentración de sólidos en T=150 seg.

6.7. Optimización con restricciones

La optimización del problema se llevó a cabo utilizando la función `fmincon` en MATLAB, empleando los algoritmos SQP e Interior-Point. Estos algoritmos fueron seleccionados debido a su capacidad para manejar modelos con un gran número de elementos y restricciones, lo que los hace adecuado para la optimización del modelo de conductividad en este estudio.

Para evaluar el desempeño de la optimización, se implementaron tres métodos distintos, cada uno con configuraciones específicas orientadas a mejorar la precisión y eficiencia del proceso. Además, se realizó un análisis detallado sobre el efecto del tamaño del paso del gradiente, variándolo dentro de un rango de 1×10^{-1} hasta 1×10^{-7} . Este ajuste tuvo como propósito explorar valores superiores al predeterminado, con el fin de acelerar la convergencia, encontrar soluciones más óptimas y evaluar la estabilidad del algoritmo frente a diferentes configuraciones.

Los resultados obtenidos en cada método fueron comparados en términos de precisión con el objetivo de identificar la mejor estrategia de optimización para este problema.

6.7.1 Resultado 2D problema 1

Como se presentó en el capítulo 5 se optimizo directamente el modelo con 9600 elementos y usando las restricciones de igualdad y desigualdad, ya que esto podría proporcionar una mayor precisión. Sin embargo, el tiempo de cálculo por iteración resultó ser extremadamente largo, aproximadamente 50 minutos por cada una y esto se debió a que en cada iteración el gradiente debe calcular la derivada de cada elemento y dado que el número de iteraciones se fijó en 250 no es suficiente para que la conductividad de un buen resultado. Por esta razón, se determinó que este método no era viable para este proyecto y fue descartado. En la figura 6.14 se muestra el resultado de esta optimización.

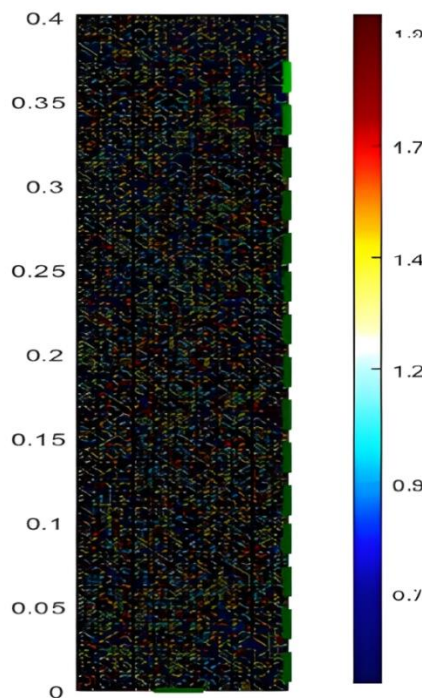


Fig. 6.14 Modelo optimizado mediante problema 1

En la figura 6.14 se puede ver claramente a través de una escala de colores como la distribución de la conductividad es distinta en cada elemento, lo que indica esto es que la optimización requiera una gran cantidad de tiempo para concretarse lo que no es viable para este caso.

6.7.2 Resultados 2D problema 2

Se utilizó el modelo reducido por filas con 160 elementos, aplicando un enfoque de optimización directa. Esta estrategia permitió reducir el tiempo de procesamiento, lo cual facilitó que la optimización se completara dentro del límite establecido de 250 iteraciones. Sin embargo, los resultados no fueron satisfactorios en términos de precisión. A pesar de que la optimización logró que los elementos dentro de cada fila tuvieran valores de conductividad idénticos tal como se estableció en las restricciones, la distribución general resultante se desvió considerablemente del patrón de conductividad esperado. Esta discrepancia se refleja en que las zonas de mayor y menor conductividad no corresponden a la distribución original simulada, lo que evidencia una reconstrucción incorrecta del perfil de concentración. En otras palabras, aunque se cumplió formalmente la condición de homogeneidad horizontal, la variación vertical no logró representar adecuadamente el fenómeno de sedimentación. Esto puede observarse claramente en la Figura 6.15, en contraste con la distribución de referencia mostrada en la Figura 6.4.

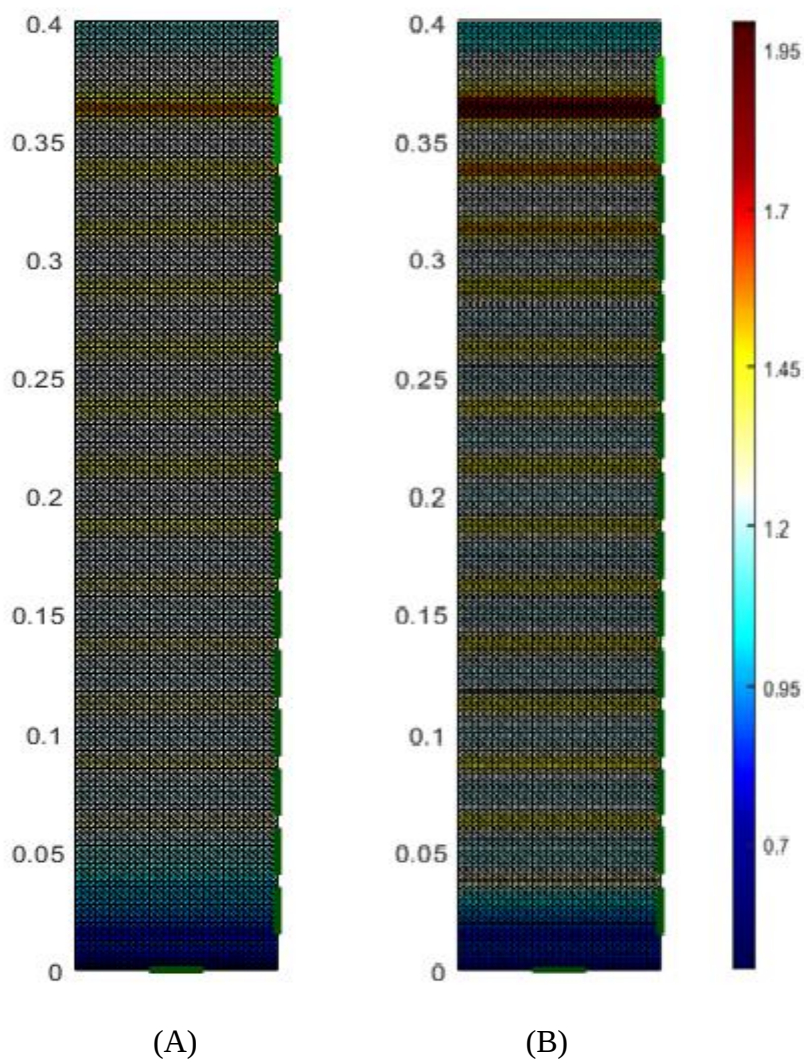


Fig. 6.15 Modelo optimizado mediante problema 2, Interior-Point (A) y SQP (B)

En la figura 6.15 se puede ver claramente a través de una escala de colores como la distribución de la conductividad es igual en todos los elementos por cada fila, el problema con esto es que no tiene una consistencia creciente como se mostró en los datos originales lo que esto provoca son inconsistencias al pasarlo a un mapeo en 1D como se verá más adelante.

6.7.3 Resultados 2D problema 3

Para este problema se mantuvo el mismo enfoque adoptado en el problema 2, consistente en la reducción del modelo original a una versión simplificada de 160 elementos, con el fin de disminuir el tiempo de procesamiento y facilitar la aplicación de técnicas de optimización. Sin embargo, en este caso se introdujo una modificación relevante en el conjunto de restricciones impuestas al modelo. Además de mantener la condición de no negatividad sobre los valores de conductividad, se incorporó una restricción adicional de monotonía creciente, la cual exige que los valores de conductividad aumenten progresivamente en dirección ascendente dentro del dominio. Esta condición refleja el comportamiento físico esperado en procesos de sedimentación, donde la concentración de sólidos, y por tanto la conductividad, tiende a incrementarse con la altura. La optimización concluyó de manera automática al alcanzar el límite máximo de 250 iteraciones definido en el algoritmo.

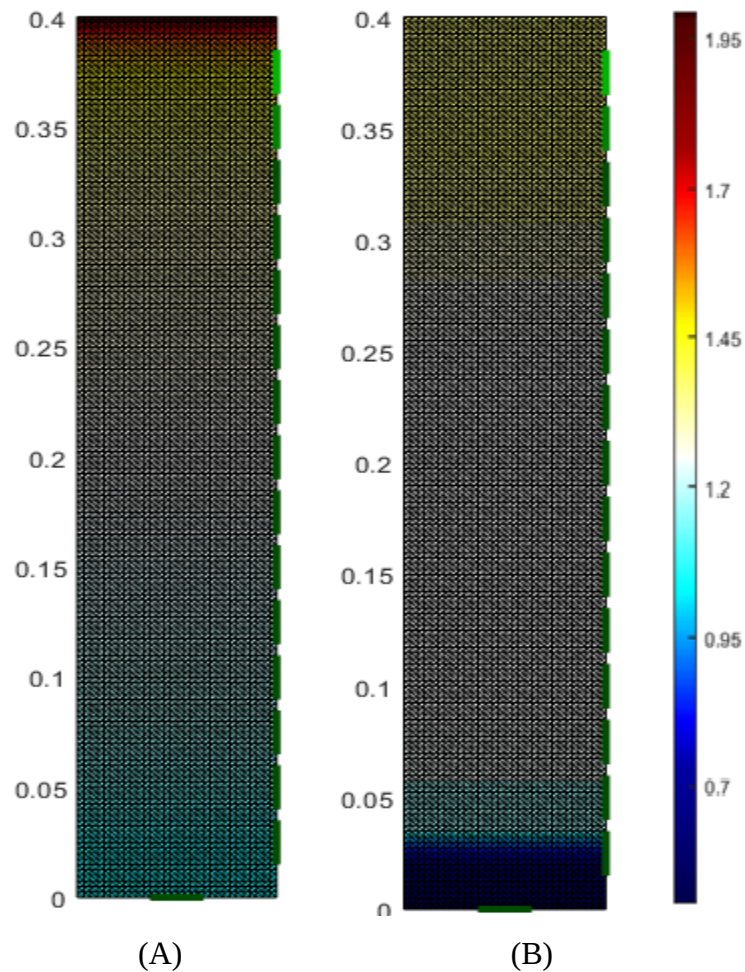


Fig. 6.16 Modelo optimizado mediante problema 3, SQP " $\nabla 1 \times 10^{-3}$ "(A) y SQP ($\nabla pred$)

En la figura 6.16 se muestra la reconstrucción final obtenida tras la aplicación del Problema 3. Esta se representa mediante una escala de colores que ilustra la distribución de la conductividad, la cual se mantuvo constante en todos los elementos de cada fila. Aunque no se alcanzó una exactitud total, los resultados obtenidos fueron más consistentes que en el problema anterior, tanto en la distribución como en la magnitud de los valores de conductividad.

6.7.4 Comparación de resultados en 1D

En las figuras 6.17, 6.18 y 6.19 se puede observar el mapeo de conductividad para los problemas 2 y 3 con los algoritmos utilizados, en donde el problema 2 arrojó resultados completamente distintos a los esperados tanto para el algoritmo SQP como Interior-Point, presentando muchas oscilaciones y sin una forma concreta. En cuanto a los resultados del problema 3, se puede apreciar una notable mejora en el mapeo de la conductividad ya que se puede apreciar como esta tiene una forma muy similar a la conductividad original, pues se logran distinguir fácilmente las fases de esta y cómo varía a lo largo del tiempo. De los dos algoritmos utilizados, el que ofrece mejores resultados fue el algoritmo “SQP”, ya que se asemeja bastante al resultado esperado, mostrando zonas que coinciden con la original y diferenciándose de ella únicamente cuando comienza una nueva fase, esto también se puede apreciar en la tabla 6.4 la cual muestra el error que existe entre los 2 algoritmos y los respectivos problemas con respecto al mapeo original. Por otro lado, el método “Interior-Point”, se aleja demasiado del resultado correcto lo que indica que para poder obtener resultados buenos sería necesario incrementar en gran medida el tiempo de optimización. En cuanto a los saltos del gradiente para la forma de la conductividad no hay mucha diferencia pero en cuanto al tiempo para optimizar si hay un gran cambio ya que al usar un valor de 1×10^{-3} el tiempo que se tarda en hacer las 250 iteraciones y llegar a un buen resultado es de aproximadamente 2.5 horas mientras que al usar el valor predeterminado el tiempo es de aproximadamente 5 horas.

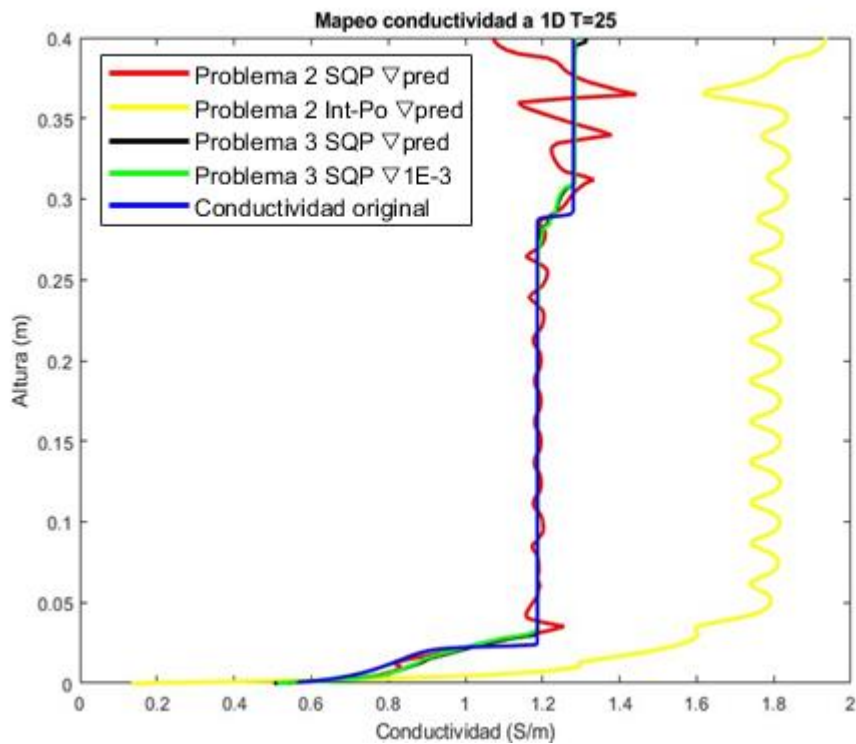


Fig. 6.17 Mapeo de conductividad en T=25 seg.

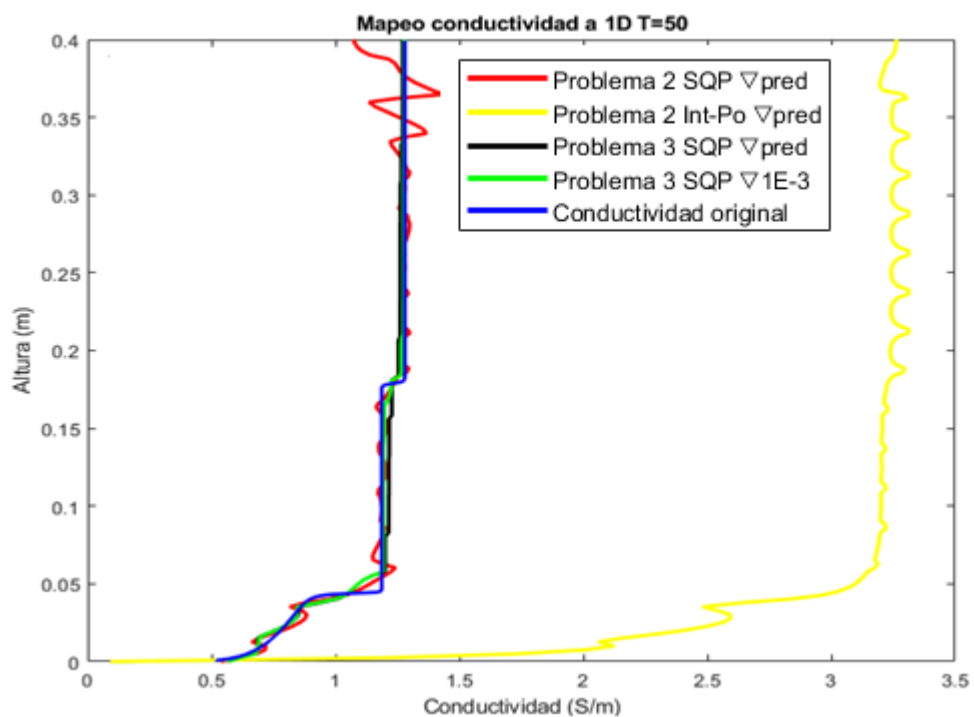


Fig. 6.18 Mapeo de conductividad en T=50 seg.

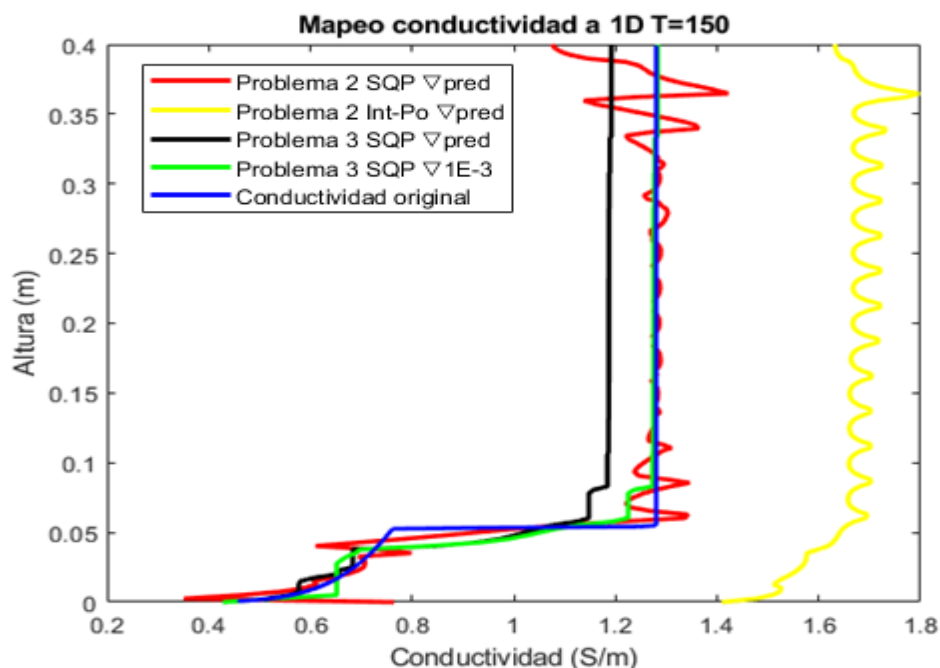


Fig. 6.19 Mapeo de conductividad en T=150 seg.

Tabla. 6.4 MAE en los problemas 2 y 3 con respecto al original en el mapeo de conductividad

Algoritmo	t=25 (s)	t=50 (s)	t=150 (s)
SQP Prob2 ∇ predet	0.2142	0.7309	0.3242
I-P Prob2 ∇ predet	0.5596	1.9496	0.3896
SQP Prob3 ∇ predet	0.01048	0.0736	0.0938
SQP Prob 3 $\nabla 1 \times 10^{-3}$	0.0087	0.0090	0.0683

6.7.5 Mapeos de concentración

Tras obtener el mapeo de conductividad, se procede a graficar el mapeo de concentración con base en los resultados previamente presentados. Se toma solamente la concentración correspondiente al tercer problema, utilizando el algoritmo SQP con un paso de 1×10^{-3} , debido a que, al calcular el error absoluto como se muestra en la tabla 6.4, este algoritmo aplicado al problema 3 fue el que arrojó los mejores resultados.

Como se aprecia en las figuras 6.20, 6.21 y 6.22, la distribución de sólidos a lo largo del tiempo se mantiene consistente y dentro de los márgenes esperados. En las mismas figuras se incluye también la gráfica de concentración obtenida mediante el algoritmo de Gauss-Newton. Se observa que la distribución tiende a ser irregular en algunas zonas para ambos algoritmos, con variaciones moderadas a lo largo de la altura de la columna.

Sin embargo, en la gráfica obtenida mediante optimización con SQP, se presenta menos ruido y un menor error medio absoluto (MAE), como puede apreciarse en la tabla 6.5 siendo en promedio un 10% mejor. Por lo tanto, al comparar ambas concentraciones, se concluye que tanto el problema 3 como el algoritmo SQP resultaron efectivos para la reconstrucción.

Tabla. 6.5 MAE para ambos algoritmos con respecto al original en el mapeo de concentración

Algoritmo	t=25 (s)	t=50 (s)	t=150 (s)
SQP	0.0070	0.0079	0.0101
GN	0.0079	0.0083	0.0118

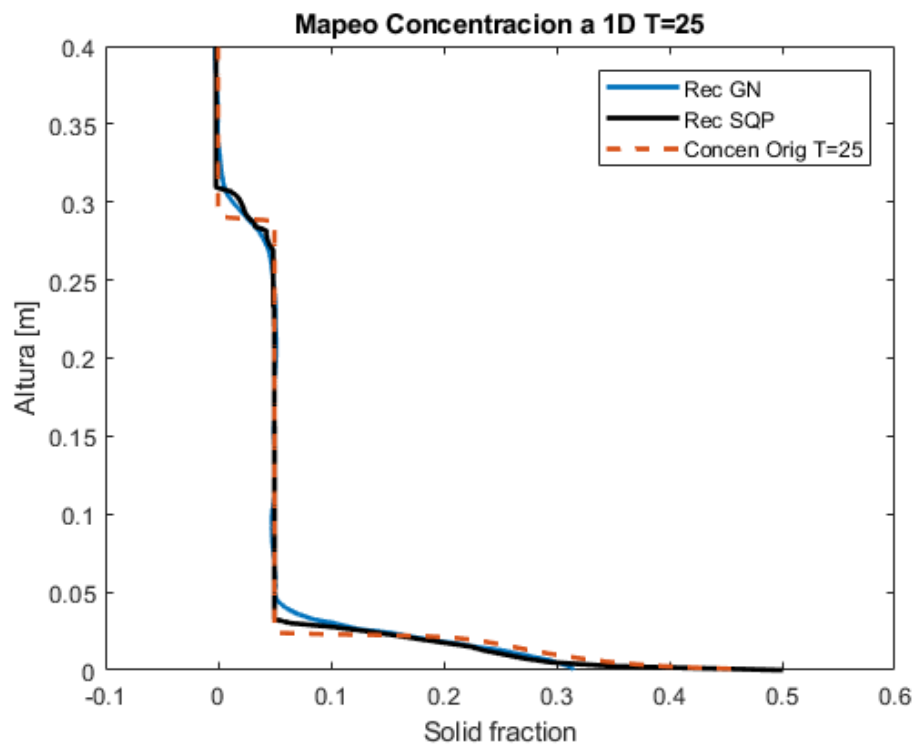


Fig. 6.20 Mapeo de concentración de sólidos en T=25 seg.

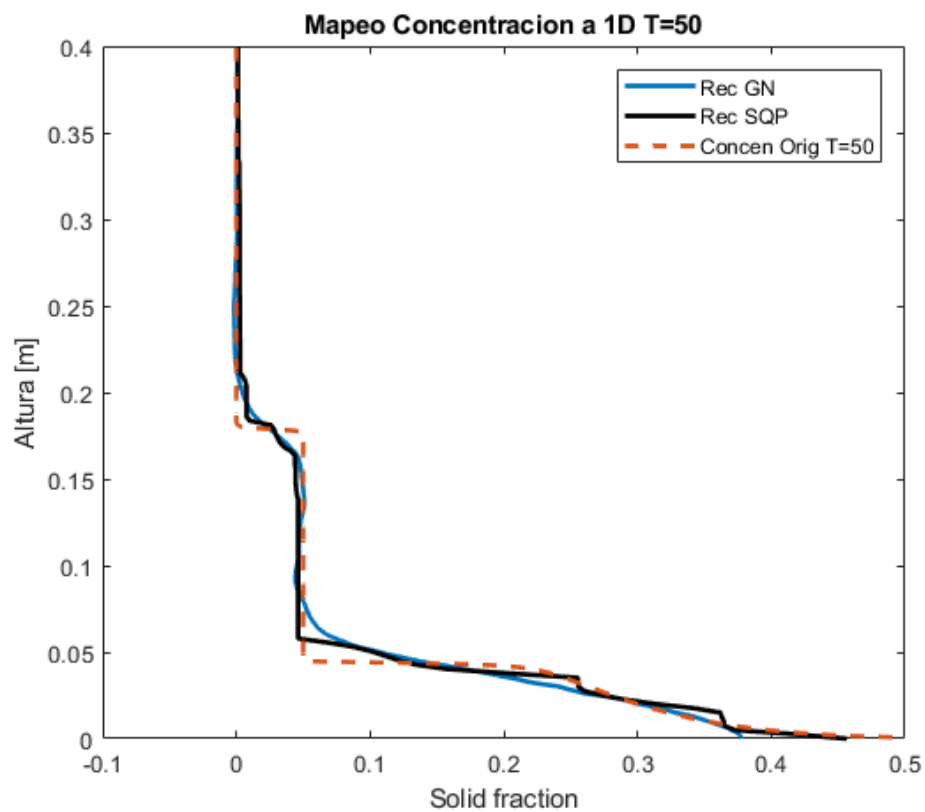


Fig. 6.21 Mapeo de concentración de sólidos en T=50 seg.

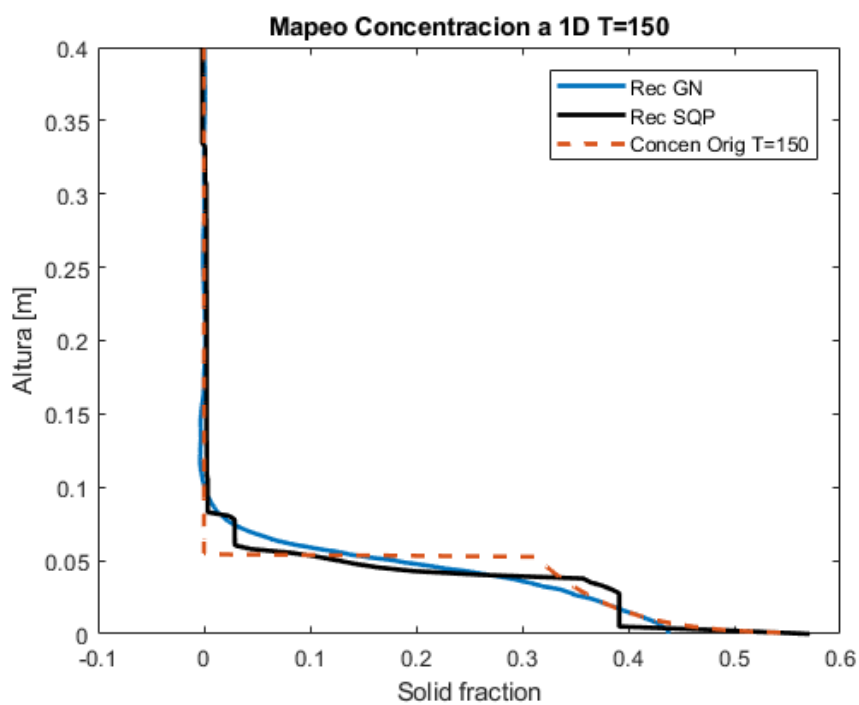


Fig. 6.22 Mapeo de concentración de sólidos en T=150 seg.

Capítulo 7. Conclusiones

7.1. Sumario

Este trabajo presenta el desarrollo de un modelo de EIT enfocado en la determinación de concentración de sólidos en sedimentación. Para ello, se han utilizado herramientas de simulación en MATLAB y el paquete EIDORS, permitiendo la generación de mallas, la colocación de electrodos y la resolución de los problemas directo e inverso.

En la metodología implementada, se ha diseñado una malla estructurada que incorpora electrodos distribuidos según lo establecido en el capítulo 4. Se ha llevado a cabo la resolución del problema directo, analizando la respuesta del sistema a diferentes condiciones durante la sedimentación. Posteriormente, se ha abordado la resolución del problema inverso mediante la función de optimización `Fmincon`, integrando 3 problemas de optimización con distintas restricciones para mejorar la estabilidad de la solución.

Además, el estudio ha considerado los efectos de las restricciones y su impacto en la precisión de los resultados obtenidos. Se han realizado pruebas con distintas configuraciones de algoritmos de reconstrucción como de saltos del gradiente lo que hacía variar en gran manera los datos medidos.

7.2. Conclusiones

El modelo uniforme permitió implementar un control más estricto sobre la distribución de los elementos, en contraste con la malla generada automáticamente mediante Netgen. En este modelo, fue posible imponer condiciones de igualdad entre elementos de cada fila, reduciendo así la cantidad de variables.

El uso de `fmincon` demostró ser efectivo para la optimización en EIT, permitiendo abordar distintos tipos de problemas según las necesidades específicas. Se utilizaron tres enfoques distintos de optimización. En el problema 1, se obtuvo que el método requería un tiempo de cómputo excesivamente alto (más de 50 minutos por iteración) para lograr una optimización adecuada, para el caso del problema 2, se observó una mejora respecto al problema anterior, ya que sí se obtuvieron resultados cercanos a los esperados. Sin embargo, al eliminar una de las restricciones, la optimización consideró más variables de las necesarias, lo que afectó negativamente el valor final, finalmente en el problema 3, se logró una buena resolución. A pesar de mantener la misma estructura que en el problema 2, la incorporación de una restricción adicional acotó mejor el espacio de búsqueda de la función objetivo, lo que condujo a una optimización más precisa.

En cuanto a los algoritmos evaluados, el método SQP fue el más efectivo bajo los criterios establecidos en las simulaciones, tal como se evidencia en las Figuras 6.17, 6.18 y 6.19, y en la Tabla 6.4. Además, se identificó que el tamaño del salto del gradiente es un parámetro clave ya que al aumentarlo, tuvo un impacto significativo en el rendimiento computacional del proceso de optimización. En términos concretos, el tiempo total requerido para completar la optimización se redujo considerablemente. Mientras que, utilizando el valor predeterminado del salto del gradiente, el proceso podía extenderse hasta aproximadamente 5 horas, al emplear un salto de 1×10^{-3} , el tiempo se redujo a solo 2.5 horas, lo que representa una mejora del doble en eficiencia. Si bien es cierto que utilizar un salto más pequeño podría entregar resultados más precisos, también implica un mayor número de iteraciones, lo que conlleva un incremento significativo en el costo computacional.

El algoritmo Interior-Point, si bien no fue el más adecuado para los criterios utilizados en este estudio, mostró una buena estabilidad. Con una configuración diferente (como un mayor número de iteraciones), podría ser útil en otros tipos de problemas con características distintas.

Finalmente, al analizar el mapeo y calcular el error entre los métodos SQP y Gauss-Newton, se observó una mejora promedio del 10 % a favor de SQP, especialmente notoria en el instante de

150 segundos, según lo mostrado en la Tabla 6.5 y en las figura 6.20, 6.21 y 6.22. Estos resultados evidencian la relevancia de una adecuada configuración de los parámetros de optimización (como tolerancias, número máximo de iteraciones y tamaño del paso del gradiente) para lograr una buena reconstrucción.

7.3. Trabajos futuros

Diseñar y realizar experimentos de laboratorio controlados para validar los resultados obtenidos en las simulaciones, utilizando un sistema físico real de sedimentación. Estos experimentos permitirán comparar los perfiles de conductividad estimados mediante EIT con mediciones físicas directas, brindando una validación empírica que respaldará los modelos numéricos y mejorará la confiabilidad de los métodos de optimización utilizados.

También se podrían incorporar técnicas de inteligencia artificial, como el aprendizaje automático o el aprendizaje profundo, para optimizar la reconstrucción de imágenes y la estimación de parámetros en condiciones más complejas o ruidosas.

Bibliografía

- [1] S. Valenzuela, “Evaluación de posición de electrodos para determinar el perfil de concentración durante sedimentación.”. Informe de Introducción a la Habilitación Profesional, Universidad Católica de la Santísima Concepción, 2024.
- [2] E. Carrasco, “Obtención de perfil de concentración de sólidos en sedimentación mediante tomografía de impedancia eléctrica,” Tesis de grado Universidad Católica de la Santísima Concepción, Concepción, 2024.
- [3] F. M. N. Fernando and M. M. Alejandro, “Análisis de algoritmos de reconstrucción de imágenes EIT en el diagnóstico de la EPOC”. Memoria de Titulo, Universidad. Del Cauca, Popayán, 2018.
- [4] S. Vergara, “Estimación de características de baja dimensionalidad utilizando tomografía de impedancia eléctrica.”. Programa de Doctorado Universidad de Concepción, 2019.
- [5] Sathyanarayan Rao (2025). Electrical Impedance Tomography Image Reconstruction using MATLAB based freeware EIDORS (<https://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/59263-electrical-impedance-tomography-image-reconstruction-using-matlab-based-freeware-eidors>), MATLAB Central File Exchange. Abril, 2025
- [6] J. Carreño, “Detección y seguimiento de interfaces tipo fluido-Sedimento”. Memoria de título Ingeniería Civil Mecánica, Santiago de Chile, 2014.
- [7] O.-P. Tossavainen, M. Vauhkonen, V. Kolehmainen, and K. Youn Kim, “Tracking of moving interfaces in Sedimentation processes using electrical Impedance Tomography,” Chem. Eng. Sci., vol. 61, no. 23, pp. 7717–7729, Dec. 2006.
- [8] M. Manrique, A. Cornejo. “Caracterización geoquímica y mineralógica de relaves mineros La Ciénaga – La Libertad”, Ingemet, Boletín serie B, N°78, p. 147, Lima, 2022
- [9] J. Cullivan, M. Wang, G. Bolton, G. Baker, W. Clark, and R. Williams, “Linear EIT for Sedimentation and Sediment Bed Characterization”. vol. 9, n° 3, pp. 910-915, 2006
- [10] L. Salas, “Tratamiento cero descargas líquidas de agua de relave con valorización de sólidos y salmuera”, Tesis-Memoria de Titulo, Univ. Concepción, Chile, 2022.

- [11] V.Maldonado Yactayo, "Operaciones Unitarias II (INQ-3450)", cap. 7, Universidad Autónoma de Santo Domingo, República Dominicana, 2020.
- [12] M. Lera Modino, "Estudio de la transición entre la sedimentación zonal y floculada mediante la aplicación de técnicas de análisis de imagen", Trabajo Fin de Máster, Univ. Pontificia de Valencia, España, sept. 2021.