UNIVERSIDAD CATÓLICA DE LA SANTÍSIMA CONCEPCIÓN
FACULTAD DE EDUCACIÓN – FACULTAD DE INGENIERÍA
MAGÍSTER EN DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA

EXPLORANDO EL SIGNIFICADO INTUITIVO Y CLÁSICO DE LA PROBABILIDAD EN ESTUDIANTES DE SÉPTIMO Y OCTAVO AÑO BÁSICO

POR: SERGIO ARTURO TAPIA MUÑOZ

DIRECTOR DE TESIS: DR. HUGO ALVARADO MARTÍNEZ

TESIS PARA OPTAR AL GRADO DE
MAGÍSTER EN DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA

CONCEPCIÓN, DICIEMBRE DE 2018

AGRADECIMIENTOS

Quiero expresar mi agradecimiento a Dios, por brindarme la oportunidad de culminar este hermoso, pero intenso proceso.

A mis padres y hermano, por el apoyo y ayuda incondicional en todo momento.

A Dr. Hugo Alvarado, por toda su preocupación, paciencia, motivación y sobretodo el ánimo que me brindaba en cada una de las sesiones, y a pesar de todo jamás perder la fe y confianza en este proyecto.

A Francisca, por ayudarme y animarme en todo momento.

INDICE

TABLAS

FIGURAS

RESUMEN

El Ministerio de Educación Chileno (MINEDUC) ha implementado objetivos en probabilidades desde el primer año de enseñanza básica, para así otorgar a los estudiantes los conocimientos necesarios que les permitan ser personas capaces de enfrentar situaciones de incertidumbres y cotidianas. Se hace necesario indagar sobre los conocimientos que poseen los estudiantes en el área de las probabilidades y sus implicancias en el contexto educativo.
En este trabajo se analizan las intuiciones y heurísticas sobre la probabilidad en 331 estudiantes de primaria, por medio de un cuestionario de 19 ítems en donde se examinan las argumentaciones en cuatro ítems. Los resultados muestran una alta variación en la intuición probabilística en situaciones cotidianas y la existencia de intuiciones correctas e incorrectas de los estudiantes. Consideramos pertinente para la enseñanza de la probabilidad en este nivel profundizar en un acercamiento a la comprensión de experiencias de incertidumbre mediante la estimación de valores de probabilidad como grado de creencia personal.

ABSTRACT

The Education Ministry of Chile has incorporated probability objectives for the first year of primary school. For this reason give the student the necessary knowledge for they can be able to face situation about uncertainty and every day. Is important search about the knowledge of the student in the probabilities area, to check verify if that the State says it is fulfilled.
In this paper probabilistic intuitions and heuristics are analyzed in 331 elementary school students by through a questionnaire with nineteen closed items and the arguments in four item are examined. The results show a high variation in the assignation f the probabilities in daily situation and the existence of correct and incorrect intuitions by the student. It is relevant to teach probabilities in this level to deepen into approaching the comprehension of uncertain experiences about and estimating the probability as a degree of personal belief.

INTRODUCCIÓN

El currículum nacional chileno, mediante la reforma educacional del año 2012, ha dividido los contenidos en cinco ejes temáticos, de las cuales uno de ellos es datos y tratamientos de la información (Mineduc 2012) se pone énfasis en la enseñanza de la probabilidad que comienza en los primeros años del estudiante. Los textos escolares utilizados por los estudiantes en el colegio son fundamentales en este proceso, ya que son el apoyo y práctica de los alumnos, pero es necesario detenerse y analizar qué contenidos tienen, cuál es el foco de la enseñanza que se quiere entregar, cuán profunda es, teniendo como fin orientar al profesor en el proceso de enseñanza.

Al momento de estudiar los conocimientos que se tienen en probabilidades es una instancia para analizar las dificultades de comprensión del razonamiento probabilístico, en este caso, como los estudiantes toman decisiones y reflexionan a partir de situaciones de juegos o reales.

Es importante considerar que los conocimientos de los profesores en el ámbito de la probabilidad no han sido los esperados (Mohamed, 2012) al analizar los resultados de las encuestas arrojan bajos niveles de comprensión y aplicación en el ámbito probabilístico. El profesor que enseña probabilidades debe conocer y dominar el contenido, sin embargo, las investigaciones señalan que estos conocimientos no son los suficientemente altos, siendo las instituciones superiores las encargadas de formar a los profesores y no entregar las herramientas necesarias en el proceso de formación de los futuros docentes. En el contexto chileno los resultados tampoco son alentadores, según Vásquez (2017) las universidades que son las encargadas de formar a los profesores no poseen una malla curricular que se pueda entregar los conocimientos didácticos y probabilísticos, debido que es muy baja la cantidad de asignaturas impartidas en las casas de estudios que se relacionen con los conceptos que en esta investigación se darán a conocer.

Una dimensión de indagación en educación estadística es estudiar las dificultades de comprensión en el razonamiento probabilístico; en particular, investigar cómo las personas hacen juicios y toman decisiones cuando se enfrentan a situaciones de incertidumbre (Garfield y Ben-Zvi, 2008).

La enseñanza de la probabilidad en la etapa escolar generalmente no se atiende a las ideas informales y creencias que tienen los alumnos sobre las probabilidades (Kahneman y Tversky, 1972). Más aún, aunque utilizamos nociones probabilísticas informales a diario para tomar decisiones, la investigación sobre probabilidad se ha centrado principalmente en los significados clásico y frecuentista (Alvarado, Estrella, Retamal y Galindo, 2018).

Aun cuando se reconoce que la intuición se basa en las propias creencias epistemológicas, las cuales predisponen a los estudiantes a aceptar o no la incertidumbre (Fulmer, 2014), escasa es la atención del papel de las intuiciones en la comprensión de la probabilidad en estudiantes de educación básica. Esta falta de atención contradice el papel potencialmente influyente del significado intuitivo de la probabilidad en la construcción del conocimiento probabilístico desde temprana edad.

En este trabajo se evalúan las intuiciones y heurísticas sobre la probabilidad que atribuyen un grupo de estudiantes de primaria (12 y 13 años) en situaciones de incertidumbre, analizando las respuestas entregadas a un cuestionario de once ítems y se analizan las soluciones de cuatro ítems abiertos.

Esta investigación se estructura, considerando los siguientes capítulos:

El capítulo I comienza con el planteamiento del problema de investigación, señalando el contexto curricular del estudio, la formación de profesores en probabilidad, importancia que tienen los textos de estudio de la educación básica y enfatizando el problema acerca de la comprensión de los significados de la probabilidad elemental, propósito de estudio de esta investigación.

En el capítulo II se presentan los fundamentos teóricos del "Enfoque Ontosemiótico del conocimiento" acerca de la comprensión y competencia de los conceptos de probabilidad, de los significados institucional y personal del objeto de estudio de probabilidad y de los conflictos semióticos. A continuación, se clasifica por ciclo el razonamiento probabilístico en los estudiantes, el conocimiento del profesor para enseñar probabilidad y la importancia de las actitudes hacia la probabilidad y su enseñanza.

En el capítulo III se describe la metodología de investigación propuesta, la muestra de estudios y se da a conocer las características de ésta. Además, se presenta la construcción del cuestionario de conocimientos de la probabilidad.

En el capítulo IV se presentan los análisis de los datos obtenidos en la investigación, mediante los resultados de probabilidad clásica y problemas abiertos de probabilidad formal.

En el capítulo V se presentan las conclusiones de cada uno de los objetivos propuestos para esta investigación.

CAPÍTULO 1
PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

1.1 LA PROBABILIDAD EN EL CURRÍCULUM DE EDUCACIÓN BÁSICA

1.1.1 ORIENTACIONES CURRICULARES EN CHILE

Las orientaciones curriculares que presenta Chile en el área de la estadística está determinada por las bases curriculares (MINEDUC, 2012) y éstas fueron modificadas en la reforma educacional, siendo dividida en cuatro ejes temáticos: números y operaciones, patrones y álgebra, geometría y medición, probabilidad y estadística.

El currículo chileno promueve iniciar el estudio de las probabilidades a temprana edad, de manera continua, en favor del desarrollo en el pensamiento estadístico y probabilístico, frente a situaciones de incertidumbre en contextos cotidianos.

Al revisar el currículo nacional, específicamente en el eje de probabilidad y estadística, podemos ver los objetivos de aprendizaje con sus respectivos indicadores de evaluación según sea el nivel escolar, y pueden ser vistos en el siguiente recuadro.

Tabla 1. Contenidos relacionados con la probabilidad de 1º básico a 8º básico (Mineduc, 2012)

Nivel	Objetivo de aprendizaje	Indicadores de evaluación sugeridos.
1º básico	Recolectar y registrar datos para responder preguntas estadísticas sobre sí mismo y el entorno, usando bloques, tablas de conteo y pictogramas.	Recolectan datos acerca de situaciones sobre sí mismo y del entorno. Formulan preguntas sobre sí mismo y los demás que pueden ser respondidas a partir de recolección de información. Registran datos, usando bloques y tablas de conteo. Recolectan y organizan datos, usando material concreto, registros informales y tablas de conteo. Responden preguntas, utilizando la información recolectada.
		Recolectan datos acerca de lanzamientos de dados y monedas. Registran datos en una tabla de conteo

2º básico	Recolectar y registrar datos para responder preguntas estadísticas sobre juegos con monedas y dados, usando bloques y tablas de conteo y pictogramas. Registrar en tablas y gráficos de barra simple, resultados de juegos aleatorios con dados y monedas.	acerca de datos de lanzamientos de monedas y dados. Registran datos acerca de lanzamientos de dados y monedas, usando cubos apilables. Responden preguntas en el contexto de juegos con monedas, usando registros expresados en cubos apilables. Registran resultados de juegos aleatorios con dados y monedas en tablas. Registran resultados de juegos aleatorios con dados y monedas en gráficos de barra simple.
3º básico	Registrar y ordenar datos obtenidos de juegos aleatorios con dados y monedas, encontrando el menor, el mayor y estimando el punto medio entre ambos.	Realizan juegos aleatorios con dados de diferentes formas (cubos, tetraedros u otros) y monedas, registrando los resultados en tablas de conteo y diagramas de punto.
4º básico	Realizar experimentos aleatorios lúdicos y cotidianos, y tabular y representar mediante gráficos de manera manual y/o con software educativo.	Realizan experimentos con dados cúbicos o de otra forma regular como tetraedro, dodecaedro, etc. Extraen naipes al azar con y sin devolución. Pesan piedritas de un saco de gravilla y determinan la frecuencia absoluta de las masas de 5 g, 10 g, etc. Reconocen que los resultados de experimentos lúdicos no son predecibles. Realizan repeticiones de un mismo experimento, determinan la frecuencia absoluta y la representan en un gráfico. Usan software educativo para simular experimentos aleatorios.
5º básico	Describir la posibilidad de ocurrencia de un evento en base a un experimento aleatorio, empleando los términos seguro - posible - poco posible - imposible. Comparar probabilidades de distintos eventos sin calcularlas.	Describen eventos posibles en el resultado de un juego de azar; por ejemplo: al lanzar un dado, indican los resultados posibles incluidos en el evento: “que salga un número par”. Se refieren a la posibilidad de ocurrencia de un evento, mediante expresiones simples como seguro, posible, poco posible o imposible.

	Utilizar diagramas de tallo y hojas para representar datos provenientes de muestras aleatorias.	Dan ejemplos de eventos cuya posibilidad de ocurrencia es segura, posible, poco posible o imposible. Dan ejemplos de eventos cuya probabilidad de ocurrencia es mayor que la de otros eventos, sin calcularla. Juegan a lanzar dados o monedas y, frente a eventos relacionados con estos lanzamientos, dicen, sin calcular, cuál es más probable que ocurra. Hacen apuestas entre alumnos y dicen, sin calcular, quién tiene más probabilidad de ganar.
6º básico	Comparar distribuciones de dos grupos, provenientes de muestras aleatorias, usando diagramas de puntos y de tallo y hojas. Conjeturar acerca de la tendencia de resultados obtenidos en repeticiones de un mismo experimento con dados, monedas u otros, de manera manual y/o usando software educativo.	Enumeran resultados posibles de lanzamientos de monedas o dados con ayuda de un diagrama de árbol. Por ejemplo, al lanzar tres veces una moneda, o una vez dos dados. Realizan de manera repetitiva experimentos con monedas para conjeturar acerca de las tendencias de los resultados. Conjeturan acerca de porcentajes de ocurrencia de eventos relativos a lanzamientos de monedas o dados.
7º básico	Explicar las probabilidades de eventos obtenidos por medio de experimentos de manera manual y/o con software educativo: • Estimándolas de manera intuitiva. • Utilizando frecuencias relativas. • Relacionándolas con razones, fracciones o porcentaje.	Mediante experimentos, estiman la probabilidad de un evento, registrando las frecuencias relativas. Establecen la probabilidad de un evento mediante razones, fracciones o porcentajes, sea haciendo un experimento o por medio de un problema. Antes del experimento, estiman la probabilidad de ocurrencia y verifican su estimación, usando de frecuencias relativas. Elaboran, con material concreto (como dados y monedas), experimentos aleatorios con resultados equiprobables y no equiprobables.

		Realizan los experimentos aleatorios con numerosas repeticiones, determinan las frecuencias absolutas relativas y representan los resultados mediante gráficos. Analizan y comunican si se cumple aproximadamente la equiprobabilidad. Determinan la probabilidad de manera teórica y luego comparan con la probabilidad de realizar el experimento. Determinan la probabilidad de un experimento, usando gráficos, diagramas de árbol o tablas. Comparan la probabilidad de un evento según un muestreo, su frecuencia relativa y un gráfico adecuado. Determinan la probabilidad de un problema mediante diagramas de árbol. Calculan la probabilidad de un evento de manera teórica.
8º básico	Desarrollar las reglas de las probabilidades, la regla aditiva, la regla multiplicativa y la combinación de ambas, de manera concreta, pictórica y simbólica, de manera manual y/o con software educativo, en el contexto de la resolución de problemas. Mostrar que comprenden el concepto de azar: • Experimentando con la tabla de Galton y con paseos aleatorios sencillos de manera manual y/o con software educativo. • Realizando análisis estadísticos, empezando por frecuencias relativas. • Utilizando probabilidades para describir el comportamiento azaroso. • Resolviendo problemas de la vida diaria y de otras asignaturas.	Simulan experimentos que involucran elecciones al azar equiprobables reiteradas (de pocos pasos) y describen pictóricamente los resultados, vía árboles; por ejemplo: en situaciones como componer menús o tenidas mediante elecciones sucesivas equiprobables de platos y prendas de ropa; o caminos de pocos pasos en un paseo al azar, con elecciones equiprobables entre cada encrucijada con 2, 3 o 4 opciones. Simulan experimentos que involucran elecciones al azar equiprobables reiteradas (de pocos pasos).

Con la información que entrega la Tabla 1, se puede ver que en el currículum chileno el estudio de la probabilidad está en todos los niveles de la educación básica, en donde ésta se inicia con actividades sencillas, teniendo por objetivo que el estudiante se enfrente desde muy temprana edad a situaciones en que esté inserta la probabilidad. También, es posible visualizar que las actividades van aumentando su complejidad a lo largo de los niveles, lo que permite que el conocimiento sea aplicado y además va en una constante evolución produciendo que el estudiante no olvide el contenido visto, sino que siempre esté aplicándolo en diversos contextos cotidianos.

Al momento de analizar los objetivos de aprendizaje y sus respectivos indicadores de evaluación, es posible distinguir tres etapas que orientan el proceso de enseñanza y aprendizaje de la probabilidad en los primeros años escolares de educación básica (Vásquez y Alsina, 2014).

- Plantear diversos tipos de situaciones y de preguntas, en un contexto familiar y de interés para los estudiantes que les permita distinguir entre aquellos datos que son pertinentes para responder a tales preguntas.
- Organización y análisis de los datos por medio del uso de distintos tipos de registros que permitan la realización de inferencias y predicciones para dar respuesta a las situaciones y preguntas planteadas.
- Adquisición de las nociones básicas vinculadas a la probabilidad e incertidumbre para su posterior aplicación en situaciones de la vida diaria y del estudio de la probabilidad en mayor profundidad en la educación media.

Lo anterior, referido a iniciar a los estudiantes en el desarrollo de la noción de probabilidad en la escuela, está acorde a lo que señala el *Principles and Standard for school mathematics* (NCTM, 2000), aunque estos no son vistos en profundidad, sino que los conocimientos son abordados desde un punto de vista intuitivo.

Según las descripciones anteriores sobre la probabilidad, es posible ver que las actividades son de un contexto cotidiano, lo que permite que el estudiante pueda visualizar que existen eventos que son posibles, seguros, imposibles, siendo éstos quienes dan sentido al concepto de probabilidad. Además, el trabajo de la enseñanza de la probabilidad es importante que exista un trabajo con material concreto tales como fichas, dados, monedas, entre otros, los que permiten que se pueda vincular el concepto de azar y así se da paso a la noción de experimento aleatorio.

1.1.2 LA PROBABILIDAD EN LOS TEXTOS DE EDUCACIÓN BÁSICA

La enseñanza del lenguaje de la probabilidad está presente en edades tempranas del niño (6-7 años) mediante términos y expresiones para referirse a los sucesos aleatorios, aunque no siempre con el mismo significado que tratamos de enseñar. Por otro lado, investigadores en el área enfatizan la importancia del lenguaje que se presenta en los libros de texto que usa el niño, que son uno de los principales recursos educativos, ya que muchas de las decisiones de los profesores sobre las tareas a realizar con los niños están mediadas por los libros de texto (Stylianides, 2009). Cordero y Flores (2007) indican que el discurso matemático escolar es determinado con frecuencia por el libro de texto, además prácticamente regula la enseñanza y el aprendizaje, debido en parte a las creencias de los actores del sistema didáctico. En la enseñanza de la estadística y probabilidad, el libro contribuye a la formación del propio docente (García, 2011).

Gómez, Ortiz, Batanero y Contreras (2013) analizan el lenguaje de la probabilidad en algunos libros de texto a lo largo de la Educación Primaria, con el fin de orientar al profesor en su uso y alertarle de posibles problemas de interpretación de este lenguaje por parte de los niños. Para ello, eligieron dos series completas de libros de texto de editoriales de amplia difusión en España, realizando un análisis que utiliza la metodología propuesta por Cobo (2003). Sus resultados del análisis de texto sugieren que la presentación de la probabilidad en los textos podría llevar un uso diferenciado de diversas representaciones (tabular, verbal, gráfica y numérica), dependiendo de la editorial y el ciclo educativo. El lenguaje predominante en todos los ciclos es el verbal de uso cotidiano. Los lenguajes numérico y simbólico se introducen gradualmente, en concordancia con su aparición en otros bloques de contenido en el área de matemáticas, aunque no se relacionan de forma explícita. Los lenguajes tabular y gráfico, que se utilizan desde primer ciclo en contexto de estadística, aparecen menos ligados a la probabilidad.

1.1.3 SIGNIFICADOS DE LA PROBABILIDAD ELEMENTAL

Al momento de hablar de la probabilidad surgen diversos significados que han sido modificados a lo largo del tiempo en una constante evolución, a pesar de que tiene su origen formal en el siglo XVII, en el transcurso de la historia tuvo ciertas modificaciones según fueron los contextos en que fueron utilizados. Gómez, Batanero y Contreras (2014) analizan los procedimientos que están ligados a los significados de probabilidad más relevantes para la enseñanza escolar, y que se describen a continuación:

Significado intuitivo: Está ligada a lo intuitivo de los hechos, en este caso por las apuestas. Este significado intuitivo utiliza la probabilidad sin formalización y sin llegar a una asignación numérica, es decir, en forma cualitativa. Los autores destacan que es muy adecuado en la educación primaria, pues el interés de los niños por los juegos puede usarse en la enseñanza para introducir la noción de probabilidad. Reconociendo la impredecibilidad de los resultados, los niños pueden percibir que algunos sucesos merecen más confianza que otros, en función de su experiencia. La asignación de probabilidades, desde este significado, se puede hacer comparando la verosimilitud de sucesos con palabras del lenguaje habitual.

Significado clásico: Está ligado a la definición dada por Laplace, en donde la probabilidad de un suceso es el cociente entre el número de casos favorables al mismo y el número de casos posibles (considerando todos los casos como equiprobables). A pesar de que sólo puede aplicarse a experimentos aleatorios con un número finito de posibilidades, este significado ha primado en la escuela durante muchos años. La razón es que puede utilizarse para calcular probabilidades en juegos de azar (ej., con dados, monedas, urnas) que forman parte de la vida cotidiana del niño.

Significado frecuencial: Es el límite hacia el cual tiende la frecuencia relativa en un gran número de ensayos repetidos en las mismas condiciones. Esta definición permite que la estadística esté conectada más intrínsecamente con la probabilidad. El significado frecuencial es adecuado en la enseñanza, porque tiene una aplicación más amplia que el clásico en muchos fenómenos de la vida real y conecta la estadística con la probabilidad. Además, las posibilidades actuales de simulación facilitan el tratamiento de este enfoque (Fernandes, Batanero, Contreras, y Díaz, 2009).

Significado subjetivo: Este significado hace que la probabilidad tenga un valor subjetivo mediante el teorema de Bayes, ya que permite transformar las probabilidades a priori en probabilidades a posteriori utilizando la información de los datos observados. El significado subjetivo de la probabilidad, donde todas las probabilidades se asumen como condicionadas a un sistema de creencias es apropiado en situaciones como el diagnóstico médico o la evaluación de un estudiante. En estas situaciones, el que asigna la probabilidad (médico o profesor) puede tener una información sobre el suceso que le permite mejorar su asignación de probabilidades. Desde el punto de vista de la enseñanza, Borovcnik (2012) señala su escasa presencia, en currículos vigentes. Aunque la probabilidad condicional y el teorema de Bayes se retrasan a la educación secundaria, Godino, Batanero y Cañizares (1987) sugieren usar en forma intuitiva este enfoque, en la educación primaria, con situaciones cotidianas del niño; se comenzaría asignando valores por parte del niño a las probabilidades, que se revisarían posteriormente con nuevas experiencias.

1.2 FORMACIÓN DE PROFESORES EN PROBABILIDAD

1.2.1 ESTÁNDARES DE PROFESORES DE EDUCACIÓN BÁSICA EN PROBABILIDADES

El currículo en educación matemática ha sido modificado en el último periodo, teniendo como finalidad entregar a los estudiantes contenidos de calidad y en línea con lo que va exigiendo la sociedad actual, para lo cual es fundamental que los cambios realizados estén sincronizados con quienes se encargan de la formación del profesorado, pues es el profesor quien está encargado de instalar y lograr el aprendizaje significativo, siendo el actor principal dentro de la escuela. Para eso, países definen estándares para la formación docente, con la finalidad de indicar todo aquello que los profesores deben saber y saber hacer para poder ejercer sus funciones de manera satisfactoria en los diversos roles y escenarios que están implicados en el ejercicio docente.

Los estándares son quienes ponen los lineamientos que ordenan la política de regulación, estando centrados en los desempeños prácticos, siendo generalizados para los diversos estilos y tipos de profesores que ejercen actualmente. En Estados Unidos, los estándares más relevantes son los del Interstate New Teacher asessment and Support Consortium (INSTASC), que definió los primeros estándares de formación de profesores en

1987. Estos fueron reformulados en 2010, como estándares profesionales. También, son relevantes los estándares de la agencia nacional de acreditación de formación de profesores, el *National Council for Accreditation of Teacher Education* (NCATE), que se encuentra en proceso de fusión con la otra agencia acreditadora de programas de formación denominada *Teacher Education Accreditation Council* (TEAC). Ambas han definido una nueva orientación para la formación de profesores con énfasis en la práctica.

Los docentes que enseñan matemática deben conocer, comprender, comunicar y enseñar sus conocimientos matemáticos con la amplitud de conocimientos matemáticos con la comprensión reflejada en las siguientes *competencias* definidas por el Ministerio de Educación de Chile (Mineduc, 2015) Para el dominio de Datos y Azar:

- Variabilidad estadística y sus fuentes y el papel del azar en la inferencia estadística.
- Creación e implementación de encuestas e investigaciones utilizando métodos de muestreo y diseños estadísticos, la inferencia estadística (estimación de los parámetros de población y pruebas de hipótesis), la justificación de las conclusiones, y la generalización de los resultados.
- Distribuciones de datos univariados y bivariados para los datos categóricos y para variables aleatorias discretas y continuas, incluyendo representaciones, construcción e interpretación de pantallas gráficas (por ejemplo, diagramas de caja, histogramas, diagramas de frecuencia acumulada, gráficos de dispersión), las medidas de resumen, y comparaciones de las distribuciones.
- Probabilidad empírica y teórica (discreta, continua y condicional) para ambos eventos simples y compuestos.
- Fenómenos aleatorios, simulaciones y distribuciones de probabilidad y su aplicación como modelos de fenómenos reales y para la toma de decisiones.
- Desarrollo y perspectivas de la estadística histórica y probabilidad incluidas las contribuciones de importantes figuras y culturas diversas.

Los *estándares pedagógicos* son los que se enfocan en el área de las competencias para el adecuado desarrollo proceso de enseñanza, independientemente de la disciplina a enseñar: Conocimiento del currículo, diseño de procesos de aprendizaje y la evaluación del aprendizaje. Además, se incluye la dimensión moral de su profesión, en donde los futuros docentes se comprometen con su profesión, con el propio aprendizaje y con el aprendizaje y formación de sus estudiantes. También, los futuros profesores deben estar preparados para la conducción y realización de las clases, interactuar con los estudiantes y propiciar un ambiente adecuado y propicio para el aprendizaje. Por último, señala los aspectos de la cultura escolar que el futuro profesor debe conocer, así como las estrategias para la formación personal y social de sus estudiantes.

Los *estándares pedagógicos* (Mineduc, 2012) son los siguientes:

EP 1: Conoce a los estudiantes y sabe cómo aprenden.

EP 2: Está preparado para promover el desarrollo personal y social de los estudiantes.

EP 3: Conoce el currículo y usa sus diversos instrumentos curriculares para analizar y formular propuestas pedagógicas y evaluativas.

EP 4: Sabe cómo diseñar e implementar estrategias de enseñanza-aprendizaje adecuadas para los objetivos de aprendizaje y de acuerdo con el contexto.

EP 5: Está preparado para gestionar la clase y crear un ambiente apropiado para el aprendizaje según contextos.

EP 6: Conoce y sabe aplicar métodos de evaluación para observar el progreso de los estudiantes y sabe usar los resultados para retroalimentar el aprendizaje y la práctica pedagógica.

EP 7: Conoce cómo se genera y transforma la cultura escolar.

EP 8: Está preparado para atender la diversidad y promover la integración en el aula.

EP 9: Se comunica oralmente y por escrito de forma efectiva en diversas situaciones asociadas a su quehacer docente.

EP 10: Aprende en forma continua y reflexiona sobre su práctica y su inserción en el sistema educacional.

Los *estándares disciplinarios para la enseñanza*: definen las competencias específicas para enseñar cada una de las áreas consideradas: Lenguaje y Comunicación, Matemática, Historia, Geografía y Ciencias Sociales, Biología, Física, y Química. En cada caso, los estándares sugieren qué conocimientos y habilidades deben demostrar los futuros profesores y profesoras en la disciplina respectiva y cómo ésta se enseña, incluyendo el conocimiento del currículo específico, la comprensión sobre cómo aprenden los estudiantes cada disciplina y la capacidad para diseñar, planificar e implementar experiencias de aprendizaje, así como para evaluar y reflexionar acerca de sus logros.

Los *estándares disciplinarios* en Probabilidad y Estadística son:

ED 1: Es capaz de motivar la recolección y estudio de datos y de conducir el aprendizaje de las herramientas básicas de su representación y análisis.

ED 2: Es capaz de conducir el aprendizaje de las probabilidades discretas.

ED 3: Está preparado para conducir el aprendizaje de las variables aleatorias discretas.

ED 4: Está preparado para conducir el aprendizaje de la distribución normal y teoremas límite.

ED 5: Está preparado para conducir el aprendizaje de inferencia estadística.

Para que se cumplan los estándares los profesores deben tener un dominio de temas específicos dentro del currículo matemático. En el eje de Probabilidad y Estadística, la formación que tienen los futuros profesores de matemática es carente de profundidad y provoca inseguridades (Pierce y Chick, 2011). Arteaga, Contreras y Cañadas (2014) indican que pocas Facultades de Educación proponen un curso completo de estadística y menos aún un curso completo de didáctica de la estadística en sus programas de formación de profesores. Por otro lado, aunque el profesor conozca los principios pedagógico-didácticos que orientan el diseño curricular, su aplicación a temas concretos deja demasiados grados de libertad, lo que torna insegura y excesivamente compleja la acción del docente (Godino, Batanero, Rivas y Arteaga, 2013).

1.2.2 ENSEÑANZA DE LA PROBABILIDAD EN EDUCACIÓN BÁSICA

Investigaciones señalan que los conocimientos de los profesores de matemática en el ámbito de la probabilidad no son los esperados, ya que muestran que los futuros docentes no lo manejan en su totalidad, Mohamed (2012) aplicó un cuestionario a 283 futuros docentes obteniendo como resultado que un 31% responde de forma correcta y 62% muestra sesgos de equiprobabilidad.

Una investigación de Batanero, Cañizares y Godino (2005) señala que los conocimientos de los profesionales de la educación no son elevados, ya que solo un grupo reducido, según el cuestionario aplicado, posee los conocimientos necesarios, en cambio, el resto de los encuestados presenta dificultades en el concepto de independencia y el sesgo de equiprobabilidad.

La investigación de Contreras (2011) señala que el 59% de los futuros profesores de matemática acierta en los cálculos de probabilidad simple. Según lo investigado por Prodromou (2012) a profesores de primaria en formación señala que hubo una confusión al momento de tener en consideración el orden de los dados al estudiar la probabilidad de suma y no establecieron relaciones entre las probabilidades teóricas y las frecuencias relativas del experimento, ya que no había una claridad al comprender la idea de convergencia. En la investigación de Smith y Hjalmarson (2013) con 45 profesores en formación señalan que el curso de estadística, en su comienzo no lograban acopiar los conceptos de aleatoriedad y convergencia, pero con el desarrollo de las actividades permitió que mejoraran sus conocimientos.

Batanero, Gómez, Contreras y Díaz (2015), en su estudio en la formación probabilística de los futuros profesores en la educación secundaria y en el bachillerato, en el caso de que fuese deficiente, debería ser una tarea de las facultades de educación el completarla en forma adecuada. Aunque, los resultados en la segunda parte de la investigación también muestran que es posible mejorar el conocimiento de los profesores, aún con un tiempo limitado de enseñanza. Para preparar a los profesores en la componente didáctica, serán de gran ayuda situaciones relacionadas con la docencia, de acuerdo con Llinares (2009) estas tareas tienen en cuenta los contextos en que el futuro maestro ha de aplicar su conocimiento en la práctica de enseñar matemáticas.

Batanero, Gómez, Contreras y Díaz (2015) resaltan la necesidad de continuar la investigación sobre otros componentes del conocimiento del profesor en el campo de la probabilidad, como paso necesario para desarrollar propuestas de enseñanza que contribuyan a mejorar la formación de los profesores.

Alsina (2017) señala que diversos países, entre ellos España, han concretado las competencias profesionales del profesorado en la educación primaria, en donde indica la necesidad de asumir que el ejercicio de la función docente debe ir perfeccionándose y complementándose a los cambios científicos, pedagógicos y sociales a lo largo de la vida. Esto es refiriéndose a la necesidad de reflexionar sistemáticamente sobre lo que se sabe y sobre lo que se hace, con el objeto de ir mejorando la práctica profesional docente.

El conocimiento de la matemática en los estudiantes, sobretodo en sus primeros años es muy importante, ya que ellos deben entender y ser capaces de utilizarla en su cotidiano y futuro trabajo, por consiguiente, el profesor que sea el encargado de entregar todas estas herramientas a los estudiantes debe manejar en su gran mayoría los conocimientos estadísticos y probabilísticos y así sean unas verdaderas herramientas para su futuro personal como laboral.

1.3 DELIMITACIÓN DEL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

1.3.1 OBJETIVOS GENERALES DE LA INVESTIGACIÓN

Los objetivos general y específicos son los siguientes:

Objetivo General:

Estudiar los significados intuitivo y clásico sobre la probabilidad que atribuyen estudiantes de la educación básica de los niveles séptimo y octavo año en la novena región de Chile.

Objetivos específicos:

O1. Diseñar un cuestionario de probabilidades dirigido a estudiantes de séptimo y octavo año de educación básica considerando las investigaciones en el tema.

O2. Caracterizar las dificultades y errores en probabilidades de los estudiantes de séptimo y octavo año de educación básica.

O.3 Comparar los conocimientos y argumentaciones en la resolución de problemas de probabilidades en estudiantes de séptimo y octavo año básico.

1.3.2 HIPÓTESIS DE INVESTIGACIÓN

En base a las investigaciones relacionadas con el tema nos planteamos las siguientes hipótesis de investigación:

H1. Los estudiantes de la educación básica asignan diversos valores a situaciones de incertidumbre desde sus intuiciones probabilísticas.

H2. Las intuiciones probabilísticas de los estudiantes de educación básica están relacionadas con el nivel educativo.

H3. Los estudiantes de educación básica manifiestan dificultades de comprensión en tareas de probabilidad.

CAPÍTULO 2
FUNDAMENTO DEL ESTUDIO

2.1 MARCO TEÓRICO

2.1.1 SIGNIFICADO DE UN OBJETO MATEMÁTICO

En este trabajo, para analizar los significados intuitivos y clásicos de la probabilidad en estudiantes de la educación básica, vamos a utilizar algunas nociones teóricas del enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática (EOS) desarrolladas por Godino y colaboradores (Godino y Batanero, 1994; Godino, 2003; Godino, Batanero y Font, 2007). Es un marco teórico integrativo para la didáctica de las matemáticas que aborda el problema de la articulación de teorías desde supuestos semióticos, ontológicos y antropológicos. Esto debido a que un supuesto básico de este marco teórico es que las matemáticas, desde el punto de vista institucional y personal, constituyen un quehacer humano, producido como respuesta a cierta clase de situaciones problemáticas del mundo real, social o de la propia matemática. Como respuesta o solución a estos problemas externos e internos, los objetos matemáticos (conceptos, procedimientos, teorías, etc.), emergen y evolucionan progresivamente.

El término "significado" se usa de una manera persistente en la investigación y en la práctica de la educación matemática, ligado al de "comprensión". Se considera esencial que los estudiantes conozcan el significado de los términos, expresiones, representaciones, o sea, a qué hace referencia el lenguaje matemático en sus diferentes registros (Godino, 2010). Una institución está constituida por las personas involucradas en una misma clase de situaciones problemáticas. Al considerar una institución escolar, en nuestro caso la educación media, el significado construido por un estudiante particular sobre la probabilidad, en un momento del proceso de aprendizaje puede no corresponder exactamente al significado del objeto en la institución dada, por lo que conviene distinguir entre significado institucional y significado personal de un objeto matemático. El *significado institucional* de una expresión matemática es el compartido dentro de una institución, y el *significado personal* es el que el alumno tiene inicialmente o es adquirido a lo largo del proceso de estudio.

El objeto matemático se presenta como un ente abstracto que emerge del sistema de prácticas significativas, ligadas a la resolución de cierto campo de problemas matemáticos. Este proceso es progresivo a lo largo del tiempo, hasta que en determinado momento el objeto matemático es reconocido como tal por la institución. Luego, sufre transformaciones progresivas según se va ampliando el campo de problemas asociado. Este proceso de construcción de los objetos en la ciencia tiene su paralelismo en el aprendizaje del sujeto. El aprendizaje es progresivo a lo largo de la vida del sujeto, como consecuencia de la experiencia y enseñanza recibida, y los objetos construidos son los constituyentes del conocimiento subjetivo.

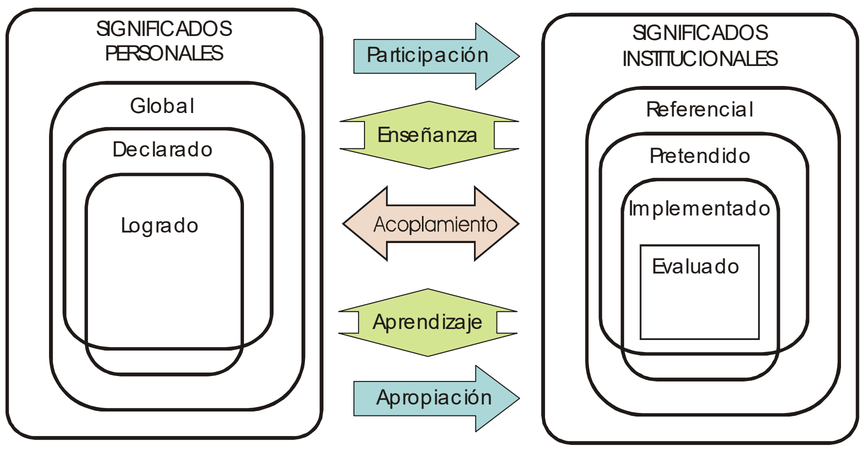


Figura 1. Tipos de significados institucionales y personales

La relatividad socioepistémica y cognitiva de los significados, entendidos como sistemas de prácticas, y su uso en el análisis didáctico lleva a introducir la tipología básica de significados que se resume en la Figura 1 (Godino, 2002). En la parte central de la figura se indican las relaciones entre enseñanza y aprendizaje, que implica el acoplamiento progresivo entre los significados personales e institucionales. Asimismo, la enseñanza implica la participación del estudiante en la comunidad de prácticas que soporta los significados institucionales y el aprendizaje, en última instancia, supone la apropiación por el estudiante de dichos significados. De esta manera el objeto matemático se presenta como un ente abstracto que emerge del sistema de prácticas significativas, ligadas a la resolución de cierto campo de problemas matemáticos. Se estudiará los significados de la probabilidad intuitiva y clásica.

2.1.2 FUNCIÓN SEMIÓTICA Y CONFLICTO SEMIÓTICO

Godino (2002) señala que en el trabajo matemático intervienen funciones semióticas o correspondencias con tres componentes: la expresión (signo); el contenido (significado de tal signo, lo representado) y un criterio o regla de correspondencia que sirve para interpretar la relación entre expresión y contenido. Es decir, en el trabajo matemático son necesarios una serie de pasos en los que se hace una interpretación o una representación. Cualquier tipo de objeto (situaciones-problemas, conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos), puede participar en la función semiótica como expresión o contenido. En el caso del EOS el interpretante se concibe como la regla (hábito, norma) de correspondencia entre el representante y el objeto, establecida por una persona, o en el seno de una institución, en el correspondiente acto interpretativo (significados personales o institucionales). Además, toda entidad que participa en un proceso de semiosis, interpretación, o juego de lenguaje, es objeto, pudiendo desempeñar el papel de significante, significado o interpretante.

Las funciones semióticas, generalmente vienen dadas por su expresión, y los otros dos componentes quedan implícitos. Por ejemplo (García, Arteaga y Roa, 2017), en la expresión $V_{m,n}$ el estudiante ha de hacer una interpretación, recordando que se refiere a las variaciones ordinarias de m elementos tomados n en n; y además recordar que m es el tamaño del conjunto inicial y n el de la muestra que se quiere tomar. Cuando se produce un desacuerdo entre el significado que ha establecido el autor de la función semiótica y el que hace el interpretante de la misma se habla de conflicto semiótico. Uno de los objetivos de nuestro trabajo es identificar los conflictos semióticos en los problemas abiertos (objetico específico 2).

En resumen, este estudio se apoya en el marco teórico del Enfoque-Ontosemiótico (Godino y Batanero, 1994; Godino, Batanero y Font, 2007). En este marco teórico EOS, la enseñanza y aprendizaje están relacionados con el significado institucional y el significado personal que posee un objeto matemático, entendidos como toda entidad que interviene en una tarea matemática. Además, los autores establecen que la comprensión de un objeto matemático es progresiva y que no puede ser observada directamente, pero su práctica personal (significado personal) es la que permite indagar en un acercamiento global al significado declarado por la institución (significado institucional). En esta Tesis, consideramos que un primer acercamiento a la comprensión de la probabilidad en la educación básica debe iniciarse con actividades que favorezcan la reflexión sobre el significado intuitivo de probabilidad. La experiencia del profesor de matemática enfrentado a situaciones simples bajo incertidumbre le va a permitir conducir a sus estudiantes hacia una adecuada intuición sobre la probabilidad. En consecuencia, pretendemos explorar las intuiciones probabilísticas de los estudiantes de educación básica y los conflictos semióticos que se presentan en la resolución de tareas de probabilidad clásica.

2.1.3 COMPRENSIÓN Y COMPETENCIA

Godino (1996) define la teoría de la *comprensión* de un concepto, como un recorrido progresivo y relativo de la apropiación de elementos ligados a los significados institucionales. El sentido de la enseñanza sería aproximar los significados personales a los institucionales. En el caso de la probabilidad, Batanero (2005) ilustra mediante ejemplos como se entiende la *comprensión de la probabilidad*:

En la e*scuela primaria* es el lugar en donde el niño comprende la probabilidad, ya que cuando calcula probabilidades de sucesos en experimentos muy sencillos, por ejemplo el lanzamiento de un dado, y entiende que corresponde a un valor entre 0 y 1. Siguiendo con la trayectoria escolar, en la *escuela secundaria* es cuando el adolescente comprende la probabilidad y aplica la regla de Laplace, conoce algunas propiedades como la regla del producto y resuelve problemas con más dificultad, por ejemplo, cuando calcula la probabilidad de un experimento compuesto de varias etapas dependientes (como lanzar una moneda y según el resultado lanzar un dado o una moneda). También, está involucrada la *sociedad* ya que el individuo comprende la probabilidad cuando la utiliza adecuadamente en el contexto de apuestas, votaciones o inversión en la bolsa, y toma decisiones correctas con base en esa información. Por último, se encuentra *Ciencia, vida profesional o universidad*, ya que el adulto comprende la probabilidad debido a que ya ha interactuado con variables aleatorias en una o más dimensiones y diferentes modelos de distribuciones de probabilidad, como la binomial. Es preciso mencionar que algunas profesiones también requieren la estimación de parámetros o contraste de hipótesis.

2.1.4 CONFIGURACIONES DIDÁCTICAS

Configuración didáctica es definida como una unidad primaria de análisis didáctico constituida por interacciones profesor – alumno a propósito de un objeto o contenido matemático y usando recursos materiales específicos (Godino, Batanero y Font, 2007).

La configuración didáctica está asociada a tres configuraciones interrelacionadas: La *epistémica,* que está representada por una tarea con sus objetos matemáticos previos y emergentes; también se encuentra la *instruccional*, que se conforma por la red de objetos docentes, discentes y mediacionales puestos en juego a propósito de dicha tarea; y además se encuentra la *cognitiva*, que está constituida por la red completa de objetos de los sistemas de prácticas personales al implementar la configuración epistémica dada. Esta última se puede utilizar para describir los aprendizajes que se van construyendo a lo largo del proceso (Gómez 2014).

Godino, Batanero y Font (2007) definen seis criterios de la idoneidad didáctica:

La *idoneidad epistémica* se refiere al grado de representatividad de los significados institucionales implementados (o pretendidos), respecto de un significado de referencia. La *idoneidad cognitiva* expresa el grado en que los significados pretendidos implementados estén en la zona de desarrollo potencial de los alumnos, así como la proximidad de los significados personales logrados a los significados pretendidos/ implementados.

La *idoneidad interaccional* de un proceso de enseñanza-aprendizaje tendrá mayor idoneidad desde el punto de vista interaccional si las configuraciones y trayectorias didácticas permiten, por una parte, identificar conflictos semióticos potenciales (que se puedan detectar a priori), y por otra parte permitan resolver los conflictos que se producen durante el proceso de instrucción.

La *idoneidad mediacional* es grado de disponibilidad y adecuación de los recursos materiales y temporales necesarios para el desarrollo del proceso de enseñanza aprendizaje.

La *idoneidad afectiva* es el grado de implicación (interés, motivación) del alumnado en el proceso de estudio. La idoneidad afectiva está relacionada tanto con factores que dependen de la institución como con factores que dependen básicamente del alumno y de su historia escolar previa.

La *idoneidad ecológica* es el grado en que el proceso de estudio se ajusta al proyecto educativo del centro, la escuela y la sociedad y a los condicionamientos del entorno en que se desarrolla.

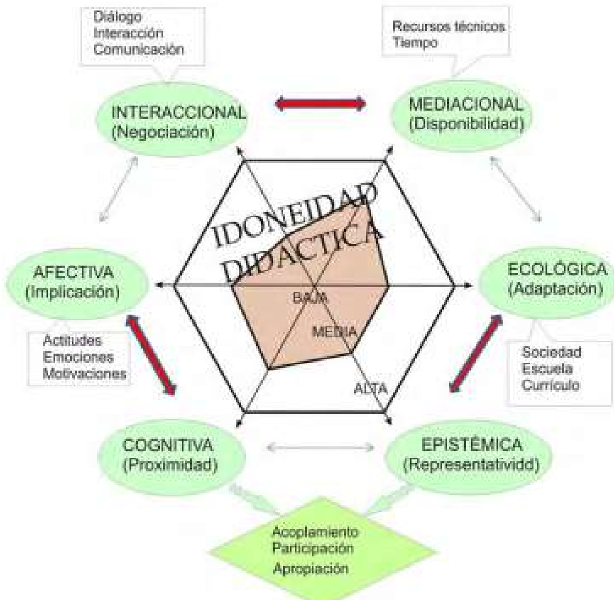


Figura 2. Idoneidad didáctica (Godino, 2011)

La noción de idoneidad didáctica junto a sus componentes es esquematizada por medio de la Figura 2 que resume sus principales características. Los autores representan la idoneidad didáctica mediante hexágonos. El hexágono regular corresponde a un proceso de estudio pretendido, donde se asume un grado máximo de las diferentes idoneidades; y el hexágono irregular corresponde a los tipos de idoneidad logradas en el proceso de enseñanza y aprendizaje implementado. Dado que todo proceso de estudio contempla el desarrollo de conocimientos especifico, es que se han situado en la base del hexágono las idoneidades epistémica y cognitiva. Nuestro interés es analizar la idoneidad ecológica (adaptación al currículo y socio-profesional) y afectiva (interés y actitudes) que presentan los profesores de matemática.

2.2 INVESTIGACIONES SOBRE PROBABILIDAD EN LA EDUCACIÓN PRIMARIA

Las investigaciones referidas a la probabilidad en la educación primaria muestran que a pesar que han sido pocas, los resultados son concluyentes, en donde señalan que los conocimientos no son elevados y que solamente unos pocos dominan la probabilidad, ya que el resto presenta dificultades, confusiones o sesgo al momento de enfrentarse a un cuestionario de esta temática.

2.2.1 RAZONAMIENTO PROBABILÍSTICO EN LOS NIÑOS

El razonamiento probabilístico en los niños está presente desde los primeros años de escolaridad según el currículo, permitiendo así que los estudiantes logren una familiarización con la probabilidad, siendo un método más cercano y amigable logrando que el conocimiento se internalice de forma evolutiva.

La internalización del conocimiento de probabilidad está dividida en tres etapas en la vida escolar del estudiante (MINEDUC, 2012):

- Primer ciclo: El carácter aleatorio de alguna experiencia; distinguir entre lo imposible, seguro, y aquello que es posible pero no seguro; utilización del lenguaje habitual, de expresiones relacionadas con la probabilidad.
- Segundo ciclo: El carácter aleatorio de algunas experiencias: Valoración de los resultados de experiencias en las que intervienen el azar, para apreciar que hay sucesos más o menos probables y la imposibilidad de predecir un resultado concreto. Además de la introducción al lenguaje del azar.
- Tercer ciclo: Carácter aleatorio de algunas experiencias: presencia del azar en la vida cotidiana. Estimación del grado de probabilidad de un suceso.

En base a lo anterior, se puede ver como el currículo se ha preocupado de que el estudiante vaya vivenciando lo que es la probabilidad, desde sucesos que son de la vida cotidiana y así ellos lo pueden relacionar más significativamente, lo que produce que el aprendizaje sea más efectivo logrando que la aprehensión sea mayor. Los estudiantes desde temprana edad deben aprender a estimar, discriminar y diferenciar formas, distancias y cantidades; producto de lo anterior es que se puede concretizar con la utilización de fichas, moldes, pastillas, etc. Según la teoría de Piaget (1975) los inicios de los aprendizajes de los estudiantes están en los periodos: *Pre operacional (2-7 años)* y el *periodo de las operaciones concretas (7-11 años)*. En la etapa pre operacional, se caracteriza por la manipulación de objetos reales, ya que el niño se basa en las experiencias empíricas para aprender los conceptos.

En la etapa de operaciones concretas, está caracterizada en que el estudiante comienza su vida escolar, en donde su nivel de aprendizaje le permite abstraer sin tener una experiencia con material concreto para el aprendizaje, dando paso a una constante progresión del estudiante a lo lardo de los años escolares. Es importante señalar que aún son necesarios los elementos abstractos ya que aún hay dificultad para concebir una operación de manera abstracta.

Fischbein (1975) señala que el aprendizaje mediante la intuición es el campo de la probabilidad, ya que intentó demostrar que los niños poseen ideas correctas parcialmente formadas sobre los conocimientos probabilísticos y analizó el efecto de las instrucciones para mejorar las intuiciones de los estudiantes.

Las intuiciones van más allá de un caso en particular, ya que tienen un carácter teórico, lo que permite extrapolar o hacer predicciones. Las intuiciones se relacionan entre si logrando formar una estructura de razonamiento. Las intuiciones, el autor, las separa en dos tipos, las primarias y las secundarias, que serán descritas a continuación:

La intuición primaria: Son aquellas que son adquiridas por la experiencia, en donde no hay necesidad de dar instrucciones, esto es posible ver en casos como cálculo de distancia o al lanzar un dado, todas las caras tienen la misma posibilidad de salir.

La intuición secundaria: Estas son formadas a raíz de la educación recibida por el estudiante, es decir, en la escuela.

Luego, de determinar esta clasificación, el razonamiento probabilístico de los niños es clasificado en conceptos específicos, tales como:

Aceptación del azar: Para comenzar a enseñar este concepto es necesario que los estudiantes sean capaces de diferenciar las situaciones aleatorias con las deterministas, es decir, que aprendan las características de un suceso aleatorio. En el periodo de operaciones concretas con la adquisición de esquemas operacionales tales como espacio – temporales y lógico – matemático, el estudiante es capaz de diferenciar entre azar y lo deducible, aunque no lo hace de manera autónoma ya que su pensamiento aún está ligado a un aprendizaje concreto.

Estimación de la frecuencia relativa: Ya que el niño es capaz de diferenciar entre una situación aleatoria con otra determinista, da paso a que el estudiante sea capaz de estimar en una serie de experimentos en donde los sucesos ocurren con mayor o menor frecuencia.

Estimación de posibilidades y noción de probabilidad: En este periodo el estudiante, según Fischbein, es capaz de estimar probabilidades sencillas o al menos es capaz de compararlas.

Distribución y convergencia: Es en esta instancia en que los niños antes de entrar a educación primaria, es decir, en preescolar, son capaces de comprender el reparto aleatorio, en donde se ejemplifica de cómo una baldosa se moja con la lluvia, pero ésta no lo hace de manera equitativa u ordenada. En el periodo de las operaciones formales los estudiantes logran comprender el mecanismo de la convergencia progresiva.

Convergencia a la distribución normal: Los estudiantes de primeros años de escolaridad se caracterizan porque no tienen las nociones de la idea de distribución. Los estudiantes de los primeros cursos, son capaces de diferenciar las frecuencias de los sucesos ocurridos, permitiendo que exista una noción de predicción, y los estudiantes del tercer estadio son capaces de adquirir nociones probabilísticas, lo que permite que se puedan introducir los juegos de azar, construir modelos probabilísticos basados en situaciones aleatorias reales

Por lo anterior, es posible deducir que el razonamiento probabilístico de los niños es una formación que se va adquiriendo a lo largo de su escolaridad, en donde el profesor que está a cargo de su aprendizaje es el actor principal en los conocimientos que él desarrollará, porque es en el colegio donde el estudiante desarrolla y construye esta habilidad matemática.

2.2.2 CONOCIMIENTO DEL PROFESOR PARA ENSEÑAR PROBABILIDAD

Gómez, Batanero y Contreras (2014) señalan que los conocimientos de los profesores muestran unas pobres intuiciones iniciales sobre los experimentos aleatorios, pues sólo la tercera parte, de que aproximadamente, tiene una intuición simultánea de la convergencia al valor esperado y de la variabilidad muestral. El resto muestra diferentes sesgos, como la equiprobabilidad, la heurística de la representatividad o piensa que no es posible hacer una predicción. Estos resultados coinciden con los estudios de Batanero, Godino y Cañizares (2005), Carter (2008) y Mohamed (2012); y son mejores que los observados en estudios con niños o adolescentes, como Green (1983, 1991), Serrano (1996) y Cañizares (1997). Además, añadieron información sobre la comprensión de la variabilidad, mostrando que una parte importante del grupo produce muestras de variabilidad extrema o de patrón determinista. Los resultados sobre el conocimiento del contenido y los estudiantes con relación a la probabilidad se les pidió a los futuros profesores, trabajando en grupos, que analicen las respuestas dadas por cuatro alumnos ficticios. Al haber discutido colectivamente sus propias respuestas a la primera parte de la tarea fueron capaces de discriminar, con facilidad, las respuestas correctas e incorrectas de dichos alumnos. Se deduce que el avance en el conocimiento común del contenido ayudó a desarrollar su conocimiento del contenido y los estudiantes.

Un alto porcentaje de estos futuros profesores también fueron capaces de dar razones válidas para los errores en las respuestas; mostrando mejores resultados que estudios previos con profesores en ejercicio (Watson, 2001; Stohl, 2005) o en formación (Carter, 2008; Mohamed, 2012). Los razonamientos erróneos que mejor se identificaron fueron la ausencia de variabilidad en los valores dados, la diferencia con frecuencias dadas por el profesor y la cercanía al 50% de los valores dados. En todo caso, sería necesario mejorar la formación en este punto, en donde se da a conocer los resultados de las investigaciones sobre didáctica de la probabilidad.

La investigación de Vásquez y Alsina (2014) agregan el factor didáctico matemático, que clasifica los conocimientos en cuatro facetas:

- *Conocimiento del contenido:* Este conocimiento es común, especializado y ampliado, ya que se funda en la faceta epistémica del profesor, a través del cual se espera indagar que en los conocimientos matemáticos correspondientes al contexto institucional en el que se lleva a cabo el proceso de la enseñanza – aprendizaje. Para ello se elaboran consignas orientadas a identificar, clasificar y evaluar aspectos específicos del conocimiento que se pone en juego para resolver tareas o problemas matemáticos, es decir, un conocimiento común; también señala el conocimiento especializado del contenido, el cual considera las distintas formas de representar ideas y problemas matemáticos, así como los distintos procedimientos, definiciones, propiedades y argumentos que permiten llegar a una solución; y por último, el conocimiento ampliado del contenido que pretende evidenciar la relación entre el contenido a enseñar con ideas matemáticas más avanzadas.

- *Conocimiento del contenido en relación con los estudiantes:* Se fundamenta en la faceta cognitiva y afectiva del conocimiento del profesor, por lo que incluye conocimientos relativos a conocimientos personales de los alumnos, errores, dificultades y conflictos presentes en sus aprendizajes y su progresión, además de las actitudes, emociones, creencias y valores vinculados al proceso de estudio y a los objetos matemáticos vinculados a las probabilidades en la educación básica.

Conocimiento del contenido en relación con la enseñanza: Es fundamentado en las facetas de interacción y mediación del conocimiento del profesor, por lo que involucra conocimientos relativos a los patrones de interacción entre el profesor y sus alumnos, su secuenciación orientada a la fijación y negociación de significados, además de aspectos vinculados a los conocimientos del profesor con relación a los recursos tecnológicos y la asignación del tiempo a las distintas acciones y procesos.

Conocimiento del currículo y conexiones intra e interdisciplinares: Sus fundamentos se sustentan en la faceta ecológica del conocimiento del profesor, en donde considera aspectos del currículo, entorno social, político, económico, etc. que condicionan el proceso de enseñanza y aprendizaje.

En relación a lo anterior, la enseñanza de la probabilidad en la educación primaria representa un verdadero desafío, sobre todo para los profesores en ejercicio, puesto que investigaciones lo han mostrado, los docentes no cuentan con una formación adecuada al respecto, es decir, en variados casos no cuentan con los conocimientos fundamentales necesarios para que un profesor lleve a cabo el proceso de enseñanza y aprendizaje, lo que les lleva a presentar concepciones erróneas y una ausencia de herramientas matemáticas y didácticas necesarias para alcanzar los objetivos de aprendizaje planteados para la educación primaria.

Vásquez (2017) señala que en las últimas décadas la estadística y la probabilidad ha cobrado importancia en el currículo de la educación básica, ya que se incorpora la probabilidad desde muy temprana edad, pero esto no tiene beneficios si quienes se encargan de formar a los estudiantes en los conocimientos probabilísticos no tienen la formación, didáctica ni competencias necesarias para enseñar de manera efectiva este concepto, por lo que sienten inseguridad para tratar estos temas y lo que conlleva a que esta enseñanza no sea la ideal. Según lo anterior, hace que sus experiencias estocásticas no permitan el desarrollo de un pensamiento probabilístico debido a las pocas oportunidades de tratar y manejar los conceptos de manera correcta y eficiente.

En la investigación de Vásquez (2017) enfatiza que el dominio del conocimiento didáctico-matemático para enseñar probabilidades es fundamental para que un profesor pueda apoyar a sus alumnos en su desarrollo matemático, pero no es suficiente. Puesto que, de acuerdo con Niss (2003), el profesor necesitará haber desarrollado una práctica de trabajar matemáticamente con sus alumnos, que le permita organizar la información disponible, analizar y extraer los aspectos relevantes, crear modelos simplificados, hacer analogías con situaciones conocidas, desarrollar estrategias de resolución de problemas, relacionar distintos procedimientos o representaciones, explicar, justificar y argumentar.

Lo anterior está en directa relación con lo que respecta a la formación del profesorado, específicamente en la matemática. En Chile la formación en relación al eje temático de estadística y probabilidad es bastante exigua (Vásquez, 2017) de las 20 carreras analizadas éstas tienen en promedio un 0,65% de los cursos de matemática y su didáctica dedicados explícitamente a la formación disciplinar y didáctica en estadística y probabilidad, lo que implica una débil formación de los futuros profesores para abordar exitosamente la enseñanza de la estadística y probabilidad en Educación Básica.

Vásquez y Alsina (2017) señalan que los conocimientos en probabilidades de los profesores que enseñan matemática no son tan alentadores, ya que el promedio de las respuestas correctas es inferior al 25%, mencionando que los encuestados tienen muy pocas estrategias para poder resolver situaciones hipotéticas en un contexto de probabilidad. Cabe destacar que las capacidades para poder comparar y calcular probabilidades es bastante baja, dado que los resultados que ellos analizaron denotan un conocimiento insuficiente, a modo que no son capaces de reconocer el momento adecuado de poder aplicar la regla de Laplace, omiten el supuesto de equiprobabilidad de los sucesos o sus argumentaciones carecen de consistencia matemática, dando razones más cotidianas que matemáticas.

En futuros estudios es necesario indagar para poder ofrecer una formación que logre desarrollar una comprensión adecuada de la probabilidad, de los conceptos que subyacen a ella y de las distintas estrategias para promover su enseñanza, por medio de la resolución de problemas, la experimentación y simulación de fenómenos aleatorios; enfoque que finalmente cambiará la mirada y los conocimientos del profesor con relación a la probabilidad y su enseñanza. Por otro lado, es importante que los profesores cuenten con una formación que los lleve a tener una actitud reflexiva y crítica sobre los conceptos que deben enseñar, sus estrategias de enseñanza y de la manera en cómo aprenden sus estudiantes; considerando la probabilidad como una herramienta para el análisis de información, modelamiento, argumentación y resolución de problemas provenientes de distintos ámbitos.

2.2.3 ACTITUDES HACIA LA PROBABILIDAD Y SU ENSEÑANZA

Para enseñar estadística y probabilidad es necesario que se analicen las actitudes y las creencias que adoptan los futuros profesores y los docentes que están en ejercicio, ya que son ellos los responsables de entregar los conocimientos a los estudiantes, principalmente en esta temática, ya que el currículo nacional (Mineduc, 2012) asigna poco tiempo a la enseñanza de la probabilidad, teniendo como consecuencia que no exista una aprehensión del conocimiento lo que conlleva a no motivar a los estudiantes a la realización, profundización y motivación en esta área matemática.

Es importante señalar que las actitudes son más elevadas en profesores en ejercicio, aunque tiende a empeorar con el uso de la enseñanza de la estadística (Estrada, Batanero y Fortuny, 2004). Lo anterior es debido a la dificultad que posee aquel contenido para los profesores, lo que conlleva a una necesidad de apoyo que deberían recibir de parte de los departamentos de didáctica y las facultades de educación hacia los profesores en ejercicio como también a los futuros docentes.

Según lo anterior, el profesor de matemática no está preparado en esta disciplina; por lo general en las Escuelas de formación de profesores de matemática el eje de Estadística y Probabilidad no ha tenido la importancia que se le otorga a otras temáticas y por ende en el ejercicio docente es una materia olvidada, con escasos conocimientos de probabilidad y actitudes poco favorables o positivas para utilizar los variados recursos y medios para su enseñanza.

Estrada y Batanero (2015), elaboran un cuestionario sobre las actitudes hacia la probabilidad, en la que consideran siete componentes específicos de las actitudes tanto hacia la probabilidad como hacia su enseñanza obteniéndose un modelo multidimensional. Los tres primeros componentes valoran la actitud hacia la probabilidad de los profesores y futuros profesores. Los tres siguientes componentes dirigidos principalmente a profesores valoran la actitud hacia los aspectos didácticos de la probabilidad. El último componente hace referencia al valor que se le da a la materia y su enseñanza, aspectos directamente relacionados. A continuación, se presentan los componentes ya mencionados:

- *Componente afectivo hacia la probabilidad AP*. Valora los sentimientos personales del sujeto hacia la Probabilidad, por ejemplo: agrado-desagrado hacia esta materia, miedo-confianza al iniciar su estudio o al resolver problemas, interés-desinterés por el tema; sentimientos positivos o negativos hacia la Probabilidad. Este componente ha sido considerado en las escalas de actitudes hacia la estadística.
- *Competencia cognitiva apreciada hacia la probabilidad CCP.* Valora la percepción de la propia capacidad, conocimientos y habilidades intelectuales en Probabilidad. También, presente en las escalas de actitudes hacia la estadística, debido a que cuando una materia guste a un sujeto, es posible que la encuentre difícil o piense que tiene poca capacidad para la misma. Será importante que un profesor tenga una buena percepción de su propia capacidad para formarse en una materia determinada.
- *Componente comportamental hacia la probabilidad CP.* Evalúa la tendencia a utilizar la probabilidad, a la toma de decisiones, la ayuda a otros compañeros, el uso que se hace de la Probabilidad.

- *Componente afectivo hacia la enseñanza de la probabilidad AE.* Valora los sentimientos personales hacia la enseñanza de la Probabilidad, que pueden variar (aunque estarán relacionados) con el componente afectivo hacia el tema. Este componente intenta medir el agrado-desagrado, miedo-confianza interés-desinterés por enseñar probabilidad.
- *Componente de competencia didáctica hacia la enseñanza de la probabilidad CDE.* Evalúa la percepción de la propia capacidad para enseñarla, resolver dificultades de los estudiantes, proponer buenas tareas, buscar recursos, etc. Un profesor puede pensar que tiene facilidad para aprender un tema, no obstante, puede sentirse capacitado o no para enseñarlo.
- *Componente comportamental hacia la enseñanza de la probabilidad CE*. Valora la tendencia a la acción didáctica: si el profesor trata o ha tratado o no de enseñar Probabilidad, si le da prioridad sobre otros temas, si piensa que debería posponerse en general.
- *Componente de valor hacia la probabilidad y su enseñanza VPE.* Se intenta evaluar el valor, utilidad y relevancia que el profesor concede a la probabilidad en la vida personal y profesional y a la formación del alumno en este tema, es decir a la inclusión de la enseñanza de la probabilidad en el currículo.

CAPÍTULO 3
METODOLOGÍA DE INVESTIGACIÓN

3.1 METODOLOGÍA DEL PROCESO DE ESTUDIO

Se presenta a continuación las tres fases pretendidas durante la investigación que han sido diseñadas para dar cumplimiento a los objetivos planteados y que se describirá con más precisión dentro de los estudios correspondientes

En la primera fase (año 2016) se lleva a cabo un análisis exhaustivo de las investigaciones previas sobre los conocimientos en probabilidades de estudiantes, de futuros profesores de matemática y de docentes que ejercen enseñando matemática.

En la segunda fase (año 2017) se elabora un cuestionario de conocimientos de probabilidad intuitiva y clásica dirigido a estudiantes de séptimo y octavo básico. La confección y selección de los ítems será analizada de acuerdo con investigaciones relacionadas, pruebas estandarizadas y creadas por los autores.

En la tercera fase (año 2018) se aplica el cuestionario sobre conocimientos de probabilidad en estudiantes de séptimo y octavo año de educación básica. Además, se analiza los resultados del cuestionario mediante un estudio descriptivo de las variables consideradas en el estudio.

3.2 MUESTRA Y PARTICIPANTES

Según lo estipulado en los objetivos de la investigación y en la hipótesis de la misma, se describe la población objetivo de los estudiantes de educación básica del establecimiento educacional, perteneciente a la región de la Araucanía. La muestra seleccionada considera a 331 estudiantes, de séptimo y octavo básico, clasificándose de la siguiente manera: 156 estudiantes pertenecientes a séptimo básico y 175 estudiantes de octavo año básico, todos ellos pertenecientes a un mismo colegio, particular gratuito, perteneciente a la ciudad de Temuco (ver Tabla 2). Todos los estudiantes realizaron el cuestionario en físico, es decir, utilizaron lápiz y papel para desarrollar la evaluación, en el horario de clases correspondiente a su asignatura de matemática.

Tabla 2. Nivel educativo de los estudiantes.

Nivel	Número de estudiantes (%)
Séptimo	156 (47,1%)
Octavo	175 (52,9%)

3.3 CUESTIONARIO SOBRE SIGNIFICADO INTUITIVO Y CLÁSICO DE LA PROBABILIDAD

Los ítems que se presentan en el cuestionario fueron elaborados para indagar sobre el conocimiento en probabilidades de los estudiantes de séptimo y octavo año básico (niños y niñas entre 12 y 13 años). Cada uno de los ítems fueron seleccionados por los estudios de Kahneman y Tversky (1972, 1982), Pollatsek, Well, Konold, Hardiman, y Conn (1987) Tversky y Kahneman (1974, 1980). Así mismo, se incorporan ítems construidos por los autores de esta investigación, adaptados al contexto de los estudiantes y nivel educativo. Este cuestionario consta de tres partes. La primera parte (ítem 1.1 al 1.9) consiste en asignar un valor de posibilidad de ocurrencia de algún suceso, siendo éste seccionado en dos partes, desde el ítem 1.1 hasta el 1.5, hay problemas relacionados con sucesos de la contingencia actual y desde el ítem 1.6 hasta el 1.9 los enunciados están relacionados a la estimación de sucesos probabilísticos, en donde deben aplicar conocimientos matemáticos para poder asignar el valor correspondiente. En todos los sucesos que se les presentan a los estudiantes deben responder mediante una escala de apreciación de 0 a 100 de probabilidad de ocurrencia según corresponda. La segunda parte que corresponde a los ítems 2 al 7 corresponde a selección múltiple, en donde en alguna de ellas deben señalar la alternativa que ellos consideran correctas. En la tercera parte los estudiantes deben argumentar matemáticamente las alternativas que seleccionaron.

3.3.1 CUESTIONARIO DE ÍTEMS DE ASIGNACIÓN DE PROBABILIDAD

Parte 1. Cuestionario de ítems de asignación de probabilidades

Ítem 1. Describe 9 enunciados de asignación de probabilidad, en que los estudiantes deben estimar la posibilidad de ocurrencia de cada uno de los eventos propuestos. Según lo anterior, los encuestados deben asignar los valores de suceso en la escala de 0 10 20 30 40 50 60 70 80 90 100 en los siguientes enunciados:

Ítem 1.1 Visitar un hospital, seleccionar un bebé y que sea de sexo masculino.

Este ítem se relaciona con el experimento aleatorio de lanzar una moneda, ya que al momento de calcular la posibilidad de ocurrencia de que sea cara (masculino), es $P(c) = \frac{1}{2}$ siendo el espacio muestral asociado $\Omega = \{\text{masculino, femenino}\} = \{\text{cara, sello}\}$ y la $P(C) = \frac{1}{2}$, por lo tanto, la probabilidad de que el bebé sea varón es de un 50%.
Así se espera que los estudiantes asignen un valor de 50.

Ítem 1.2 Llegar a los 80 años en Chile.

Según el informe de la Organización Mundial de la Salud (OMS) define la esperanza de vida como una estimación del promedio de años que vivirá un grupo de personas nacidas el mismo año, si las condiciones de mortalidad del país evaluado se mantienen constantes. Hacking (1995) señala que los primeros gobiernos en tener la precaución de controlar la estadística demográfica, para cuantificar y analizar si la población aumentaba, disminuía o no presentaba variaciones. El primer empleo de los datos estadísticos fue realizado en 1691 por Gaspar Neumann, que propuso destruir la antigua creencia popular de que en los años terminados en siete moría más gente que en los restantes. Con los cálculos que realizó Neumann, el astrónomo inglés Halley aplicó los conocimientos en un estudio sobre la vida humana. Los cálculos realizados por Halley sirvieron para sustentar las tablas de mortalidad que hoy utilizan algunas empresas aseguradoras; y con respecto a lo anterior es que se crea el concepto de esperanza de vida (Hacking, 1995). La OMS da a conocer que Chile es el país más longevo de américa latina, con una esperanza de vida de 80,5 años, seguido por Costa Rica y Cuba. (Medio de prensa escrita, Tiempo Real, Universidad de Concepción, 2017).
Se espera una asignación alta de a lo menos 70.

Ítem 1.3 Que un joven sea ingeniero si su papá es ingeniero.

Diversas investigaciones han indagado sobre este tipo de preguntas, ya que los encuestados se dejan influenciar por el razonamiento causal (Pollatsek, Well, Konold, Hardiman & Cobb, 1987; Tversky & Kahneman, 1980) en donde cada persona cualifica con un alto grado de probabilidad. Cada vez que la probabilidad condicional se presenta en contextos sociales, el conocimiento previo de los sucesos puede interferir en el cálculo de las probabilidades, sobre todo si no existe una clara comprensión e interpretación del lenguaje condicional (Díaz, C. 2007).

Se tiene que el suceso A es que el joven sea ingeniero (efecto) y el suceso B que el padre sea ingeniero (causa). Estamos en presencia de una relación causal que en términos simbólicos se puede expresar P (A| B) al momento de cuantificar la probabilidad de que ocurra el suceso A habiendo ya ocurrido el suceso B.

Se espera una asignación alta, sobre el valor de 75.

> **Ítem 1.4** En un grupo de 23 personas ¿Qué tan probable es que hallan dos personas que cumplan años el mismo día y mes?

Este enunciado es conocido como la paradoja del cumpleaños, en donde menciona que en un grupo de *n* personas, la probabilidad de encontrar a otra persona que cumpla años el mismo día y mismo mes es: $1 - \frac{365!}{365^n(365-n)!}$, en donde *n* equivale número de personas. En este caso, la probabilidad en el grupo de 23 personas corresponde a un 50,7%.

A modo general, se percibe que 23 días (fecha de cumpleaños de las 23 personas) en una fracción un tanto pequeña, frente al posible número de días distintos (365) del año para esperar repeticiones.

Se espera una asignación baja en este ítem, inferior a 20.

> **Ítem 1.5** Una familia se proyecta tener tres hijos, ¿qué tan probable es que los dos primeros sean hombre y el tercero mujer?

Para resolver este ítem se requiera a la aplicación de la regla de la multiplicación. Definiendo a los sucesos A_i: el hijo i-ésimo es hombre, con *i* = 1, 2, 3. Se considera que los sucesos son independientes, hay que obtener probabilísticamente los eventos P $(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1)\, P(A_2)\, P(A^c{}_3)$ = ½ x ½ x ½ = 1/8. Por consiguiente, se obtiene un 12,5% de probabilidad que, en una familia de tres hijos, los dos primeros sean varones.

El enunciado se puede relacionar con el experimento de las monedas, en donde se lanzan tres distinguibles y así poder calcular la probabilidad de que sea sello (hombre) la primera moneda, sello la segunda moneda y cara (mujer) la tercera moneda. Al de definir estos eventos M: tener un hijo masculino y F: tener un hijo femenino, el espacio muestral de este experimento es $\Omega = \{HHH, HHM, HMH, MHH, HMM, MHM, MMH, MMM\}$. Existe solo un caso favorable dentro de ocho posibilidades, en donde P (HHH) = $\frac{1}{8}$ = 0,125 que es equivalente al 12,5% de probabilidad de ocurrencia.
Se espera que los estudiantes asignen un valor bajo, de al menos 20.

Este ítem es una adaptación diferente al problema de los hijos o el problema del señor Smith (Gardner, 1959) Contreras, Batanero, Arteaga y Cañada (2014) señalan que la primera solución de manera intuitiva que se entrega es ½. Las personas que dan respuesta a este ítem no consideran los dos primeros sucesos, en donde la posibilidad de ocurrencia es independiente de la información entregada, y se enfocan en creer que el género del tercer hijo (hombre o mujer) son equiprobables. Es probable que en este enunciado sea considerado el valor 50 en el caso que dado los dos sucesos varones HH es independiente del sexo del tercer hijo, por lo tanto, la probabilidad es de 50% que sea hombre o mujer.

Ítem 1.6 Un profesor con 10 estudiantes dice que obtendría más grupos distintos formado de 2 estudiantes en vez de 8 estudiantes.

Kahneman, Slovic, y Tversky (1982) consideran que los sesgos están muy relacionados con la falta de capacidad de enumeración de todas las posibilidades en una operación de combinatoria, dentro de lo que se denomina, según los autores, heurística de disponibilidad, lo que conlleva a un efecto perjudicial al momento de calcular la probabilidad de un evento aleatorio. Para resolver este ítem hay que calcular por combinatoria el número de grupos formados por dos alumnos de 10 y ocho alumnos de 10, en donde se obtiene la misma cantidad de grupos, en donde se concluye que hay una misma probabilidad de ocurrencia. Según lo anterior, es esperable obtener una asignación baja de probabilidad de ocurrencia de este suceso.
Se espera que los estudiantes escojan un valor inferior a 10.

$$\binom{10}{2} = \frac{10!}{(10-2)!2!} = 45 \qquad\qquad \binom{10}{8} = \frac{10!}{(10-8)!8!} = 45$$

Otra manera de poder resolver las 45 maneras de seleccionar los grupos distintos es obteniendo la fila 10 del triángulo de Pascal:

1 10 **45** 120 210 252 210 120 **45** 10 1

Ítem 1.7 Si se lanza una moneda tres veces ¿Qué tan probable es obtener sello en el tercer lanzamiento si se sabe que los dos primeros lanzamientos fueron cara?

Para resolver este enunciado hay que tener en conocimiento que el resultado (cara o sello) del evento es independiente, ya que sólo se trabaja con una moneda, por lo que la probabilidad de que sea sello es de ½, aunque los lanzamientos anteriores sean cara, la probabilidad de ocurrencia sigue siendo la misma.

Ítem 1.8 En una encuesta de opinión el 25% está de acuerdo en enviar tareas a escolares para la casa. Si eliges al azar a cuatro estudiantes de tu colegio ¿Qué tan probable es que uno de ellos esté a favor del envío de tareas?

Para dar solución a este ítem, los estudiantes de los niveles 7º y 8º (12 y 13 años) podrían resolver de la siguiente manera: Pensar en el espacio muestral Ω={SNNN, SNNS, SNSN, SNSS, SSNN, SSSS, SSSN, SSSS, NNNN, NNNS, NNSN, NNSS,NSNN, NSNS, NSSN, NSSS}; siendo el evento N que no está de acuerdo y el evento S que si está de acuerdo con enviar tareas para la casa. A continuación, denotar el evento de interés B, para esto tenemos que B = {SNNN, NNSN, NNNS, NSNN}. Por lo anterior, para que puedan encontrar la probabilidad de que uno de los cuatro alumnos esté de acuerdo implica aplicar la Regla de Laplace o probabilidad clásica: P(B) = $\frac{N^{o}\ de\ casos\ favorables}{N^{o}\ de\ casos\ posibles} = \frac{4}{16}$ = 0,25. En esta solución el estudiante asume un 50% de probabilidad que un alumno esté de acuerdo con enviar tareas para la casa.

Una solución intuitiva para este nivel educativo puede ser utilizando la regla del producto, es decir, 4 × ¼ × ¾ × ¾ × ¾ = 0,421875. Cabe señalar, en el nivel educativo de tercero medio (16 años) los estudiantes pueden resolver este problema mediante el modelo de la probabilidad binomial, es decir, si la opinión de estar de acuerdo es de un 25% la probabilidad obtenida es de 42,1875% que uno de los cuatro estudiantes esté de acuerdo con el envío de tareas para el hogar.

Se espera una asignación para este ítem menor a 30, para los estudiantes de este nivel educativo.

Ítem 1.9 En un gimnasio hay 1000 personas y cada una de ellas lanza tres monedas. Aproximadamente, ¿Qué porcentaje de las personas obtendrían tres caras?

Este ítem corresponde a la aplicación la Ley de los Grandes Números (LGN), la cual dice que a medida que aumenta el número de repeticiones de un experimento aleatorio, la frecuencia relativa de un suceso se aproxima cada vez más a su probabilidad teórica. Al lanzar las tres monedas y que sean caras, su probabilidad se obtiene $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8} = 0{,}125$. La LGN señala que aproximadamente un 12,5% del total de personas obtendrán tres caras después de lanzar las monedas, es decir, 125 personas.

Se espera que los estudiantes asignen un valor a los más de 20.

3.3.2 CUESTIONARIO DE ÍTEMS DE SELECCIÓN MÚLTIPLE SOBRE INTUICIONES PROBABILÍSTICAS

Ítem 2. Si de una tómbola con pelotas enumeradas del 1 al 5, se sacan cinco pelotas con reposición ¿Qué es más probable que ocurra?
a) Que salga el numero 22222
b) Que salga el numero 12345
c) Que salga el numero 25314
d) Todas son igualmente probables

El enunciado es conocido como la falacia del jugador o falacia de Montecarlo. Esto es, que al ser una falacia lógica en donde se cree incorrectamente que los sucesos ya ocurridos afectan a los podrían ocurrir en relación con los juegos de azar. La alternativa correcta es la opción (d), debido a que la probabilidad de la secuencia 22222 es de un 0,032%, la probabilidad de la secuencia 12345 es de un 0,032% y la probabilidad de la secuencia 25314 es de un 0,032%, por lo tanto, todas las opciones tienen la misma posibilidad de ocurrencia.

Tversky y Kanheman (1974) han indagado este tipo de preguntas, llegando a la conclusión de "que los individuos consideran que un suceso aleatorio tiene menos posibilidad de ocurrir porque ha ocurrido durante cierto periodo", en este caso el valor 2 de la secuencia.

> **Ítem 3.** Se lanza una moneda 8 veces, obteniendo en orden los siguientes resultados: cara, sello, cara, sello, sello, sello, sello, sello. Si se lanza la moneda por novena vez, ¿qué es más probable que pase?
>
> a) Es más probable que salga cara, puesto que han salido demasiados sellos y ya es hora de que salga cara.
> b) Es más probable que salga sello, puesto que ha salido sello en cinco lanzamientos sucesivos.
> c) Es igual de probable que salga cara o sello

Para dar solución a este problema hay que identificar que es un evento independiente, debido a que solamente se trabajará con una sola moneda, así los eventos resultantes pueden ser cara (C) o sello (S) tiendo cada una ½ de probabilidad. Al ser solo una moneda, los resultados anteriores no tienen incidencia en el próximo lanzamiento, ya que la posibilidad de ocurrencia no se altera ni varía. Por lo tanto, la respuesta correcta corresponde a la alternativa (c).

Situaciones de este tipo han sido estudiadas por Serrano, Batanero, Ortíz & Cañizares (1998) en su investigación sobre posibilidad de ocurrencia de cinco monedas con 5 opciones dirigido a estudiantes de educación media, evalúa si los estudiantes usan la heurística de la representatividad en sus juicios sobre la probabilidad de obtener diferentes secuencias en el lanzamiento de una moneda.

> **Ítem 4.** Cindy y Trudy juegan tirando un dado normal. Si sale un 5 gana Cindy y si sale menos de 3 gana Trudy. ¿Cuántas veces habrá ganado cada uno, aproximadamente, después de tirar el dado 60 veces?
>
> a) Trudy y Cindy ganan el mismo número de veces
> b) Cindy gana el doble de veces que Trudy
> c) Trudy gana el doble de veces que Cindy
> d) Cindy gana 17 veces más que Trudy
> e) Trudy gana 17 veces más que Cindy

La alternativa correcta de este enunciado corresponde a la alternativa (c). Esto es, un dado normal tiene seis caras y la probabilidad de que salga 5 es de 1/6 por parte de Cindy. Al ser 60 lanzamientos, se debe multiplicar 1/6 por 60 da como producto 10. En el caso de Trudy gana cuando el dado es menor que 3 (1 o 2), en donde la probabilidad de obtener esos números es 2/6 y al ser lanzado 60 veces, hay que multiplicar 2/6 por 60 lo que se obtiene 20.

> **Ítem 5.** En una bolsa se ponen 4 bolas rojas, 4 azules y 2 verdes, y después se mezclan. Se sacan tres bolas fuera, resultando 2 rojas y 1 azul. A continuación, sacamos otra bola sin echar las anteriores. ¿De qué color es más probable que sea?
> a) El rojo tiene mayor probabilidad
> b) El azul tiene mayor probabilidad
> c) El verde tiene mayor probabilidad
> d) Todos los colores tienen la misma probabilidad

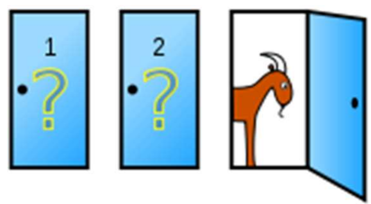
La alternativa correcta de este ítem es la letra (b). Este enunciado corresponde a un problema de asignación de probabilidades en extracción sin reemplazo. Para poder dar solución a este problema se requiere de un mayor razonamiento proporcional, ya que el encuestado tiene que comparar tres posibles sucesos que no son de igual probabilidad, además hay que considerar que el enunciado señala de una extracción sin reemplazo, lo que modifica la composición de la urna y el espacio muestral. En este ejercicio, es considerado el suceso previo, en donde produce que la siguiente extracción dependa de la anterior y de esa manera se puede comprobar si los encuestados consideran la información entregada previamente y el nuevo suceso es tratado como dependiente de los anteriores.

> **Ítem 6.** Eduardo desde pequeño mostró gran afición por el arte. Entro a estudiar a la universidad donde se destacó por su talento por la escritura y fotografía, transformándose en el mejor de su carrera. En la última década recorrió el mundo fotografiando y ayudando en los diversos desastres naturales ¿Cuál de estos sucesos tiene más probabilidad de ser cierta?
>
> a) Eduardo trabaja en un diario
> b) Eduardo trabaja en un diario y es voluntario de bomberos
> c) Ambos sucesos son igualmente de probables

Esta situación problemática es una adaptación de Tversky y Kahneman (1974) Para dar solución a este ítem hay que tener en cuenta las probabilidades de dos situaciones, a)

"Eduardo trabaja en un diario" b) Eduardo trabaja en un diario y es voluntario de bomberos", para que las ocurrencias de dos sucesos sean simultáneas, deben ser menor o igual que la probabilidad de ocurrencia de cada uno. La solución a este problema es la alternativa (a) en donde $P(A \cap B) \leq P(A)$ y $P(A \cap B) \leq P(B)$. Tversky y Kahneman (1974) señalan que la mayoría de quienes responden esta problemática utilizan la representatividad heurística en este tipo de pregunta, dejando de lado las propiedades de la probabilidad.

Ítem 7. Supón que estás en un concurso, y se te ofrece escoger entre tres puertas: detrás de una de ellas hay un auto, y detrás de las otras cabras. Escoges una puerta, digamos la n°1, y el presentador, que sabe lo que hay detrás de las puertas, abre otra, digamos la n°3, que contiene una cabra. Entonces te pregunta: ¿No prefieres escoger la n°2?



a) Es mejor no cambiar mi elección y quedarnos con la N°1 porque el presentador nos quiere confundir
b) Es mejor cambiar mi elección y elegir la N°2 porque es la única que el presentador no presta atención
c) Es mejor no cambiar mi elección y quedarnos con la N°1 porque ahora tengo 1/2 de probabilidad de ganar el auto.
d) Es mejor cambiar mi elección y elegir la N°2 porque ahora tengo 2/3 de probabilidad de ganar el auto
e) Da lo mismo cambiar o no de puerta la probabilidad sigue siendo 1/3

El ítem 7 es una situación problemática llamada el problema de Monty Hall. La construcción de las opciones (a) hasta la (e) fue producto de las respuestas de estudiantes de secundaria que participaron en el IV workshop de probabilidades en la Universidad Católica de la Santísima Concepción, en donde se busca que los estudiantes sean capaces de discriminar cada una de las opciones, en una clásica situación de concurso, en que deben elegir una puerta para así obtener el premio que está en sólo una de ellas.

Para poder resolver este problema hay que determinar la probabilidad que tiene cada una de las puertas (1 – 2 – 3) corresponde a 1/3 cada una. Al señalar que en la puerta 3 hay una cabra, la opción de ganar el premio estarán en las puertas 1 y 2, lo que conlleva que la alternativa correcta sea la (d), ya que el premio estará en dos de las puertas que es el evento seguro, porque ya se sabe que en la puerta 3 hay una cabra.

Batanero, Fernandes y Contreras (2009) realizaron un análisis semiótico de los objetos y procesos matemáticos implícitos en algunas soluciones correctas posibles del problema de Monty Hall. Describen los razonamientos erróneos más frecuentes en su solución y aportan con las posibilidades de uso de este problema en la enseñanza y formación de profesores; mediante una solución intuitiva, solución con diagrama de árbol, solución experimental y solución formal usando las propiedades de la regla de Laplace, probabilidad condicional y probabilidad total.

3.3.3 CUESTIONARIO DE ÍTEMS CON ARGUMENTACIÓN SOBRE PROBABILIDAD CLÁSICA

Ítem 8. Eduardo tiene en su caja 10 bolas blancas y 20 negras. Luis tiene en su caja 30 bolas blancas y 60 negras. Juegan una partida de azar. El ganador es el niño que saque primero una bola blanca. Si ambos sacan simultáneamente una bola blanca o una bola negra, ninguno gana, devuelven las bolas a las cajas y la partida continúa. Eduardo afirma que el juego no es justo porque en la caja de Luis hay más bolas blancas que en la suya.

ARGUMENTA

a) El juego es justo
b) Luis tiene más ventaja
c) Eduardo tiene más ventaja

La alternativa correcta de este problema corresponde a la letra (a), ya que este ítem busca que los encuestados sean capaces de equiparar la probabilidad de extracción de las bolas de color blanco, aunque Eduardo tiene menor cantidad de bolas blancas en comparación con las negras, la probabilidad de extraer una de color blanco es de 1/3, ya que son 10 blancas dentro de un total de 30. Las opciones que tiene Luis de sacar la bola blanca es de 30 dentro de un total de 90, aunque tiene más bolas blancas, la probabilidad de extracción, al igual que Eduardo corresponde a 1/3, lo que conlleva a que el juego sea justo.

Este ítem corresponde a un estudio de Vásquez y Alsina (2017), en el que analizaron los resultados de profesores que enseñan matemática.

Ítem 9. Hemos lanzado un dado rojo y otro azul y sabemos que el producto de los dos números obtenidos ha sido 12. La probabilidad de que alguno de los dos números sea un 6 es de: ARGUMENTA

		Nº dado Rojo					
		1	2	3	4	5	6
Nº dado Azul	1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
	2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
	3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
	4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
	5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
	6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

a) 4/36
b) 2/36
c) 4/12
d) 2/4

Esta situación de juego es una adaptación de Díaz (2007) y Contreras (2011) en donde los estudiantes deben aplicar la probabilidad condicional. La repuesta correcta de este ítem corresponde a la alternativa (d). Una solución intuitiva sería observar que de los 36 pares de resultados posibles hay cuatro pares que cumplen la condición que el producto de ambos dados sea 12 y establecer que sólo dos de los cuatro tiene la cara 6, así la probabilidad es 2/4. Otra solución es dada en la educación media de manera formal por la probabilidad condicional, y consiste en definir el suceso A "el producto de los dos números es 12 y el suceso condicionado B "uno de los dos números es 6". El espacio muestral en este caso es restringido a la condición de {(2,6), (3,4), (4,3), (6,2)}. Los sucesos favorables que al caso condicionado serán {(2,6), (6,2)}. La equiprobabilidad de los pares de los factores produce que el espacio muestral de los productos permite que se pueda poner en ejecución la regla de Laplace para así obtener P(A) = 4/36 y $P(A \cap B)$ = 2/36.

Por lo tanto, la resolución de la probabilidad condicional es: $\mathrm{P}(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P\ (A)} = \frac{2/36}{4/36} = \frac{2}{4}$

Ítem 10. Se muestran los resultados de una encuesta realizada a 60 personas, sobre la preferencia de mermeladas, clasificadas en no dietética y dietética.

Mermelada

	No dietética	Dietética	
Mujer	6	24	
Hombre	18	12	

Al seleccionar a uno de estos encuestados al azar, la probabilidad de que sea hombre y prefiera mermelada no dietética es:

ARGUMENTA

a) 18/24
b) 18/30
c) 18/60
d) 30/60 × 24/60
e) 1/18

Este ítem es una adaptación de un problema de la Prueba de Selección Universitaria (PSU 2017) en donde los estudiantes deben aplicar los conocimientos relacionados con la probabilidad del producto o regla de la multiplicación, en este caso que sea hombre (30 encuestados) y que prefiera la mermelada no dietética (18 preferencias). Para resolver este ítem hay que clasificar la información que es otorgada, es decir, la probabilidad que se indica es P = 18/60. Por consiguiente, la alternativa correcta de este ítem es la (c).

Ítem 11. En una encuesta de opinión se consulta a tres alumnos del colegio si están o no de acuerdo con la portada de la página web del colegio.
¿Qué tan probable es que uno de los tres alumnos esté de acuerdo?

ARGUMENTA

Este ítem tiene como finalidad medir y conocer los argumentos y razonamientos de los estudiantes frente a este ejercicio, para esto es necesario que ellos puedan visualizar el espacio muestral con los siguientes sucesos equiprobables Ω={AAA, AAN, ANA, NAA, ANN, NAN, NNA, NNN}; Para esto, los estudiantes encuestados deben proyectar las ocho combinaciones, en donde deben clasificar las opciones en que uno no esté de acuerdo, para esto tenemos que B Ω={ANN, NAN, NNA}. Por lo anterior, para que puedan encontrar la probabilidad de que uno de los tres alumnos esté de acuerdo se debe aplicar la Regla de Laplace o probabilidad clásica: P(B) = $\frac{N^{\underline{o}}\ de\ casos\ favorables}{N^{\underline{o}}\ de\ casos\ posibles} = \frac{3}{8}$ = 0,375; Por lo tanto, la probabilidad de que uno de los tres estudiantes esté de acuerdo con el diseño de la página web del colegio es de un 37,5% siendo esta la repuesta correcta de esta situación problemática.

CAPÍTULO 4
ANÁLISIS DE RESULTADOS

4.1 RESULTADOS DE ÍTEMS DE ASIGNACIÓN DE PROBABILIDADES

El estudio inicial acerca de la asignación de probabilidades intuitivas se realizó con 331 estudiantes de primaria. La aplicación de un cuestionario fue contestada con lápiz y papel en una sesión de la jornada de la mañana en un establecimiento educacional. En lo que sigue se muestran los resultados de los ítems 1.1 a 1.9, representado en gráficos de barras con valores de asignación de probabilidad.

Ítem 1.1 Visitar un hospital, seleccionar un bebé y que sea de sexo masculino.

En la Figura 3 se puede apreciar que 71,9% de los estudiantes asignan un valor de 50 de probabilidad de que elegir un bebé en el hospital y que sea varón. Como primera opción de respuesta innata que tienen los encuestados corresponde a ½, considerando que el espacio muestral es equiprobable (niña y niño). Tversky y Kahneman (1974) señalan que, ante este tipo de preguntas de simples respuestas existe un sesgo predecible, en donde las personas omiten los datos estadísticos reales, para esta situación en Chile los recién nacidos correspondieron a 50,97% fue para hombres y 49,02% a mujeres (Informe INE 2018). Se puede apreciar también que solo el 14,4% de los encuestados consideraron una opción bajo el valor 50.

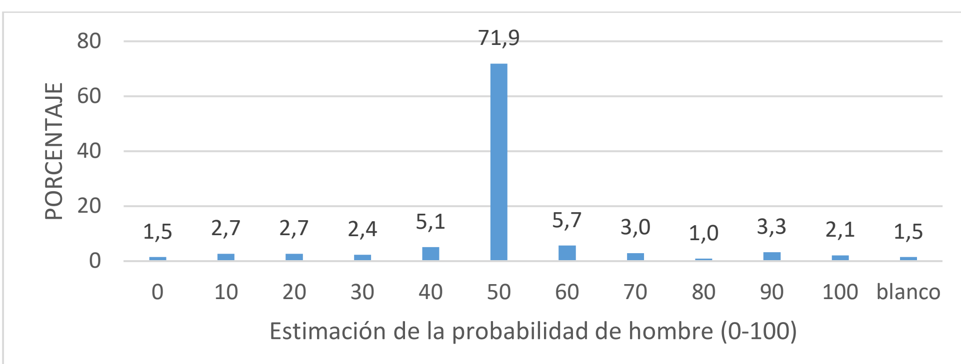


Figura 3. Porcentaje de respuestas al ítem 1.1 según estimación de la probabilidad (respuesta esperada de 50), n = 331

Ítem 1.2 Llegar a los 80 años de edad en Chile.

En la Figura 4 se puede apreciar que 22% de los estudiantes considera que la esperanza de vida en Chile es de 80 años, según los datos entregados el año 2015 por la Organización Panamericana de la Salud la esperanza de vida en nuestro país es 80 años para los varones y 85 años para las mujeres. Cabe destacar, que el 44,7% de los alumnos señala valores bajo los 80 años de esperanza de vida en nuestro país.

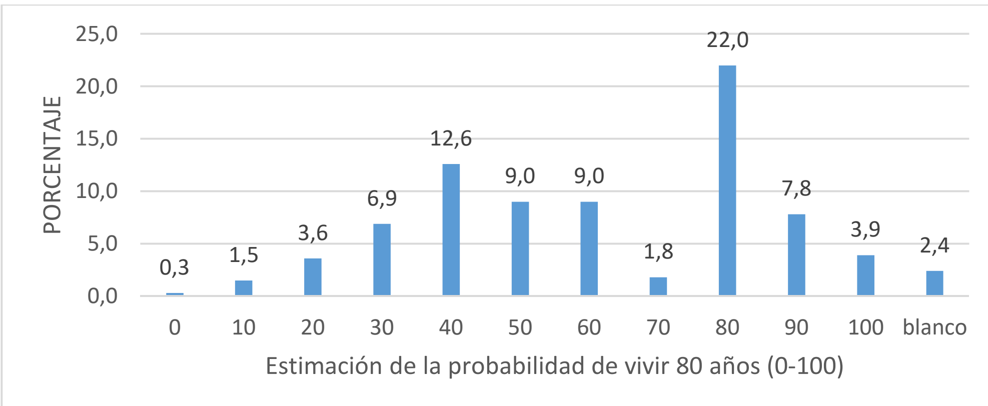


Figura 4. Porcentaje de respuestas al ítem 1.2 según estimación de la probabilidad (respuesta esperada al menos de 70), *n* = 331

Ítem 1.3 Que un joven sea ingeniero si su padre es ingeniero.

La Figura 5 indica que un 18,3% de los estudiantes exhiben un razonamiento causal, asignando valores al menos de 80 de la ocurrencia del suceso que un hijo sea ingeniero si su padre es ingeniero.

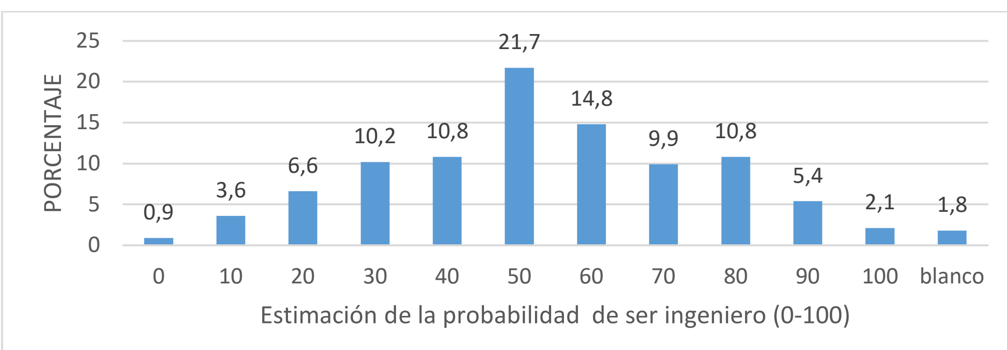


Figura 5. Porcentaje de respuestas al ítem 1.3 según estimación de la probabilidad (respuesta esperada sobre 75), *n* = 331

Las respuestas de los estudiantes no concuerdan con lo que señala Pollatsek, et al. (1987), que indica que la mayoría de los encuestados encontraban altamente probable esta situación. Cabe señalar, que el 21,7% de los estudiantes asignaron un valor de 50 a este evento y un 32,1% del grupo asignó valores bajo 50. En consecuencia, los estudiantes de este nivel educativo no utilizan un razonamiento causal al estimar la probabilidad bajo la condición que el padre es ingeniero.

> **Ítem 1.4** En un grupo de 23 personas, ¿qué tan probable es que hallan dos personas que cumplan años el mismo día y mes?

Como se evidencia en la Figura 6 el 34,4% de los estudiantes asignan un valor de 10 de probabilidad al suceso que dos personas cumplan años en la misma fecha. Sólo 8,7% asignó valor de 50 a la ocurrencia del evento. Tversky y Kahneman (1974) en su estudio han llegado a la conclusión de que las personas que responden este tipo de preguntas entregan una baja probabilidad, según sean sus experiencias previas.

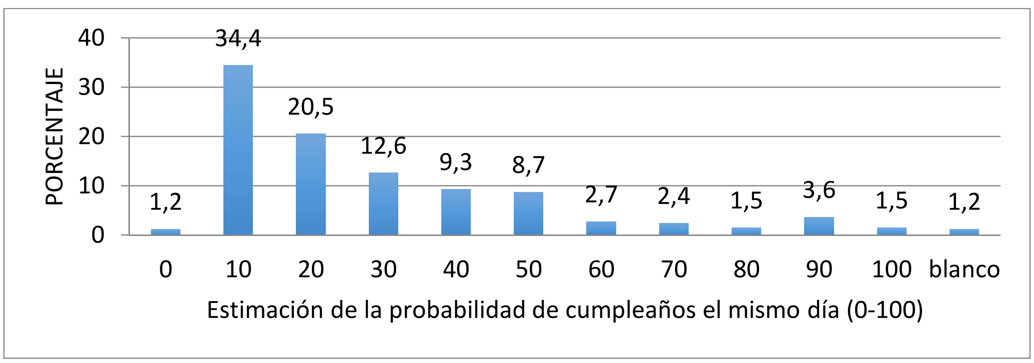


Figura 6. Porcentaje de respuestas al ítem 1.4 según estimación de la probabilidad (respuesta esperada menos de 20), *n* = 331

> **Ítem 1.5** Una familia se proyecta tener tres hijos, ¿qué tan probable es que los dos primeros sean hombres y el tercero sea mujer?

Se observa en la Figura 7 que el 25,6% de los estudiantes asigna erróneamente un valor de 50 a la probabilidad de ocurrencia de que el tercer hijo sea de sexo femenino, esta elección según Contreras, Batanero, Arteaga y Cañadas (2014) se debe a que la primera opción es elegir entre si es hombre o mujer, asignando el valor de ½ como sucesos independientes. Fox y Levav (2004) señalan que en problemas como este ítem existe confusión entre la probabilidad condicional y conjunta que puede llevar a que se cometa tal error. Es importante considerar que el 65,9% de los estudiantes asignaron un valor de probabilidad igual o inferior a 40. El 0,9% de los alumnos asignó un valor de 100 que el tercer hijo sea mujer. Un 20,7% de quienes respondieron el cuestionario asigna un valor igual o inferior a 20 de probabilidad. La respuesta correcta es de 1/8 o 0,125 obtenida de forma intuitiva por la Regla de Laplace o al considerar la probabilidad del producto y la independencia de sucesos, conceptos desarrollados en la educación media. La Figura 6 nos muestra que sólo un 18,3% de los estudiantes asignan valores entre 10 y 20. Otra dificultad que produjo errores es que no haya total comprensión de lo que se está leyendo en la información que el ítem proporciona, ya que tal como ocurrió en la investigación de Pollatsek et al. (1987) consideró que varias de las dificultades que las personas tienen con la comprensión de la probabilidad condicional puede ser por como son redactados los enunciados.

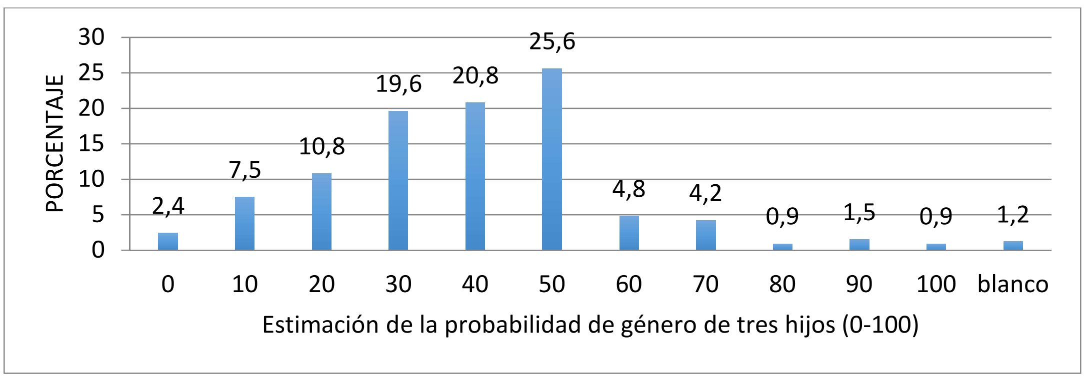


Figura 7. Porcentaje de respuestas al ítem 1.5 según estimación de la probabilidad (respuesta esperada bajo 20), n = 331

> **Ítem 1.6** Un profesor con 10 estudiantes dice que obtendría más grupos distintos formado de 2 estudiantes en vez de 8 estudiantes

Se observa en la Figura 8 que sólo un 4,2% de los estudiantes asignaron un valor menor o igual a 10, lo cual es cercano a la solución correcta utilizando la definición de combinatoria para indicar que hay la misma cantidad de subgrupos tomados de dos que de ocho estudiantes. Por otro lado, un 29,6% de los estudiantes asignaron un valor de 100 de probabilidad de ocurrencia del suceso indicado en el ítem. Un 24,3% de los alumnos considera que la posibilidad de ocurrencia oscilaría entre los valores 60 y 90, siendo valores muy dispersos en comparación al valor real.

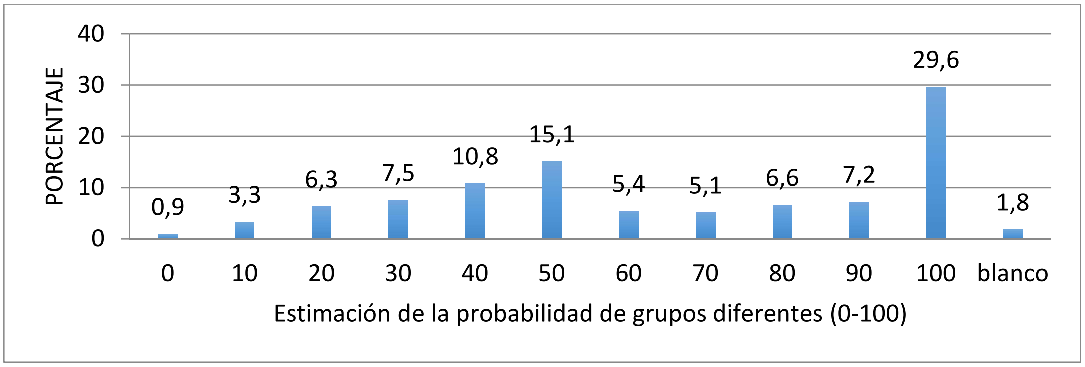


Figura 8. Porcentaje de respuestas al ítem 1.6 según estimación de la probabilidad (respuesta esperada bajo 10), n = 331

Ítem 1.7 Si se lanza una moneda tres veces, ¿qué tan probable es obtener sello en el tercer lanzamiento si se sabe que los dos primeros lanzamientos fueron caras?

En la Figura 9 se puede apreciar que 49,2% de los estudiantes asignaron un valor de 50 de probabilidad de obtener sello en el tercer lanzamiento, respuesta que es correcta, debido a que las opciones que se presentan son independientes entre sí (cara y sello). Además, un 33,6% otorgó un valor inferior a 50, destacando que 12% declaró valores entre 10 y 20 de probabilidad de ocurrencia, y que puede ser explicado al pensar el suceso CCS como uno de los ocho sucesos del espacio muestral sin atender a la condicionalidad del problema.

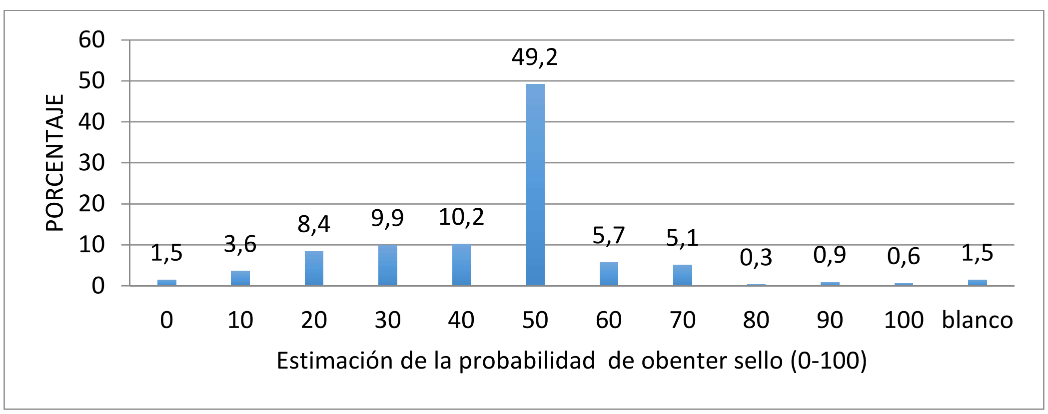


Figura 9. Porcentaje de respuestas al ítem 1.7 según estimación de la probabilidad (respuesta esperada valor 50), n = 331

Ítem 1.8 En una encuesta de opinión el 25% está de acuerdo en enviar tareas escolares para la casa. Si eliges al azar a cuatro estudiantes de tu colegio, ¿qué tan probable es que uno de ellos esté a favor del envío de tareas?

La Figura 10 muestra que sólo 13,2% de los estudiantes asignaron valores 40 y 50, siendo el valor correcto de probabilidad 42,1875 que un estudiante esté a favor del envío de tareas a casa, bajo el supuesto que hay 25% de probabilidad que un estudiante esté de acuerdo con el envío de tareas. Además, un 30,4% asignaron valores 20 y 30 que puede explicarse al considerar uno de cuatro alumnos (valor de probabilidad 25) a favor de la medida.

El 38,2% de los estudiantes otorgaron valores inferiores a 20 de probabilidad a la ocurrencia del evento de encontrar a un estudiante a favor de las tareas, tema controversial muy debatido en la actualidad por estudiantes y apoderados. Hacemos notar que 12,6% de los alumnos asigna un valor de 50 de probabilidad, considerando el evento como algo independiente, es decir que puede estar o no favor del envío de tareas al hogar existiendo así ½ de opciones de encontrar a alguien con aquella postura.

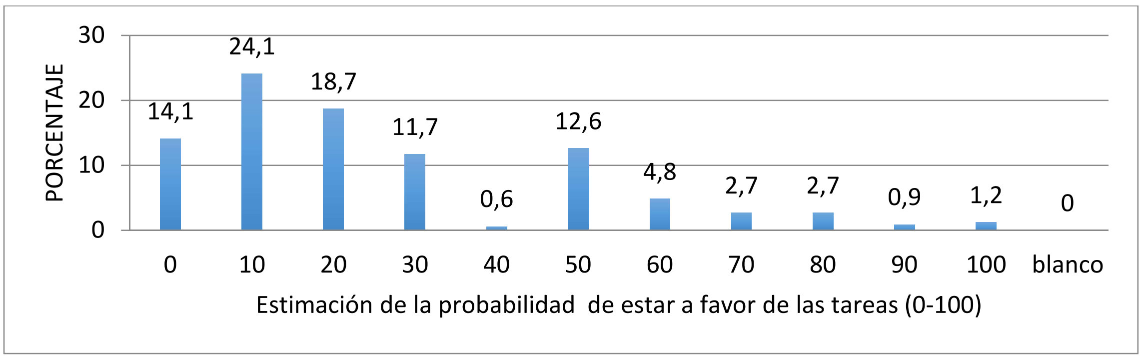


Figura 10. Porcentaje de respuestas al ítem 1.8 según estimación de la probabilidad (respuesta esperada menor a 30), *n* = 331

Ítem 1.9 En un gimnasio hay 1000 personas y cada una de ellas lanza 3 monedas. Aproximadamente, ¿qué porcentaje de las personas obtendrían tres caras?

En la Figura 11 se puede apreciar que solamente el 6,3% de los estudiantes asignaron un valor de 10 de probabilidad de que saldrán tres caras a un grupo de personas, respuesta correcta al considerar que hay un caso CCC de los ocho posibles del espacio muestral de las tres monedas. También, un 26,1% de los estudiantes asigna valores entre 30 y 40 a la probabilidad de ocurrencia de este evento. No obstante, un 54,5% asigna valores mayores o igual a 50. Según Parraguez, Gea, Díaz y Batanero (2017) los futuros profesores de la educación básica parecen no comprender la ley de los grandes números y le dificulta conectar la probabilidad experimental con la probabilidad teórica mediante el significado frecuencial de la probabilidad.

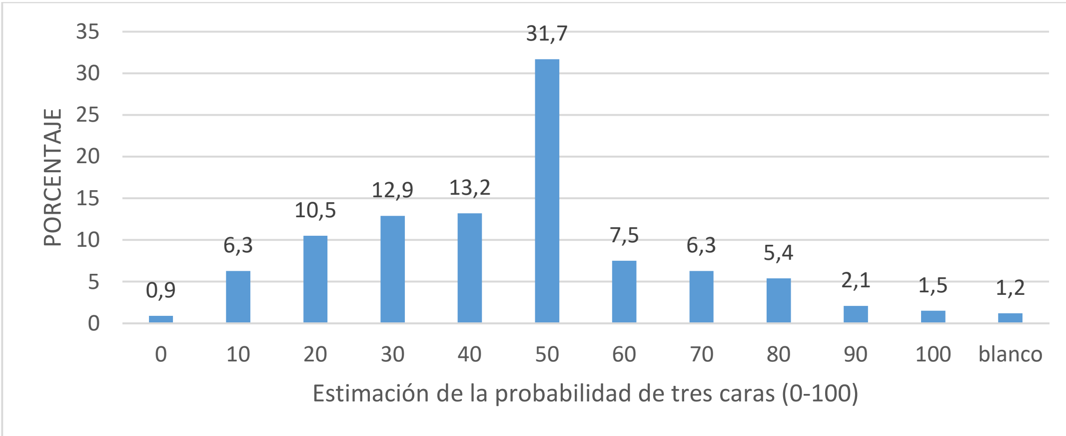


Figura 11. Porcentaje de respuestas al ítem 1.9 según estimación de la probabilidad (respuesta esperada bajo 10), *n* = 331

4.2 RESULTADOS DE ÍTEMS DE SELECCIÓN MÚLTIPLE SOBRE INTUICIONES PROBABILÍSTICAS

Se presentan los resultados de los ítems 2 al 7.

> **Ítem 2.** Si de una tómbola con pelotas enumeradas del 1 al 5, se sacan cinco pelotas con reposición ¿Qué es más probable que ocurra?
> a) Que salga el numero 22222
> b) Que salga el numero 12345
> c) Que salga el numero 25314
> **d) Todas son igualmente probables**

En la Figura 12 se puede apreciar que 69,7% de los estudiantes seleccionan la alternativa (d) que corresponde a la respuesta correcta, en cambio 27,3% de los participantes optan por las alternativas (a), (b) y (c). Las investigaciones de Tversky y Kaneheman (1974) indican como error frecuente que los estudiantes crean que los sucesos pasados pueden afectar en los que ya vienen en lo relativo en actividades aleatorias; suponiendo más probable que salgan números en orden aleatorio (alternativa c) que números ordenados o repetidos (alternativas a y b).

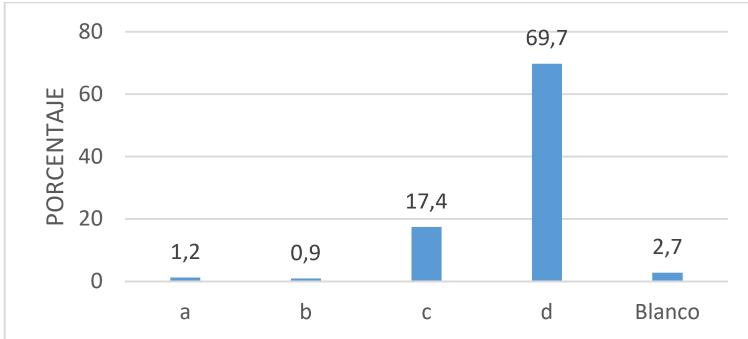


Figura 12. Porcentaje de respuestas al ítem 2, $n = 331$

La Tabla 3 muestra los resultados de las respuestas del ítem 2 categorizados por nivel educativo, observando que independiente del nivel de séptimo u octavo año la mayoría de los estudiantes responden correctamente a esta situación problemática. La diferencia que existe entre ambos niveles es de un 8,1%.

Tabla 3. Resultados del ítem 2 según nivel educativo

	Séptimo	Octavo	Total
a	0,6	0,6	1,2
b	3,0	6,0	9,0
c	9,9	7,5	17,4
d	**30,8**	**38,9**	**69,7**
Blanco	1,2	1,5	2,7
Total			100

Ítem 3. Se lanza una moneda 8 veces, obteniendo en orden los siguientes resultados: cara, sello, cara, sello, sello, sello, sello, sello. Si se lanza la moneda por novena vez, ¿qué es más probable que pase?

a) Es más probable que salga cara, puesto que han salido demasiados sellos y ya es hora de que salga cara.
b) Es más probable que salga sello, puesto que ha salido sello en cinco lanzamientos sucesivos.
c) Es igual de probable que salga cara o sello

En la Figura 13 se observa que 77,9% de los estudiantes seleccionaron la alternativa correcta (c), señalando que existe la misma probabilidad en que salga cara o sello, sin considerar los resultados de los lanzamientos anteriores. Además, es posible visualizar que el 20,7% de los estudiantes creen que si inciden los sucesos anteriores en el noveno lanzamiento (alternativas a y b), situación similar al presentado en el ítem 2. Si comparamos los resultados de la investigación de Vásquez y Alsina (2017) un 36,6% de los profesores de educación básica en ejercicio que enseñan matemática dieron una respuesta correcta, en cambio en nuestro estudio obtuvimos mejores resultados.

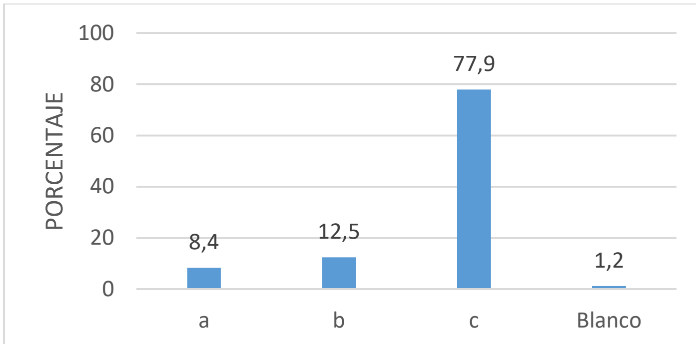


Figura 13. Porcentaje de respuestas al ítem 3, *n* = 331

La Tabla 4 muestra que la mayoría de los estudiantes responden correctamente este ítem, independientemente del nivel que están ejerciendo, la diferencia que hay entre las respuestas correctas es mínima de 1,2%.

Tabla 4. Resultados del ítem 3 según nivel educativo

	Séptimo	Octavo	Total
a	3,3	5,1	8,4
b	4,9	7,6	12,5
c	**38,3**	**39,5**	**77,9**
Blanco	0,6	0,6	1,2
Total			100

Ítem 4. Cindy y Trudy juegan tirando un dado normal. Si sale un 5 gana Cindy y si sale menos de 3 gana Trudy. ¿Cuántas veces habrá ganado cada uno, aproximadamente, después de tirar el dado 60 veces?

a) Trudy y Cindy ganan el mismo número de veces
b) Cindy gana el doble de veces que Trudy
c) Trudy gana el doble de veces que Cindy
d) Cindy gana 17 veces más que Trudy
e) Trudy gana 17 veces más que Cindy

En la Figura 14 se puede observar que 36,8% de los estudiantes señalan correctamente que Trudy gana el doble de veces que Cindy (alternativa c). Los distractores fueron similares en porcentaje de respuestas, 18,1% de los estudiantes indicaron la alternativa (a) que Trudy y Cindy ganan el mismo número de veces, seguido de 17,7% seleccionaron que Trudy gana 17 veces más que Cindy (alternativa e). Los resultados de Bastías (2017) fueron mejores con profesores de matemática alcanzando 79,9% de respuestas correctas, lo que permite dilucidar que tener la formación matemática otorga el uso de propiedades de la regla de Laplace y esperanza matemática.

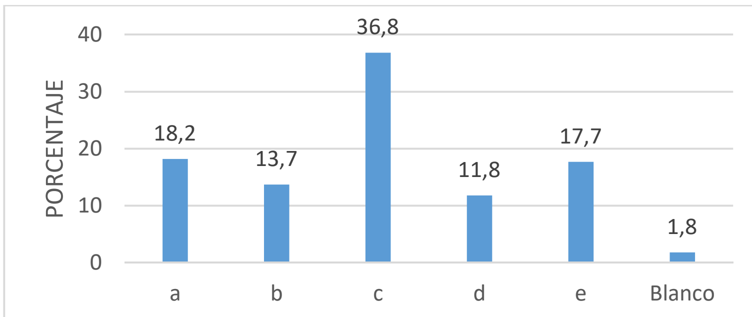


Figura 14. Porcentaje de respuestas al ítem 4, $n = 331$

La Tabla 5 indica que la cantidad de estudiantes que respondieron correctamente son similares en ambos niveles de 7° y 8°, presentando sólo una diferencia de 2,4% a pesar de que hubo más variedad de alternativas escogidas por ellos, aun así, en cada una de las respuestas elegidas por nivel es mínima la diferencia.

Tabla 5. Resultados del ítem 4 según nivel educativo

	7mo	8vo	Total
a	10,3	7,9	18,2
b	5,8	7,9	13,7
c	**17,2**	**19,6**	**36,8**
d	5,8	6,0	11,8
e	6,9	10,8	17,7
Blanco	1,2	0,6	1,8
Total			100

Ítem 5. En una bolsa se ponen 4 bolas rojas, 4 azules y 2 verdes, y después se mezclan. Se sacan tres bolas fuera, resultando 2 rojas y 1 azul. A continuación, sacamos otra bola sin echar las anteriores. ¿De qué color es más probable que sea?

a) El rojo tiene mayor probabilidad
b) El azul tiene mayor probabilidad
c) El verde tiene mayor probabilidad
d) Todos los colores tienen la misma probabilidad

En la Figura 15 se aprecia que 52,5% de los estudiantes señalaron que la bola de color azul tiene mayor probabilidad de salir en una segunda extracción sin reemplazo (opción b correcta), resultados similares obtenidos por Cañizares (1997) de 50% con futuros profesores de matemática. Los distractores en el problema de razonamiento proporcional asignando probabilidades en extracciones sin reemplazo provocó que 26,1% de los alumnos escogiera la alternativa (d), ya que es la opción de equiprobabilidad, entendiendo así que al ser bastante baja la diferencia de las bolas de los distintos colores que hay dentro de la urna, no existe mayor influencia al haber mayor o menor probabilidad de extraer una de las bolas. En el caso con profesores de matemática 91,5% respondieron correctamente (Bastías, 2017), teniendo así una diferencia considerable en estos resultados.

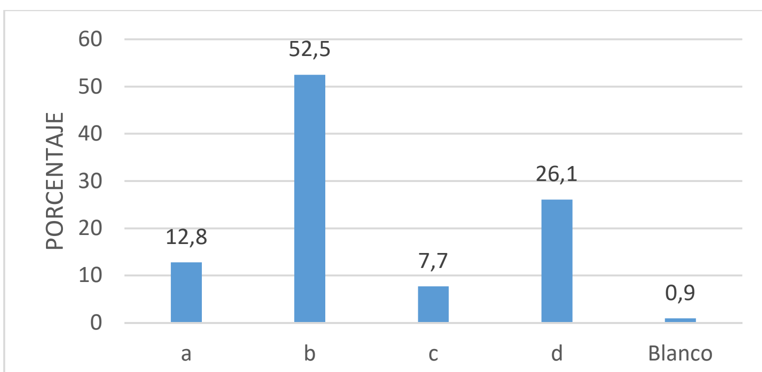


Figura 15. Porcentaje de respuestas al ítem 5, $n = 331$

La Tabla 6 muestra que los estudiantes que han seleccionado la alternativa correcta es similar a pesar del nivel educativo que están cursando, teniendo así una diferencia de un 4,3%, y lo mismo ocurre con las demás repuestas, las alternativas que ellos seleccionaron no indica alguna diferencia según el nivel de 7° y 8° año de educación básica.

Tabla 6. Resultados del ítem 5 según nivel educativo

	Séptimo	Octavo	Total
a	5,5	7,3	12,8
b	**24,1**	**28,4**	**52,5**
c	3,1	4,6	7,7
d	14,1	12,0	26,1
Blanco	0,3	0,6	0,9
Total			100

Ítem 6. Eduardo desde pequeño mostró gran afición por el arte. Entro a estudiar a la universidad donde se destacó por su talento por la escritura y fotografía, transformándose en el mejor de su carrera. En la última década recorrió el mundo fotografiando y ayudando en los diversos desastres naturales ¿Cuál de estos sucesos tiene más probabilidad de ser cierta?

a) Eduardo trabaja en un diario
b) Eduardo trabaja en un diario y es voluntario de bomberos
c) Ambos sucesos son igualmente de probables.

En la Figura 16 podemos observar que el 35,3% de los estudiantes ha seleccionado la alternativa (a), el 23,8% considera correcta la alternativa (b) y el 39,8% cree correcta la alternativa (c). Estos resultados discrepan de los obtenidos por Tversky y Kaneheman (1974) encontrando que la mayoría de los encuestados escogen la alternativa (b) influenciándose por la heurística de la representatividad en este tipo de preguntas, dejando de lado las propiedades de la probabilidad.

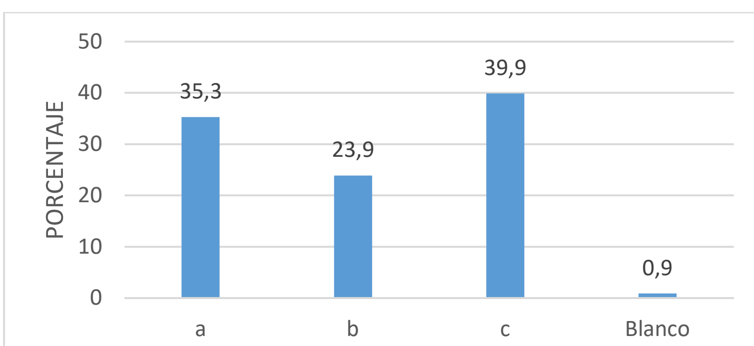


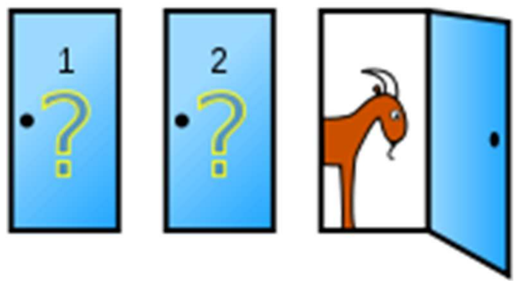
Figura 16. Porcentaje de respuestas al ítem 6, n = 331

La Tabla 7 muestra que en este ítem hubo diferencias en las respuestas en lo que respecta al nivel educativo de los estudiantes, siendo mayores con 8,9% los estudiantes de nivel 8°.

Tabla 7. Resultados por nivel ítem 6.

	Séptimo	Octavo	Total
a	**13,2**	**22,1**	**35,3**
b	9,7	14,2	23,9
c	24,2	15,7	39,9
Blanco	0,3	0,6	0,9
Total			100

Ítem 7. Supón que estás en un concurso, y se te ofrece escoger entre tres puertas: detrás de una de ellas hay un auto, y detrás de las otras cabras. Escoges una puerta, digamos la n°1, y el presentador, que sabe lo que hay detrás de las puertas, abre otra, digamos la n°3, que contiene una cabra. Entonces te pregunta: ¿No prefieres escoger la n°2?



a) Es mejor no cambiar mi elección y quedarnos con la N°1 porque el presentador nos quiere confundir
b) Es mejor cambiar mi elección y elegir la N°2 porque es la única que el presentador no presta atención
c) Es mejor no cambiar mi elección y quedarnos con la N°1 porque ahora tengo 1/2 de probabilidad de ganar el auto
d) Es mejor cambiar mi elección y elegir la N°2 porque ahora tengo 2/3 de probabilidad de ganar el auto
e) Da lo mismo cambiar o no de puerta la probabilidad sigue siendo 1/3.

En la Figura 17 se puede apreciar que solamente 11,1% de los estudiantes seleccionaron la alternativa correcta (d). Llama la atención que hubo un 34,1% de los alumnos que indicaron que “es mejor no cambiar mi elección y quedarnos con la N°1 porque ahora tengo 1/2 de probabilidad de ganar el auto” (opción c), seguido de 32,9% de los estudiantes que optaron por la alternativa a) asociado a la percepción que el presentador intenta confundir o distraer al participante.

En cambio, 15,4% de los estudiantes considera que “da lo mismo cambiar o no de puerta la probabilidad sigue siendo 1/3” (opción e).

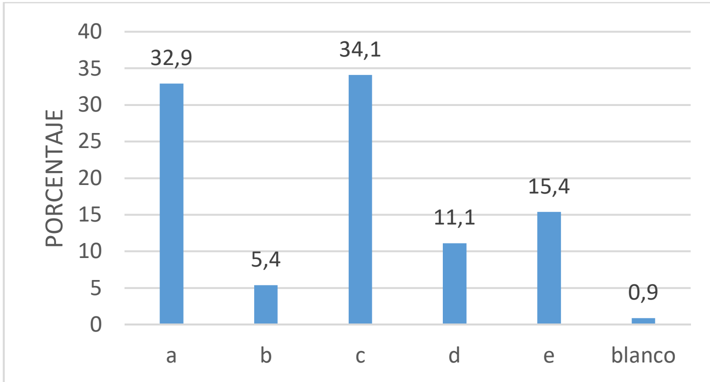


Figura 17. Porcentaje de respuestas al ítem 7, *n* = 331

La Tabla 8 no muestra diferencia de porcentajes de respuestas en la selección múltiple, en el caso de la respuesta correcta la diferencia es de 3,9% para los estudiantes de nivel 8°.

Tabla 8. Resultados por nivel ítem 7

	Séptimo	Octavo	Total
a	17,2	15,7	32,9
b	2,7	2,7	5,4
c	14,6	19,7	34,3
d	**3,6**	**7,5**	**11,1**
e	8,1	7,3	15,4
Blanco	0,3	0,6	0,9
Total			100

Así, las diferencias entre los dos niveles son mínimas, siendo los ítems 2 y 6 las de mayores diferencias con 8,1% y 8,9% respectivamente (ver Figura 18).

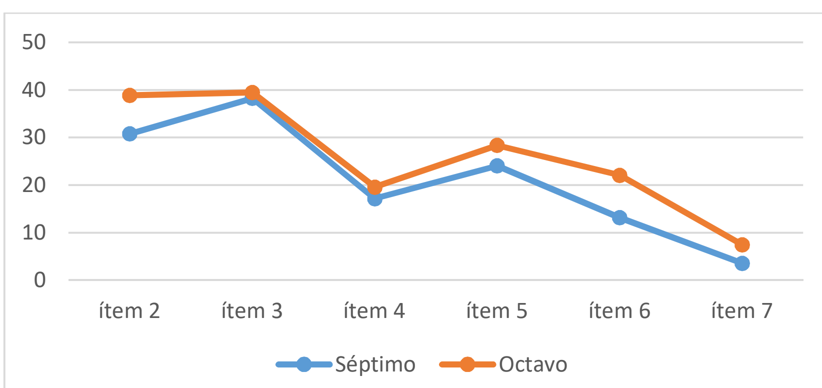


Figura 18. Porcentajes de respuestas correctas ítems 2 a 7 según nivel educativo

4.3 RESULTADOS DE ÍTEMS CON ARGUMENTACIÓN SOBRE PROBABILIDAD CLÁSICA

A continuación, se presentan las respuestas a cuatro problemas realizados por 331 estudiantes de la educación básica.

> **Ítem 8.** Argumenta. Eduardo tiene en su caja 10 bolas blancas y 20 negras. Luis tiene en su caja 30 bolas blancas y 60 negras. Juegan una partida de azar. El ganador es el niño que saque primero una bola blanca. Si ambos sacan simultáneamente una bola blanca o una bola negra, ninguno gana, devuelven las bolas a las cajas y la partida continúa. Eduardo afirma que el juego no es justo porque en la caja de Luis hay más bolas blancas que en la suya.
>
> **a) El juego es justo**
> b) Luis tiene más ventaja
> c) Eduardo tiene más ventaja

El 35,3% de los estudiantes responde correctamente que efectivamente el juego es justo entre Luis y Eduardo (ver Figura 22). A pesar de que el espacio muestral de cada uno de ellos es distinto en cantidad, pero no en proporcionalidad, por lo tanto, existe la misma probabilidad de 1/3 en obtener una bola blanca (opción a). Hubo respuestas que si bien aplicaron la proporcionalidad no consideran el espacio muestral adecuado, es decir, en el caso de Luis consideraron 10/20 y para Luis 30/60 (ver Figura 19). Cabe destacar, en este caso, avances en la conexión de la aritmética con la probabilidad, es decir, los estudiantes están relacionando los conceptos matemáticos de porcentaje, razón, proporcionalidad directa y probabilidad.

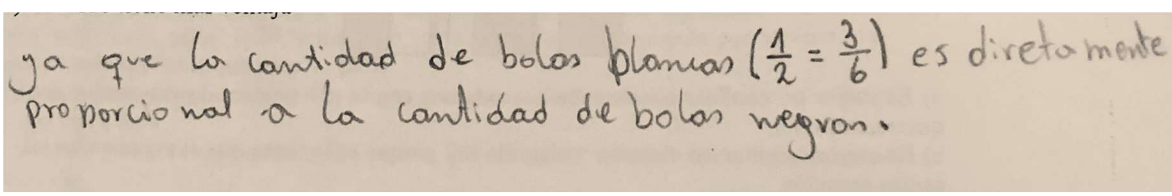


Figura 19. Argumento correcto del ítem 8.

Al comparar los resultados con la investigación realizada por Vásquez (2017) fue mayor las respuestas correctas con 60,2% por parte de los profesores de educación básica que enseñan matemática. 42,2% de los estudiantes optaron porque Luis tiene más ventaja, alternativa (b), asumiendo que al existir un espacio muestral más grande (90 bolas en total) es más difícil obtener la bola blanca, tal como lo argumenta un estudiante (ver Figura 20).

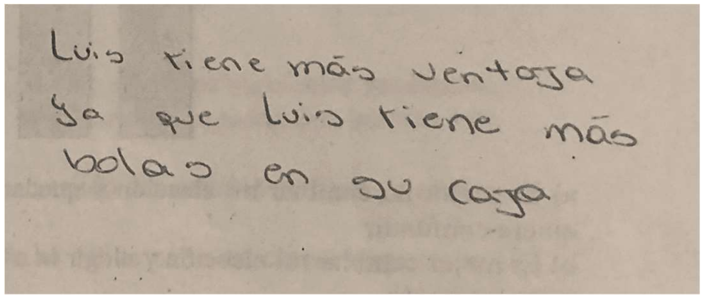


Figura 20. Argumento incorrecto del ítem 8.

También, 19,3% de los estudiantes señalan que Eduardo tiene más posibilidades de ganar, siendo esta la alternativa (c), una respuesta es dada en la Figura 21.

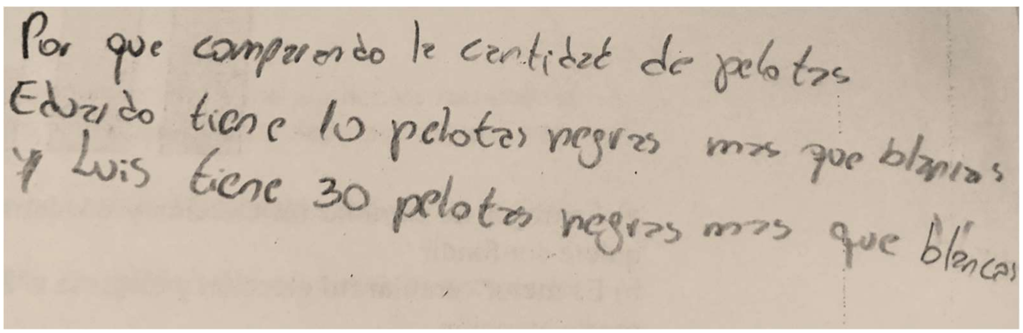


Figura 21. Argumento incorrecto ítem 8

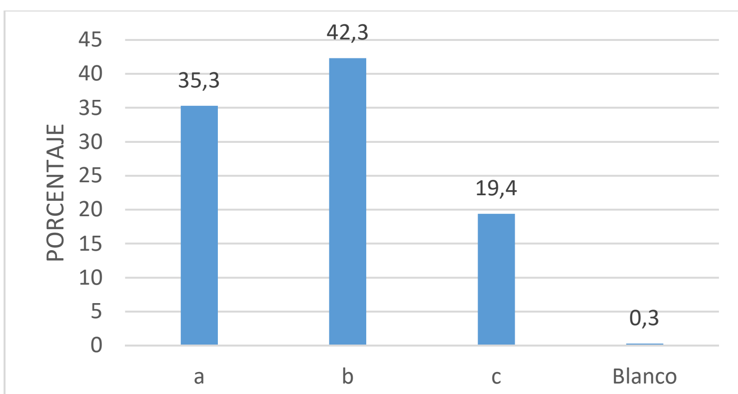


Figura 22. Porcentaje de respuestas al ítem 8, *n* = 331

La Tabla 9 no muestra diferencias importantes según nivel educativo de los estudiantes, tanto para la respuesta correcta e incorrectas, sólo hay 2,7% de diferencia entre los alumnos de séptimo y octavo en su respuesta correcta.

Tabla 9. Resultados del ítem 8 según nivel educativo

	Séptimo	Octavo	Total
a	**16,3**	**19,0**	**35,3**
b	21,5	20,8	42,3
c	7,9	11,5	19,4
Blanco	1,5	1,5	3,0
Total			100

Ítem 9. Argumenta. Hemos lanzado un dado rojo y otro azul y sabemos que el producto de los dos números obtenidos ha sido 12. La probabilidad de que alguno de los dos números sea un 6 es de:

a) 4/36
b) 2/36
c) 4/12
d) 2/4

Este ítem corresponde a la aplicación de la probabilidad condicional en juegos de dados, la alternativa correcta es 2/4 que fue respondido por 14,5% de los estudiantes (opción d, ver Figura 27). Si bien, los estudiantes de los dos niveles no tienen el conocimiento de la probabilidad condicional que según el currículum de matemática corresponde al nivel de 3° año medio, pretendemos indagar en sus argumentos, por ejemplo, un estudiante indicó la opción d) señalando que hay dos resultados que pueden quedar con el número 6 (Figura 23), que puede ser obtenida usando la Regla de Laplace o intuitiva.

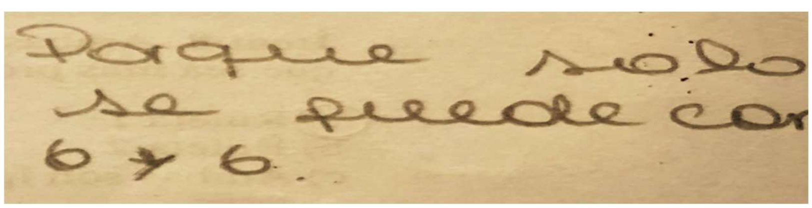


Figura 23. Argumento de respuesta correcta ítem 9

Es considerable la cantidad de estudiantes que respondieron 4/12, alternativa (c), con un 32,2% a pesar que los alumnos no discriminaron la condición del problema. Un error común se presenta en la Figura 24) al considerar todas las combinaciones que tienen de lanzamiento que tienen un seis, omitiendo la condición de que es un factor y que además debe tener como producto 12.

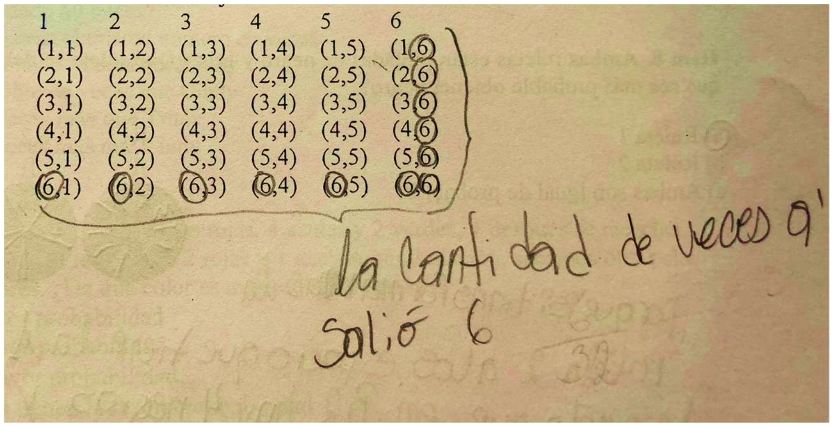


Figura 24. Argumento erróneo ítem 9

Los alumnos que escogieron la alternativa (b) de respuesta 2/36 relacionando el espacio muestral de las combinaciones que existen al lanzar dos dados (36 opciones distintas), a pesar de que en el enunciado se les indica una condición que ellos no consideran, por lo que se enfocan en que haya un seis al momento de lanzar. Se puede apreciar en la Figura 25 la argumentación de casos favorables de ocurrencia de obtener una cara 6, pero se equivocan en los casos posibles al momento de considerar el total de combinaciones en que el producto sea 12 que son sólo cuatro casos.

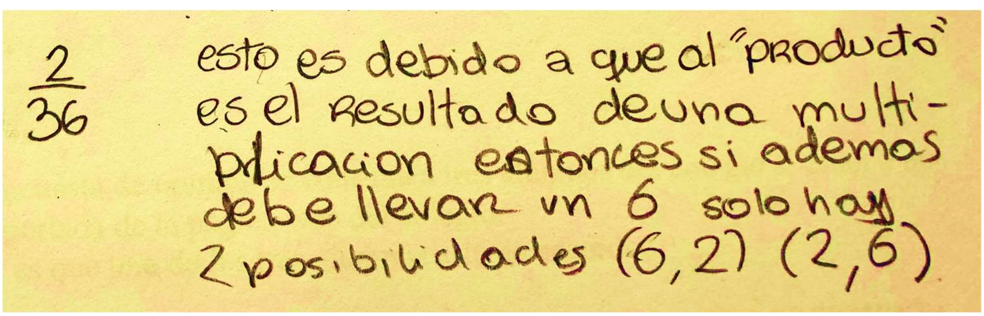


Figura 25. Argumento erróneo ítem 9

Por último, el 19,9% de los encuestados asume como respuesta correcta la alternativa (a) de valor de probabilidad 4/36, por lo que su respuesta se refiere a que la probabilidad pedida la están aplicando con la regla de Laplace, mediante el cálculo de sucesos en que el producto es 12, en vez de plantear un problema de cálculo de probabilidad bajo una condición.

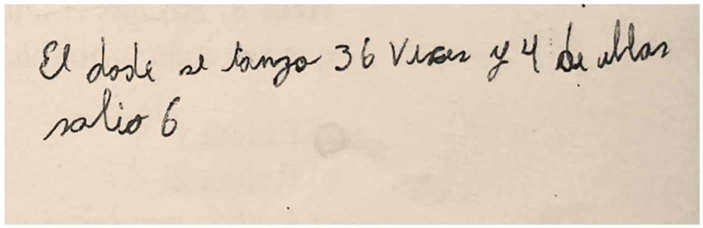


Figura 26. Argumento erróneo ítem 9

La investigación de Bastías (2017) con profesores de matemática de educación media obtuvo 35,5% de respuestas correctas superando en 21% respecto de los estudiantes de 7° y 8° año de educación básica. Por tanto, consideramos este problema difícil para estudiantes y profesores, haciendo hincapié que los estudiantes no contemplan en el currículo un estudio de la probabilidad condicional en este nivel educativo. Cabe señalar que en la investigación de Contreras (2011) en este ítem obtuvo 57,1% de respuestas correctas con futuros profesores de matemática, y la investigación de Díaz (2007) con estudiantes universitarios de psicología alcanzó tan solo 34,3% de respuestas correctas.

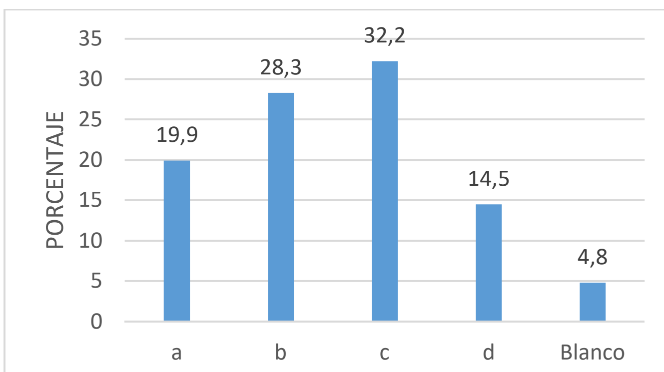


Figura 27. Porcentaje de respuestas al ítem 9, $n = 331$

La Tabla 10 muestra baja diferencia de los estudiantes por nivel en las respuestas correctas, tan sólo 3% superaron los estudiantes de 7° nivel. Cabe señalar que el distractor b) fue el de mayor diferencia con 6,3% y 22,0% de los niveles 7° y 8° respectivamente.

Tabla 10. Resultados del ítem 9 según nivel educativo

	Séptimo	Octavo	Total
a	9,4	10,5	19,9
b	6,3	22,0	28,3
c	20,7	11,9	32,6
d	**8,7**	**5,7**	**14,4**
Blanco	1,8	3,0	4,8
Total			100

Ítem 10. Argumenta. Se muestran los resultados de una encuesta realizada a 60 personas, sobre la preferencia de mermeladas, clasificadas en no dietética y dietética.

Mermelada

	No dietética	Dietética	
Mujer	6	24	
Hombre	18	12	

Al seleccionar a uno de estos encuestados al azar, la probabilidad de que sea hombre y prefiera mermelada no dietética es:

a) 18/24
b) 18/30
c) 18/60
d) 30/60 × 24/60
e) 1/18

La Figura 28 presenta una solución correcta de obtener una probabilidad 18/60 en seleccionar una persona hombre y prefiera mermelada no dietética, utilizando un razonamiento mediante la regla de Laplace. Del total de estudiantes hubo un 37,1% de respuestas correctas, opción c (ver Figura 33).

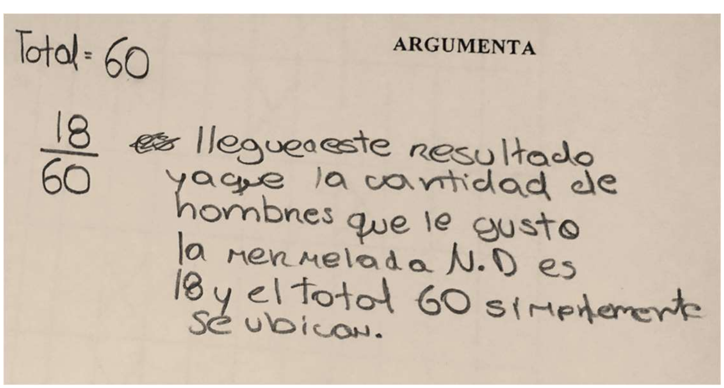


Figura 28. Argumento correcto del ítem 10.

En cambio, 24,4% de los estudiantes (Figura 32) asumen como correcta la alternativa (b) 18/30, considerando el espacio muestral de hombres (30) dejando de lado a la cantidad de mujeres que indica el problema. Esta opción fue la más alta de error, y es interesante puesto que están dando una respuesta de probabilidad condicionada al reducir el espacio muestral, error que ha sido señalado por Contreras (2011) futuros profesores de matemática, al confundir la probabilidad del producto y probabilidad condicional. Un estudiante señaló lo siguiente (ver Figura 29):

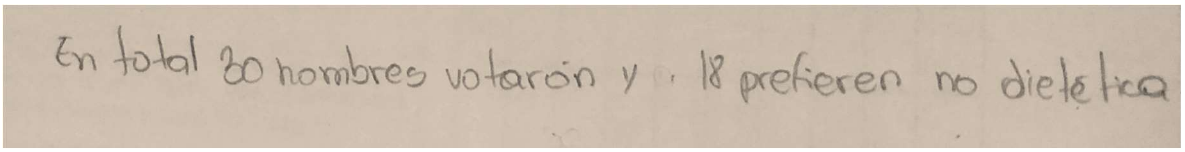


Figura 29. Argumento incorrecto del ítem 10.

En tanto el 16,9% de los estudiantes (Figura 30) señaló la alternativa (a) de probabilidad 18/24 considerando el espacio muestral reducido de personas de preferencia mermelada no dietética y de ellos calcularon la posibilidad de seleccionar a una persona hombre, pensada como probabilidad condicionada. Ver ejemplo, en la siguiente Figura 30.

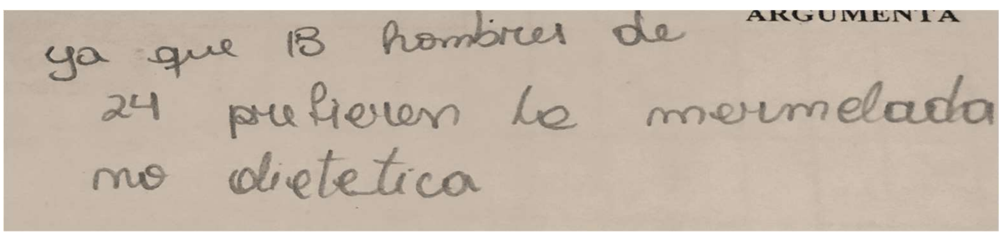


Figura 30. Argumento incorrecto del ítem 10.

La alternativa (d) de probabilidad 30/60×24/60 fue elegida por el 8,4% de los encuestados, en donde los estudiantes han argumentado de la siguiente manera la elección de su respuesta.

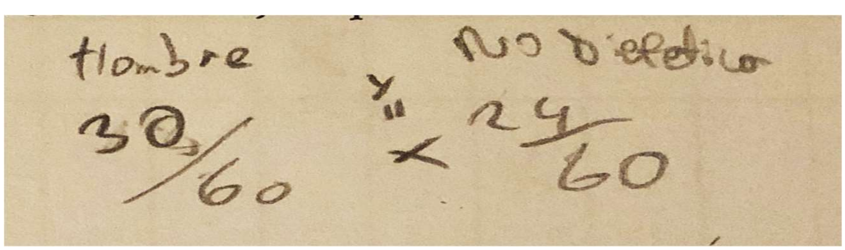


Figura 31. Argumento incorrecto del ítem 10

Por último, hubo otro argumento que no está en contexto matemático, pero si lo está en los temas que conciernen a las áreas de la salud, por lo general, las personas que consumen productos dietéticos son quienes sufren alguna enfermedad, como lo que se puede apreciar en la siguiente Figura 32.

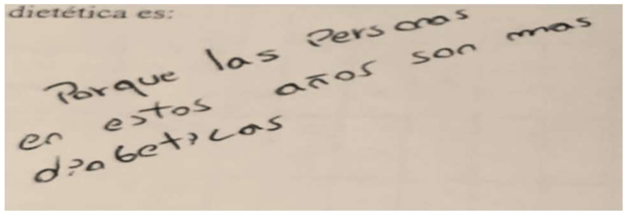


Figura 32. Argumento incorrecto del ítem 10

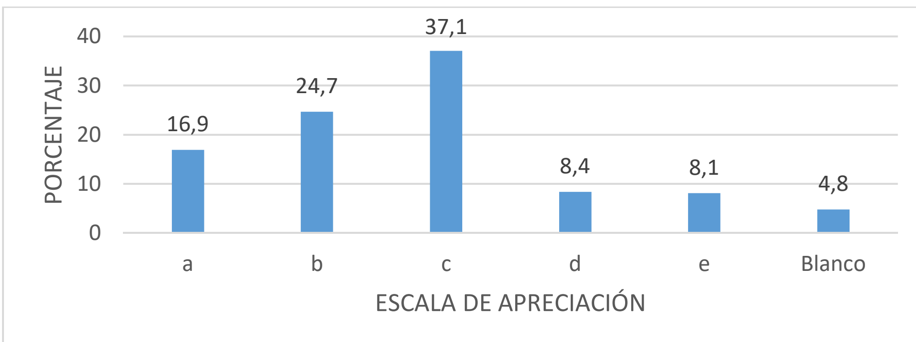


Figura 33. Porcentaje de respuestas al ítem 10, $n = 331$

En la Tabla 11 se puede apreciar que existe una diferencia de un 3,3% en la alternativa correcta de los estudiantes de séptimo y octavo año de educación básica. Además, no se observan diferencias importantes en los porcentajes de los distractores de acuerdo al nivel que se encuentra el estudiante.

Tabla 11. Resultados del ítem 10 según nivel educativo

	Séptimo	Octavo	Total
a	8,8	8,1	16,9
b	11,2	13,5	24,7
c	**16,9**	**20,2**	**37,1**
d	3,0	5,4	8,4
e	4,2	3,9	8,1
Blanco	3,0	1,8	4,8
Total			100

Ítem 11. En una encuesta de opinión se consulta a tres alumnos del colegio si están o no de acuerdo con la portada de la página web del colegio.
¿Qué tan probable es que uno de los tres alumnos esté de acuerdo?

Los resultados de este ítem son diversos y de gran dificultad pues ninguno de los estudiantes logró llegar a la respuesta correcta. A continuación, se presentan las respuestas incorrectas señaladas por los estudiantes.

La respuesta más reiterativa de los estudiantes fue señalar que hay 1/3 de probabilidad de encontrar un alumno que esté de acuerdo con el diseño de la página del colegio, siendo esta la opción del 31,7% de los estudiantes. Al parecer este argumento está relacionado a la probabilidad clásica o de Laplace del cociente de casos favorables sobre los casos posibles del espacio muestral, ver Figura 34.

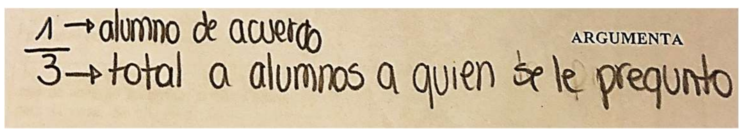


Figura 34. Solución incorrecta del ítem 11

La Figura 35 presenta una segunda respuesta incorrecta al ítem 6, contestada por el 9,6% de los estudiantes, en que señalan que hay 2/3 de probabilidad de encontrar a un estudiante que no esté de acuerdo con el diseño de la página web del colegio, utilizando la probabilidad del complemento del caso anterior.

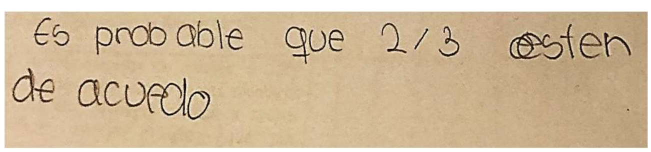


Figura 35. Solución incorrecta del ítem 11

Un 13% de los estudiantes señalaron como respuesta que existe un 50% probabilidad de encontrar a alguien que esté de acuerdo con el diseño de la página del colegio, indicando que solamente pueden entregar dos respuestas: sí o no, siendo una la solución (Figura 36).

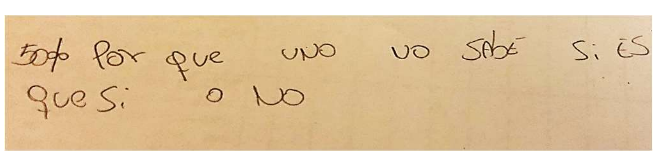


Figura 36. Solución incorrecta del ítem 11

La Tabla 12 deja de manifiesto que en este ítem hubo una gran diversidad de respuestas, mostrando un gran número de errores en este ítem, siendo el más frecuente el considerar 1/3 por el 32% de los estudiantes, seguido la respuesta errónea de ½. Un 16% de los estudiantes indicaron valores de probabilidad de 10%, 20%, 25%, 30%, 40%, 70% y 100% sin mayores argumentos.

Tabla 12. Respuestas al ítem 11 de estudiantes de primaria, *n* = 331

Solución	Frecuencia	Porcentaje
3/8	0	0
1/3	105	32
1/2	43	13
2/3	32	10
Otros valores	54	16
Omitidas	97	29
Total	331	100

CAPÍTULO 5
CONCLUSIONES

A continuación, se presentan las conclusiones de este estudio que están en directa relación con los objetivos de investigación propuesto. Esta investigación aporta, en una primera instancia acerca de los conocimientos de probabilidad que poseen los estudiantes de séptimo y octavo año básico, indagando en las formas intuitivas y clásica, siendo un tema poco estudiado en educación estadística.

5.1 CONCLUSIONES CON RELACIÓN A LOS OBJETIVOS

O1. *Diseñar un cuestionario de probabilidades dirigido a estudiantes de séptimo y octavo año de educación básica considerando las investigaciones en el tema.*

El primer objetivo consistió en la construcción de un cuestionario que midiera los conocimientos de probabilidad de estudiantes de séptimo y octavo año básico, con el fin de poder cuantificar y analizar lo que han aprendido a lo largo de su vida escolar, siendo capaces de poder desempeñarse en ítems con características de juego y situaciones reales. Para ello se analizó una variedad de investigaciones alusivas al tema, ya que nuestros ítems se aplicaron con la finalidad de poder comprobar la tendencia que los investigadores señalan y así poder comparar los resultados de los estudios con los obtenidos de nuestra investigación. Los ítems contienen propuestas nuevas y otras han sido utilizadas de investigaciones de Tversky y Kahneman (1974), Pollatsek, Well, Konold, Hardiman, y Conn (1987) Tversky y Kahneman (1974, 1980).

Finalmente, se elaboró un instrumento de 19 ítems estructurado en tres partes: ítems de asignación de probabilidades, ítems de selección múltiple sobre intuiciones probabilísticas e ítems con argumentación sobre probabilidad clásica.

O2. *Caracterizar las dificultades y errores de los estudiantes de séptimo y octavo año de educación básica en probabilidades.*

El segundo objetivo de la investigación fue caracterizar las dificultades y errores que tuvieron los estudiantes al momento de responder cada una de las preguntas, enfatizando en aquellas que se requerían argumentos a la alternativa que seleccionaban, en donde quedó de manifiesto que los errores que se han encontrado han sido por confusión de los conceptos, aplicación errónea de los conceptos de significados de la probabilidad, poca claridad al momento de leer el ítem, aplicación de la probabilidad no pertinente para descubrir los valores. Los ítems de mayor dificultad fueron los ítems 8, 9, 10 y 11, ya que hay una amplia gama de respuestas, que están debidamente fundamentadas, pero es ahí donde se puede verificar que su manera de pensar carece de las habilidades que el estado propone, y que por los años de formación que han recibido en probabilidades, no deberían fallar o confundirse. Esto queda clarificado en el ítem 11, ya que ninguno de los estudiantes fue capaz de encontrar la respuesta correcta, sino que solamente apelaban a argumentar con elementos cotidianos; con elementos que ellos creían factibles, o aplicando incorrectamente la probabilidad de Laplace. También, la falta de argumentación se debe a que los estudiantes no han visto algunos contenidos de probabilidad como independencia, condicional y modelo binomial.
Lo anterior afecta de manera negativa a los estudiantes, ya que queda de manifiesto que no tienen la experiencia de desarrollar estas habilidades matemáticas o simplemente la ponen en práctica muy pocas veces. Sin embargo, hubo estudiantes que presentaron intuiciones probabilísticas condicionadas, correctas e incorrectas (ítem 10).

O3. *Comparar los conocimientos de probabilidades de los estudiantes de séptimo y octavo año básico.*

El tercer objetivo planteado fue comparar los resultados en cada uno de los ítems propuestos en la encuesta según el nivel de cada uno de los estudiantes, con el fin de poder verificar si los conocimientos que ellos poseen son similares o diversos. Al analizar cada una de las respuestas que los estudiantes entregaron, se observó que las diferencias son mínimas, salvo el ítem 6 donde hubo variaciones de 8,9% y de 8,1% en el ítem 2 en las respuestas correctas, también hubo diferencias en cada una de las alternativas de respuestas incorrectas (ver Tabla 7).

Así la variabilidad de las respuestas no es alta, por lo que se puede decir que la diferencia de conocimientos entre un nivel y otro no son considerables.

Las investigaciones sobre razonamiento probabilístico señalan que ante preguntas de respuesta simple se produce un sesgo predecible de nuestra mente, donde la persona contesta obviando ciertos datos estadísticos. En nuestro estudio esta situación fue reflejada en los cinco ítems 1.1, ítem 1.3, ítem 1.5, ítem 1.6, ítem 1.9. Respecto al ítem 1.3 que un joven sea ingeniero si su padre es ingeniero (razonamiento causal) no encontramos coincidencias con las investigaciones de Pollatsek et al. (1987). Los resultados anteriores pueden ser tenido en cuenta en el primer ciclo escolar a la hora de enseñar las intuiciones sobre el azar y la probabilidad. Si bien, los estudiantes no tienen un pensamiento formal sobre el azar pueden desarrollar intuiciones relacionadas al azar, lo que favorecería la comprensión de los conceptos probabilísticos (Fischbein, 1975).

5.2 LIMITACIONES E IMPLICACIONES FUTURAS

En el currículo de matemática de educación básica, a nivel internacional en el eje de Probabilidad y Estadística es un tópico que presenta dificultades de aprendizaje para los alumnos, evidenciada en investigaciones sobre razonamiento probabilístico y los distintos significados que se atribuyen a la probabilidad. Entre las actitudes pretendidas se contempla demostrar curiosidad por resolver desafíos matemáticos, con confianza en las propias capacidades, y demostrar interés y rigor en la resolución de problemas y la búsqueda de nuevas soluciones para problemas reales. La investigación analiza a 331 estudiantes de séptimo y octavo año de educación básica, específicamente de la región de la Araucanía, sobre el nivel de conocimientos que tienen sobre probabilidades, en donde se detectan las dificultades de comprensión de conceptos, la dificultad que presentan al resolver problemas basadas en situaciones reales, de juego o simplemente de contingencia nacional.

Con los resultados obtenidos en el cuestionario construido y aplicado, puede ser útil para orientaciones a los formadores de los estudiantes sobre el conocimiento que necesitan para enseñar probabilidades en los cursos terminales de la educación básica. Una reflexión producto de los resultados de esta investigación, nos lleva a pensar que los profesores de educación básica no están preparados para la enseñanza de conceptos de probabilidad en los niveles 7° y 8° año básico. Las clases de probabilidades deberían ser apoyadas por profesores de matemática de educación media, como se está implementando, por ejemplo, en establecimientos particulares.

El Ministerio de educación señala que los estudiantes deben ser capaces de desenvolverse en situaciones de incertidumbre, con la entrega de herramientas y conocimientos de probabilidad desde los primeros años de escolaridad, con aumento progresivo a medida que avanzan en sus niveles educativos. El currículo de Matemática de 7° básico (MINEDUC, 2015) declara en el eje de Probabilidad y Estadística lo siguiente: "En el área de la Probabilidad, se pretende que *estimen de manera intuitiva* y que calculen de manera precisa la probabilidad de ocurrencia de eventos". Las actividades presentadas en el Programa de Estudio de Matemática abordan el uso de material concreto con dados, monedas, chinche, fichas y ruletas, determinando la frecuencia absoluta y avanzando a la construcción de la distribución de frecuencia relativa. Las investigaciones en educación probabilística consideran que la probabilidad informal está firmemente establecida en la cultura común y que obstaculiza el aprendizaje de la probabilidad formal. Además, enfatizan que las creencias intuitivas sobre "artefactos aleatorios" pueden influir aún más en las respuestas de los alumnos. Todas estas creencias pueden incidir en la comprensión de los estudiantes acerca de la probabilidad formal.

Consideramos pertinente elaborar diseños de enseñanza de la probabilidad para estudiantes de educación básica que tengan presente no solo el trabajo con material concreto de azar, sino también ampliar con actividades de estimación de intuiciones probabilísticas de contingencia e interés de los estudiantes según el nivel que están desarrollando, y actividades de construcción de modelos probabilísticos basados en situaciones aleatorias reales.

En este trabajo destacamos la importancia de atender a la intuición probabilística a temprana edad por su alcance en la construcción de los significados de la probabilidad en los niveles superiores. En particular, hemos ampliado el campo de aplicación de las intuiciones y heurísticas sobre la probabilidad en este nivel educativo, limitado principalmente a los sorteos y juegos de azar presentes en la probabilidad informal. Esta experiencia, de iniciación intuitiva al cálculo de probabilidades con asignación cualitativa, podría permitir al profesor de educación básica medir en una propuesta de enseñanza del tema la correspondencia de este significado personal de las intuiciones probabilísticas con el significado institucional pretendido. Es deseable continuar con el estudio considerando una muestra de estudiantes distintos establecimientos educacionales (Municipal, Particular Subvencionado y Particular Pagado).

Debido a la débil preparación sobre pensamiento probabilístico que tienen los profesores de educación básica, no están preparados para realizar clases de probabilidades a los niveles de 7° y 8° básico (12 y 13 años). Consideramos necesario investigar y proponer alternativas de apropiación gradual de los distintos significados de probabilidad presente en el currículo de este nivel educativo. Comúnmente, los estudiantes de primaria no han sido confrontados a una enseñanza de la probabilidad que evalúe y realce las intuiciones probabilísticas. Como lo señalan Batanero, Gómez, Contreras y Díaz (2015) los profesores necesitan apoyo y formación adecuada para tener éxito en el logro de un equilibrio adecuado de la intuición y el rigor en la enseñanza de la probabilidad.

REFERENCIAS

Alsina, Á. (2017). Contextos y propuestas para la enseñanza de la estadística y la probabilidad en Educación Infantil: un itinerario didáctico. *Épsilon*. *34*(95), 25-48.

Alvarado, H., Estrella, S., Retamal, L. & Galindo, M. (2018). Intuiciones probabilísticas en estudiantes de ingeniería: implicaciones para la enseñanza de la probabilidad. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*. *21* (2), 131-156.

Arteaga, P. Contreras, J. M., y Cañadas. (2014). Conocimiento de la estadística y los estudiantes en futuros profesores: un estudio exploratorio. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, *6*, 63 – 84.

Bastías, H. (2017) Estudio del significado intuitivo y formal de la probabilidad en profesores de matemática. Tesis de magister. Universidad Católica de la Santísima Concepción.

Batanero, C. (2005). Significados de la probabilidad en la educación secundaria. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa*, 8(3), 247-264.

Batanero, C.; Cañizares, M. J.; Godino, J. Simulation as a tool to train pre- service school teachers. In: Icmi First African Regional Conference, 2005, Johannesburgo. Proceedings... Johannesburgo: International Commission on Mathematical Instruction. 2005. CD-ROM.

Batanero, C., Fernandes, J. y Contreras, J. M. (2009). Un análisis semiótico del problema de Monty Hall e implicaciones didácticas. *Suma*, *62*, 11-18.

Batanero, C., Gómez, E., Contreras, J. M., y Díaz, C. (2015). Conocimiento matemáticode profesores de primaria en formación para la enseñanza de la probabilidad: Un estudio exploratorio. *Práxis educativa*, 11 - 34.

Borovcnik, M. (2012). Multiple perspectives on the concept of conditional probability. Avances de Investigación en Educación Matemática, (2).

Borovcnik, M. y Kapadia, R. (2014). A historical and philosophical perspective on probability. In E. J Chernoff, y B. Sriraman, (Eds.), *Probabilistic thinking: presenting plural perspectives* (pp. 7-34). Dordrecht, the Netherlands: Springer.

Cañizares, M. J. (1997). Influencia del razonamiento proporcional y combinatorio y de creencias subjetivas en las intuiciones probabilísticas primarias. Tesis doctoral. Universidad de Granada.

Carter, T. A. (2008). Preservice teacher knowledge and understanding of probability and statistics. En G. Kulm (Ed.), Teacher knowledge and practice in middle grades mathematics (pp. 19-43). Rotterdam: Sense Publishers.

Cobo, B. (2003). Significado de las medidas de posición central para los estudiantes de secundaria. Tesis doctoral. Universidad de Granada.

CONICYT (2016). Resumen Ejecutivo Encuesta Nacional de Percepción Social de la Ciencia y Tecnología en Chile 2016. Obtenido de http://www.conicyt.cl/wp-content/uploads/2014/07/resumen-ejecutivo-encuesta-nacional-de-percepcion-social_web.pdf

Contreras, J. M. (2011). *Evaluación de conocimientos y recursos didácticos en la formación de profesores sobre probabilidad condicional*. Tesis Doctoral. Universidad de Granada.

Contreras, J.M., Batanero, C., Arteaga, P. y Cañadas, G. (2014). La paradoja del niño o niña: aplicaciones para la clase de probabilidad. *Revista digital Matemática, Educación e Internet*. *14*(1).

Cordero, F., y Flores, R. (2007). El uso de las gráficas en el discurso matemático escolar. Un estudio socio epistemológico en el nivel básico a través de los libros de texto. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 107-38. (1),

Díaz, C. (2007). *Viabilidad de la enseñanza de la inferencia bayesiana en el análisis de datos en psicología*. (Tesis Doctoral). Universidad de Granada.

Estrada, A., Batanero, C., y Fortuny , J. (2004). Un estudio comparado de las actitudes hacia la estadística en profesores en formación y en ejercicio. *Enseñanza de las Ciencias*, 263 - 273.

Estrada, A., y Batanero, C. (2015). Construcción de una escala de actitudes hacia la probabilidad y su enseñanza para profesores. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 239-248). Alicante: SEIEM.

Fernandes, J. A., Batanero, C., Contreras, J. M., y Díaz, C. (2009). A simulação em Probabilidades e Estatística: potencialidades e limitações. Quadrante. XVIII (1 y 2), 161-183.

Fischbein, E. (1975). The intuitive source of probability thinking in children. Dordrecht, the Netherlands: Reidel.

Fischbein, E. (1987). *Intuition in science and mathematics: An educational approach* (Vol. 5). Springer Science & Business Media.

Fischbein, E., y Gazit, A. (1984). Does the teaching of probability improve probabilitic intuitions? *Educational Studies in Mathematics*, *15*(1), 1-24.

Fox, C.R., y Levav, J. (2004). Partition-edit-count: naive extensional reasoning in judgment of conditional probability. *Journal of experimental psychology. General*, 133 4, 626-642.

Fulmer, G. W. (2014). Undergraduates' attitudes toward science and their epistemological beliefs: Positive effects of certainty and authority beliefs. Journal of Science Education and Technology, 23(1), 198-206.

García, A. (2011). Estrategias empresariales una visión holística. colombia bilineata.

García de Tomás, J., Arteaga, P., y Roa, R. (2017). Evaluación del razonamiento de alumnos de secundaria en problemas de permutaciones. En J. M. Contreras, P. Arteaga, G. R. Cañadas, M. M. Gea, B. Giacomone y M. M. López-Martín (Eds.), Actas del Segundo Congreso International Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos. Disponible en, enfoqueontosemiotico.ugr.es/civeos.html

Gardner, M. (1959). Mathematical games. *Scientific American*, *219*, 180–182.

Garfield, J. y Ben-Zvi, D. (2008). *Developing Students' Statistical Reasoning: Connecting Research and Teaching Practice*. New York: Springer.

Godino, J. D. (1996). Mathematical objects: their meanings and understanting. En L. Puig y A. Gutierrez (Eds.), Proceedings of the 20th Conference of the international Referencias 295 group tor the Psychology of Mathematics Education. 2, 417-424. Valencia: Universidad de Valencia.

Godino, J. D. (2002) Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactiques des Mathematiques*, *22* (2/3): 237-284.

Godino, J. D. (2003). Teoría de las funciones semióticas. Un enfoque ontológico-semiótico de la cognición e instrucción matemática. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada. Recuperado de: http://www.ugr.es/local/jgodino/indice_tfs.htm.

Godino, J. D. (2010). Perspectiva de la Didáctica de las Matemáticas como disciplina tecnocientífica. Recuperado de: http://www. ugr.es/jgodino/fundamentosteoricos/perspectivaddm. pdf.

Godino, J. D. y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *14*(3), 325-355.

Godino, J. D., Batanero, C. y Cañizares, M. J. (1987). *Azar y probabilidad. Fundamentos didácticos y propuestas curriculares*. Madrid: Síntesis.

Godino, J. D., Batanero, C., y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. ZDM. *The International Journal on Mathematics Education*, *39*(1-2), 127-135.

Godino, J. D., Batanero, C., Rivas, H. y Arteaga, P. (2013). Componentes e indicadores de idoneidad de programas de formación de profesores en didáctica de las matemáticas. *REVEMAT*. ISSN 1981-1322. Florianópolis *8*(1) 46-74

Gómez, E. (2014). *Evaluación y desarrollo del conocimiento matemático para la enseñanza de la probabilidad en futuros profesores de educación primaria*. Tesis Doctoral. Universidad de Granada.

Gómez T., Batanero , C., y Contreras, J. M. (2014). Procedimientos probabilísticos en libros de texto de matemáticas para educación primaria en España. *Épsilon*, 25-42.

Gómez, E., Batanero , C., y Contreras, J. M. (2014). Conocimiento matemático de futuros profesores para la enseñanza de la probabilidad desde el enfoque frecuencial. *Bolema, Río Claro*, 209 - 229.

Gómez, E., Contreras, J. M., y Batanero, C. (2015). Significados de la probabilidad en libros de texto para educación primaria en Andalucía. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 69-72). Alicante: SEIEM.

Gómez, E., Ortiz, J., Batanero, C. y Contreras, J. M. (2013). El lenguaje de probabilidad en los libros de texto de educación primaria. *Unión; Revista iberoamericana de educación matemática*, 75 - 91.

http://www.ugr.es/jgodino/fundamentosteoricos/perspectivaddm.pdf.

http://www.soche.cl/archivos/Recomendaciones.pdf

Green, D. R. (1983). From thumbtacks to inference. School Science and Mathematics, *83*(7), 541-551.

Green, D. R. (1991). A longitudinal study of children's probability concepts. En D. Vere Jones (Ed.), Proceedings of the Third International Conference on Teaching Statistics (pp. 320-328). Dunedin: Universidad de Otago.

Hacking, I. (1995) El surgimiento de la probabilidad: un estudio filosófico de las ideas tempranas acerca de la probabilidad, la inducción y la inferencia estadística. Barcelona: Gedisa.

INE (2018). Instituto Nacional de Estadística. Recuperado el 31 de agosto de 2018 http://www.ine.cl/prensa/2018/08/31/número-de-nacimientos-en-chile-descendió-5-6-entre-2015-y-2016

Kahneman, D. y Tversky, A. (1982). Variants of uncertainty. *Cognition*, 11, 143-157.

Kahneman, D., Slovic, P., y Tversky, A. (1982). *Judgment under uncertainty: Heuristics and biases.* New York: Cambridge University Press.

Kahneman, D., y Tversky, A. (1972). Subjective probability: A judgment of representativeness. *Cognitive Psychology*, *3*, 430-454.

Llinares, S. (2009). Competencias docentes del maestro en la docencia en matemáticas y el diseño de programas de formación. UNO. Revista de Didáctica de las Matemáticas, 51, 92-101.

MINEDUC (2012). Propuesta Ajuste Curricular: Objetivos Fundamentales y Contenidos Mínimos Obligatorios. Ministerio de Educación de Chile.

MINEDUC (2013). Bases Curriculares 2012: Educación Básica Matemática. Ministerio de Educación de Chile: Unidad de Currículum y Evaluación.

MINEDUC (2015). Nuevas Bases Curriculares y Programas 7° básico a 2° año de Educación Media. Santiago de Chile: Ministerio de Educación. Recuperado el 01 de julio de 2018 desde: http://www.curriculumenlineamineduc.cl/605/articles-34960_Bases.pdf

Mohamed, N. (2012). Evaluación del conocimiento de los futuros profesores de educación primaria sobre probabilidad. Tesis doctoral. Universidad de Granada.

NCTM (2000). Principles and standards for school mathematics. Reston, VA: NCTM. http://standards.nctm.org/

Niess, M. L. (2005). Preparing teachers to teach science and mathematics with technology: Developing a technology pedagogical content knowledge. Teaching and Teacher Education, 21, 509-523.

Niss, M. (2003). Mathematical Competencies and the learning of mathematics: The Danish KOM Project. In Gagatsis, A. & Papastavridis, S. (Eds.). *3rd Mediterranean Conference on Mathematics Education* (pp. 115-124). Athens, Greece: The Hellenic Mathematical Society and Cyprus Mathematical Society.

Parraguez, R., Gea, M., Díaz, D. y Batanero, C. (2017). ¿Conectan los futuros profesores las aproximaciones frecuencial y clásica de la probabilidad? *Revista Digital Matemática, Educación e Internet*. *17*(2).

Piaget, J. (1975). La genése de l'idée de hasard chez l'enfant. París: Presses Universitaires de France.

Pierce, R., y Chick, H. (2011). Reacting to quantitative data: Teachers' perceptions of student achievement reports. In J. Clark, B. Kissane, J. Mousley, T. Spencer, y S. Thornton. (Eds.), Mathematics: traditions and [new] practices: Proceedings of the 34th Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia.

Prodomou, T. (2012). Connecting experimental probability and theoretical probability. ZDM, The International Journal of Mathematics Education, Hamburgo, 44, 855-868.

Pollatsek, A., Well, A. D., Konold, C., Hardiman, P., y Cobb, G. (1987). Understanding Conditional Probabilities. *Organizational Behavior and Human Decision Processes*, 40, 255-269.

Salcedo, A., y Mosquera, J. (2008). Sesgo de la disponibilidad en estudiantes universitarios. *Investigación y Postgrado, 23*(2).

Serrano, L., Batanero, C., Ortiz, J. J. y Cañizares, M. J. (1998). Concepciones de los alumnos de secundaria sobre modelos probabilísticos en las secuencias de resultados aleatorios. Suma, 36, 23-32.

Smith, T. M. y Hjalmarson, M. A. (2013). Eliciting and developing teachers' conceptions of random processes in a probability and statistics course. Mathematics Thinking and Learning, 15(1), 58-82.

Stohl, H. (2005). Facilitating students' problem solving: Prospective teachers' learning trajectory in technological contexts. Journal of Mathematics Teacher Education, 8(3), 223-254.

Stylianides, G. J. (2009). Reasoning-and-proving in school mathematics textbooks. Mathematical thinking and learning, 11(4), 258-288.

Tversky, A. y Kahneman, D. (1974). Judgement under uncertainity: Heurístics and biases. *Science*, 185, 1124-1131.

Tversky, A. y Kahneman, D. (1980). Causal schemas in judgments under uncertainty. In E. M. Fishbein (Ed.), *Progress in Social Psychology*, (pp. 49-72). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Tversky, A., y Kahneman, D. (1974). Judgement under uncertainity: Heurístics and biases. *Science*, 185, 1124-1131.

Vásquez, C., (2017). ¿Cómo desarrollar la alfabetización probabilística en primaria? *Uno: Revista de didáctica de las matematicas,* (78) 24-29.

Vásquez , C., y Alsina, Á. (2014). Enseñanza de la probabilidad en educación primaria. Un desafío para la formación inicial y continua del profesorado. *Números*, 5 - 23.

Vásquez, Claudia y Angel, Alsina. (2017). Lenguaje probabilístico: un camino para el desarrollo de la alfabetización probabilística. Un estudio de caso en el aula de Educación Primaria Probabilistic Language: A Path for the Development of Probabilistic Literacy. A Case Study in a Primary Education Classroom. Bolema Boletim de Educação Matemática. 31. 454-478

Watson, J. M. (2001). Profiling teachers' competence and confidence to teach particular mathematics topics: The case of data and chance. Journal of Mathematics Teacher Education, 4, 305-337.

ANEXO 1: CUESTIONARIO DE PROBABILIDAD

CUESTIONARIO SOBRE PROBABILIDADES EN JUEGOS Y SITUACIONES REALES

Estudiante: ___7mo año ___ 8vo año.

Promedio en matemática año 2017: ____

Género: ____ Masculino ____ Femenino

Ítem 1. Asigna un valor de posibilidad de ocurrencia del 0% a 100% en los eventos:

	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
1. Visitar un hospital seleccionar un bebe y que sea de sexo masculino											
2. Llegar a los 80 años de edad en Chile											
3. Que un joven sea ingeniero si su padre es ingeniero											
4. En un grupo de 23 personas, ¿qué tan probable es que hallan dos personas que cumplan años el mismo día y mes?											
5. Una familia se proyecta tener tres hijos, ¿qué tan probable es que los dos primeros sean hombres y el tercero sea mujer?											
6. Un profesor con 10 estudiantes dice que obtendría más grupos distintos formado de 2 estudiantes en vez de 8 estudiantes											
7. Si se lanza una moneda tres veces, ¿qué tan probable es obtener sello en el tercer lanzamiento si se sabe que los dos primeros lanzamientos fueron caras?											
8. En una encuesta de opinión el 25% está de acuerdo en enviar tareas escolares para la casa. Si eliges al azar a cuatro estudiantes de tu colegio, ¿qué tan probable es que uno de ellos esté a favor del envío de tareas?											
9. En un gimnasio hay 1000 personas y cada una de ellas lanza 3 monedas. Aproximadamente, ¿qué porcentaje de las personas obtendrían tres caras?											

Ítem 2. Si de una tómbola con pelotas enumeradas del 1 al 5, se sacan cinco pelotas con reposición ¿Qué es más probable que ocurra?
a) Que salga el numero 22222
b) Que salga el numero 12345
c) Que salga el numero 25314
d) Todas son igualmente probables

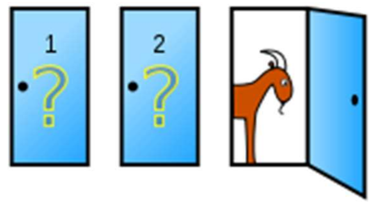
Ítem 3. Se lanza una moneda 8 veces, obteniendo en orden los siguientes resultados: cara, sello, cara, sello, sello, sello, sello, sello. Si se lanza la moneda por novena vez, ¿qué es más probable que pase?
a) Es más probable que salga cara, puesto que han salido demasiados sellos y ya es hora de que salga cara.
b) Es más probable que salga sello, puesto que ha salido sello en cinco lanzamientos sucesivos.
c) Es igual de probable que salga cara o sello

Ítem 4. Cindy y Trudy juegan tirando un dado normal. Si sale un 5 gana Cindy y si sale menos de 3 gana Trudy. ¿Cuántas veces habrá ganado cada uno, aproximadamente, después de tirar el dado 60 veces?
a) Trudy y Cindy ganan el mismo número de veces
b) Cindy gana el doble de veces que Trudy
c) Trudy gana el doble de veces que Cindy
d) Cindy gana 17 veces más que Trudy
e) Trudy gana 17 veces más que Cindy

Ítem 5. En una bolsa se ponen 4 bolas rojas, 4 azules y 2 verdes, y después se mezclan. Se sacan tres bolas fuera, resultando 2 rojas y 1 azul. A continuación, sacamos otra bola sin echar las anteriores. ¿De qué color es más probable que sea?
a) El rojo tiene mayor probabilidad
b) El azul tiene mayor probabilidad
c) El verde tiene mayor probabilidad
d) Todos los colores tienen la misma probabilidad

Ítem 6. Eduardo desde pequeño mostró gran afición por el arte. Entro a estudiar a la universidad donde se destacó por su talento por la escritura y fotografía, transformándose en el mejor de su carrera. En la última década recorrió el mundo fotografiando y ayudando en los diversos desastres naturales ¿Cuál de estos sucesos tiene más probabilidad de ser cierta?
a) Eduardo trabaja en un diario
b) Eduardo trabaja en un diario y es voluntario de bomberos
c) Ambos sucesos son igualmente de probables.

Ítem 7. Supón que estás en un concurso, y se te ofrece escoger entre tres puertas: detrás de una de ellas hay un auto, y detrás de las otras cabras. Escoges una puerta, digamos la n°1, y el presentador, que sabe lo que hay detrás de las puertas, abre otra, digamos la n°3, que contiene una cabra. Entonces te pregunta: ¿No prefieres escoger la n°2?



a) Es mejor no cambiar mi elección y quedarnos con la n°1 porque el presentador nos quiere confundir
b) Es mejor cambiar mi elección y elegir la n°2 porque es la única que el presentador no presta atención
c) Es mejor no cambiar mi elección y quedarnos con la n°1 porque ahora tengo 1/2 de probabilidad de ganar el auto
d) Es mejor cambiar mi elección y elegir la n°2 porque ahora tengo 2/3 de probabilidad de ganar el auto
e) Da lo mismo cambiar o no de puerta la probabilidad sigue siendo 1/3

Ítem 8. Eduardo tiene en su caja 10 bolas blancas y 20 negras. Luis tiene en su caja 30 bolas blancas y 60 negras. Juegan una partida de azar. El ganador es el niño que saque primero una bola blanca. Si ambos sacan simultáneamente una bola blanca o una bola negra, ninguno gana, devuelven las bolas a las cajas y la partida continúa. Eduardo afirma que el juego no es justo porque en la caja de Luis hay más bolas blancas que en la suya.

ARGUMENTA

a) El juego es justo
b) Luis tiene más ventaja
c) Eduardo tiene más ventaja

Ítem 9. Hemos lanzado un dado rojo y otro azul y sabemos que el producto de los dos números obtenidos ha sido 12. La probabilidad de que alguno de los dos números sea un 6 es de: **ARGUMENTA**

		Nº dado Rojo					
		1	2	3	4	5	6
Nº dado	1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
Azul	2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
	3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
	4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
	5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
	6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

a) 4/36
b) 2/36
c) 4/12
d) 2/4

Ítem 10. Se muestran los resultados de una encuesta realizada a 60 personas, sobre la preferencia de mermeladas, clasificadas en no dietética y dietética.

Mermelada

	No dietética	Dietética	
Mujer	6	24	
Hombre	18	12	

Al seleccionar a uno de estos encuestados al azar, la probabilidad de que sea hombre y prefiera mermelada no dietética es:

ARGUMENTA

a) 18/24
b) 18/30
c) 18/60
d) 30/60 × 24/60
e) 1/18

Ítem 11. En una encuesta de opinión se consulta a tres alumnos del colegio si están o no de acuerdo con la portada de la página web del colegio.
¿Qué tan probable es que uno de los tres alumnos esté de acuerdo?

ARGUMENTA

PAUTA EVALUACIÓN TESIS DE MAGÍSTER (Tipo Académico)

Título de la Tesis: Explorando el significado intuitivo y clásico de la probabilidad en estudiantes de séptimo y octavo año básico

Autor(a)	Sergio Arturo Tapia Muñoz
Director de Tesis	Hugo Alvarado Martínez
Programa	**Magíster Didáctica de la Matemática**
Nombre del Evaluador	Liliana Mabel Tauber

Nota: Evalúe de 1.0 a 7.0 cada uno de los indicadores que se presentan esta pauta.

Aspectos Formales (10%)

Indicadores	**Nota**
1. Presentación de la Tesis de acuerdo a formato oficial	7.0
2. Índice (de contenidos, gráficos y/o figuras)	7.0
3. Resumen (en español e inglés)	7.0
4. Correcto uso de ortografía	6.0
5. Redacción coherente con escritura científica de la especialidad	7.0
6. Referencias y citas de acuerdo a Norma APA, 6ª Edición	5.0
Promedio	6.5

Formulación del Problema (20%)

Indicadores	**Nota**
7. Construcción del objeto de estudio a partir de la presentación de antecedentes contextuales, teóricos y empíricos	7.0
8. Supuestos o hipótesis de trabajo en correspondencia con el objeto de estudio	7.0
9. Formulación de la interrogante de investigación	7.0
10. Relevancia del problema de investigación en el contexto de la disciplina	7.0
11. Objetivos formulados con claridad y coherentes con el problema y el objeto de estudio.	7.0
Promedio	7.0

Marco Teórico (20%)

Indicadores	**Nota**
12. Antecedentes teóricos : presentación ordenada y coherente de los capítulos, apartados y sub apartados teóricos que sustentan la investigación	6.5
13. Aproximación al estado de arte de la problemática de investigación	7.0
14. Pertinencia, relevancia y actualización de las fuentes de referencia para la investigación	7.0
Promedio	6.83

Marco Metodológico (20%)

Indicadores	**Nota**
15. Paradigma y Enfoque de la investigación	7.0
16. Diseño de la investigación: operacionalización de la investigación en fases	7.0
17. Muestra o Participantes	6.5
18. Estrategias, técnicas e instrumentos de recogida de datos	7.0
19. Estrategias de análisis de datos	6.0
20. Criterios de rigor científico	7.0
Promedio	6.75

De los Resultados (20%)

Indicadores	**Nota**
21. Presentación de resultados de forma clara y sintética	7.0
22. Procesamiento, análisis e interpretación de los resultados o hallazgos	7.0
23. Tablas, figuras o gráficos bien construidos	7.0
Promedio	7.0

Conclusiones, Discusión y Proyecciones (10%)

Indicadores	**Nota**
24. Conclusiones respecto de los objetivos propuestos	7.0
25. Discusión de resultados, según el marco teórico referencial y el estado del arte	7.0
26. Limitaciones y proyecciones del estudio	4.5
Promedio	6,17

Calificación Final

	Promedio Calificación (de 1.0 a 7.0)	**Porcentaje**	**Ponderación**
Aspectos Formales	6.5	10%	0.65
Formulación del Problema	7.0	20%	1.4
Marco Teórico	6.83	20%	1.366
Marco Metodológico	6.75	20%	1.35
Resultados	7	20%	1.4
Conclusiones y Discusión	6.17	10%	0.617
	Calificación Final	6,783	

Observaciones y/o Comentarios:
La producción realizada en la Tesis muestra un trabajo pormenorizado y bien fundamentado, en el que quedan claramente plasmados los antecedentes, el marco teórico y metodológico, así como la discusión

de los resultados y las conclusiones. Las referencias utilizadas son totalmente adecuadas y relevantes con la temática trabajada y muy actualizadas.
Sólo es posible indicar que en el apartado de limitaciones y proyecciones del estudio, faltaría debatir sobre las limitaciones del mismo. Por el contrario, las proyecciones del estudio quedan claramente explicitadas.
Para terminar este informe, se sugiere que antes de la presentación se revisen algunos errores de tipeo (que devuelvo marcados en color amarillo en el cuerpo de la tesis y con alguna nota) y algunas faltantes en las referencias bibliográficas. Por último, se solicita que las referencias se ordenen alfabéticamente.

Dra. Liliana Mabel Tauber

Departamento de Matemática

Facultad de Humanidades y Ciencias

Universidad Nacional del Litoral

Fecha: 05 de diciembre del 2018

PAUTA EVALUACIÓN TESIS DE MAGÍSTER (Tipo Académico)

Título de la Tesis: "Explorando el significado intuitivo y clásico de la probabilidad en estudiantes de séptimo y octavo año básico"

Autor(a)	Sergio Arturo Tapia Muñoz
Director de Tesis	Hugo Alejandro Alvarado Martínez
Programa	**Magíster Didáctica de la Matemática**
Nombre del Evaluador	María Lidia Retamal Pérez

Nota: Evalúe de 1.0 a 7.0 cada uno de los indicadores que se presentan esta pauta.

Aspectos Formales (10%)

Indicadores	**Nota**
1. Presentación de la Tesis de acuerdo a formato oficial	7.0
2. Índice (de contenidos, gráficos y/o figuras)	6.9
3. Resumen (en español e inglés)	7.0
4. Correcto uso de ortografía	6.2
5. Redacción coherente con escritura científica de la especialidad	6.8
6. Referencias y citas de acuerdo a Norma APA, 6ª Edición	5.5
Promedio	6.6

Formulación del Problema (20%)

Indicadores	**Nota**
7. Construcción del objeto de estudio a partir de la presentación de antecedentes contextuales, teóricos y empíricos	6.6
8. Supuestos o hipótesis de trabajo en correspondencia con el objeto de estudio	7.0
9. Formulación de la interrogante de investigación	7.0
10. Relevancia del problema de investigación en el contexto de la disciplina	7.0
11. Objetivos formulados con claridad y coherentes con el problema y el objeto de estudio.	6.6
Promedio	6.8

Marco Teórico (20%)

Indicadores	**Nota**
12. Antecedentes teóricos : presentación ordenada y coherente de los capítulos, apartados y sub apartados teóricos que sustentan la investigación	6.8
13. Aproximación al estado de arte de la problemática de investigación	6.9
14. Pertinencia, relevancia y actualización de las fuentes de referencia para la investigación	6.8
Promedio	6.8

Marco Metodológico (20%)

Indicadores	**Nota**
15. Paradigma y Enfoque de la investigación	7.0
16. Diseño de la investigación: operacionalización de la investigación en fases	7.0
17. Muestra o Participantes	6.4
18. Estrategias, técnicas e instrumentos de recogida de datos	6.4
19. Estrategias de análisis de datos	6.2
20. Criterios de rigor científico	6.6
Promedio	6.6

De los Resultados (20%)

Indicadores	**Nota**
21. Presentación de resultados de forma clara y sintética	6.8
22. Procesamiento, análisis e interpretación de los resultados o hallazgos	6.2
23. Tablas, figuras o gráficos bien construidos	6.9
Promedio	6.6

Conclusiones, Discusión y Proyecciones (10%)

Indicadores	**Nota**
24. Conclusiones respecto de los objetivos propuestos	6.6
25. Discusión de resultados, según el marco teórico referencial y el estado del arte	6.9
26. Limitaciones y proyecciones del estudio	5.0
Promedio	6.2

Calificación Final

	Promedio Calificación (de 1.0 a 7.0)	**Porcentaje**	**Ponderación**
Aspectos Formales	6.6	10%	0.66
Formulación del Problema	6.8	20%	1.36
Marco Teórico	6.8	20%	1.36
Marco Metodológico	6.6	20%	1.32
Resultados	6.6	20%	1.32
Conclusiones y Discusión	6.2	10%	0.62
		Calificación Final	6.64

Observaciones y/o Comentarios:

En esta investigación es muy importante enfatizar el conocimiento profesional del Profesor de Educación Básica mediante el desarrollo de las intuiciones para la enseñanza de la Probabilidad. Esto evidencia que se debe tener más estudios y conocimientos de la Probabilidad básica para la formación del profesor de Matemática, quienes deben estar preparados para enseñar este tópico y aprendizaje del razonamiento probabilístico desde temprana edad.

El estudio me parece novedoso y poco estudiado en Chile.

Una reflexión producto de los resultados de esta investigación, me lleva a pensar que los profesores de Educación Básica no están preparados para la enseñanza de conceptos de probabilidades a los cursos de 7° y 8° básico. Las clases de matemáticas deberían ser apoyadas por profesores de matemática de educación media, como se está implementando por ejemplo en establecimientos particulares.

Las sugerencias menores se mejoras del trabajo en aspectos de redacción, citas y bibliografía la haré llegar en el documento escrito al Sr. Sergio Tapia.

María Lidia Retamal Pérez
Departamento de Matemática y Física Aplicadas
Facultad de Ingeniería, UCSC

Fecha: 06 de Diciembre del 2018