

UNIVERSIDAD CATÓLICA DE LA SANTÍSIMA CONCEPCIÓN
FACULTAD DE EDUCACIÓN – FACULTAD DE INGENIERÍA
MAGÍSTER EN DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA



**ANÁLISIS DE TEXTOS Y ANÁLISIS DE ERRORES EN FUTUROS
PROFESORES DE MATEMÁTICA FRENTE A ACTIVIDADES
EVALUATIVAS SOBRE LA ECUACIÓN CUADRÁTICA BIDIMENSIONAL
BAJO EL ENFOQUE ONTOSEMIÓTICO**

POR: PILAR ANGÉLICA MARÍN ORTEGA

DIRECTOR DE TESIS: MARCO URIBE SANTIBÁÑEZ

TESIS PARA OBTENER EL GRADO DE MAGÍSTER EN DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA

ENERO DE 2020

CONCEPCIÓN, CHILE

Dedicatoria

A mis padres Gonzalo y Patricia quienes me han apoyado en cada desafío de mi vida profesional y me han impulsado a ser mejor cada día inculcando en mí el valor del sacrificio y el esfuerzo.

Agradecimientos

En primer lugar, agradezco a Dios por permitirme lograr cada uno de mis desafíos profesionales, entregándome salud y sabiduría.

También agradezco a mi familia, mis padres y hermanos, quienes han estado presentes en todos mis desafíos, acompañándome y brindándome su apoyo incondicional para lograr cada una de mis metas profesionales.

Agradezco enormemente a mi profesor guía, el Sr. Marco Uribe, por aceptarme como su alumna de tesis y darme la confianza para realizar este trabajo; por apoyarme y estar ahí permanentemente durante el tiempo que duró este desafío.

A la profesora Maritza y el profesor Hugo, quienes revisaron mi escrito y me dieron los comentarios necesarios para fortalecer y enriquecer este trabajo.

También agradezco a mis cercanos, amigos, familiares, colegas y en especial a mis alumnos, quienes me inspiran cada día a ser mejor profesional y persona.

Gracias a todos ustedes fue posible que este trabajo llegara a su término.

Índice de contenido

Dedicatoria.....	2
Agradecimientos.....	2
Resumen.....	8
Abstract.....	9
Introducción.....	10
CAPÍTULO I.....	12
FORMULACIÓN GENERAL DEL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN.....	12
I. INVESTIGACIÓN PROPUESTA.....	13
1.1 Formulación del Problema.....	13
1.2 Contexto Educacional.....	14
1.3 Estándares de formación de profesores.....	14
1.4 Antecedentes de la Carrera Pedagogía en Educación Media en Matemática.....	18
1.5 Textos en Matemática.....	19
1.6 Errores en Matemática.....	22
1.7 Preguntas de Investigación.....	29
1.8 Objetivos General y Específicos.....	30
1.9 Supuestos de investigación.....	31
CAPÍTULO II.....	32
MARCO TEÓRICO.....	32
II. MARCO TEÓRICO.....	33
2.1 Descripción del Enfoque Ontosemiótico.....	33
2.2 Objetos Primarios.....	37
CAPÍTULO III.....	43
METODOLOGÍA DE LA INVESTIGACIÓN.....	43
III. METODOLOGÍA.....	44
3.1 Enfoque Metodológico.....	44
3.2 Tipo de estudio y diseño.....	45
3.3 Participantes del Estudio.....	46
3.4 Técnicas de Recopilación de Información.....	47
3.5 Metodología del Proceso.....	48
CAPÍTULO IV.....	52
ANÁLISIS DE RESULTADOS.....	52
IV. ANÁLISIS DE RESULTADOS.....	53
4.1 Análisis de Textos.....	53
Campos de Problemas.....	84
Análisis de problemas a través de los objetos primarios.....	90
4.2. Análisis de Errores.....	93
Análisis de errores a través de los objetos primarios del EOS.....	117
CAPÍTULO V.....	125
CONCLUSIONES, LIMITACIONES Y PROYECCIONES.....	125
5.1 Conclusiones.....	126
5.2 Limitaciones.....	130
5.3 Proyecciones.....	131

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS	132
Referencias Bibliográficas.....	133
Linkografía	137

Índice de Tablas

Tabla 1: <i>Descripción de los textos de estudio</i>	54
Tabla 2: <i>Descripción de los textos</i>	55
Tabla 3: <i>Clasificación de textos</i>	57
Tabla 4: <i>Estructura de textos</i>	58
Tabla 5: <i>Dimensiones del conocimiento según taxonomía de Bloom</i>	60
Tabla 6: <i>Presencia de Objetos primarios del Enfoque Ontosemiótico en los textos</i>	63
Tabla 7: <i>Notación simbólica y expresiones algebraicas</i>	64
Tabla 8: <i>Representación gráfica de secciones cónicas</i>	67
Tabla 9: <i>Tipos y áreas de problemas</i>	70
Tabla 10: <i>Resumen de área de problemas</i>	73
Tabla 11: <i>Enunciado previo a la definición del concepto</i>	74
Tabla 12: <i>Definiciones explícitas presentes en los textos analizados</i>	75
Tabla 13: <i>Formulación analítica de los elementos asociados a la ecuación cuadrática</i>	76
Tabla 14: <i>Descripción de los elementos a través de la gráfica asociada a cada concepto</i>	77
Tabla 15: <i>Propiedades asociadas a la ecuación cuadrática</i>	78
Tabla 16: <i>Teoremas asociados a la ecuación cuadrática</i>	79
Tabla 17: <i>Tipo de argumentación presente en los textos analizados</i>	84
Tabla 18: <i>Resumen Campos de Problemas</i>	89
Tabla 19: <i>Descripción de ítems</i>	94
Tabla 20: <i>Frecuencia de los tipos de respuestas</i>	96
Tabla 21: <i>Frecuencia de errores según Radatz</i>	97
Tabla 22: <i>Resumen de respuestas de estudiantes al ítem 1</i>	98
Tabla 23: <i>Clasificación de errores en ítem 1</i>	99
Tabla 24: <i>Resumen de respuestas de estudiantes al ítem 2</i>	101
Tabla 25: <i>Clasificación de errores en ítem 2</i>	101
Tabla 26: <i>Resumen de respuestas de estudiantes al ítem 3</i>	104
Tabla 27: <i>Clasificación de errores en ítem 3</i>	104
Tabla 28: <i>Resumen de respuestas de estudiantes al ítem 4</i>	107
Tabla 29: <i>Clasificación de errores en ítem 4</i>	107
Tabla 30: <i>Resumen de respuestas de estudiantes al ítem 5</i>	109
Tabla 31: <i>Clasificación de errores en ítem 5</i>	110
Tabla 32: <i>Resumen de respuestas de estudiantes al ítem 6</i>	112
Tabla 33: <i>Clasificación de errores en ítem 6</i>	113
Tabla 34: <i>Resumen de respuestas de estudiantes al ítem 7</i>	115
Tabla 35: <i>Clasificación de errores en ítem 7</i>	116
Tabla 36: <i>Resumen de respuestas erróneas según objetos primarios</i>	117
Tabla 37: <i>Respuestas erróneas de estudiantes relacionadas con conceptos</i>	118
Tabla 38: <i>Respuestas erróneas de estudiantes relacionadas a procedimientos</i>	120
Tabla 39: <i>Respuestas erróneas de estudiantes relacionadas a proposiciones</i>	121
Tabla 40: <i>Respuestas erróneas de estudiantes relacionadas a argumentos</i>	122

Índice de Figuras

<i>Figura 1:</i> Tipos de significados institucionales y personales (Godino, J. D., et.al 2009).....	35
<i>Figura 2:</i> Configuración de objetos y procesos (Godino, J. D., et.al 2009).....	36
<i>Figura 3:</i> Configuración de objetos primarios (Godino, J.D., et.al 2009)	38
<i>Figura 4:</i> Etapas de trabajo en análisis de textos. Elaboración propia.....	49
<i>Figura 5:</i> Fases de trabajo en análisis de evaluaciones. Elaboración propia	51
<i>Figura 6:</i> Uso de tics en T8M. (p. 104).....	59
<i>Figura 7:</i> Actividad nivel de Conocimiento en T1P. (p. 508).....	61
<i>Figura 8:</i> Actividad nivel de Comprensión en T2P. (p. 179).....	61
<i>Figura 9:</i> Actividad nivel de Aplicación en T4P. (p. 912).....	62
<i>Figura 10:</i> Actividad nivel de Análisis en T5P (p. 708)	62
<i>Figura 11:</i> Ecuación canónica de la elipse en T4P (p. 904).....	65
<i>Figura 12:</i> Expresión algebraica para representar la ecuación de la elipse en T4 (p. 904).....	65
<i>Figura 13:</i> Enunciado previo en T1P para el concepto de Elipse (p. 489).....	75
<i>Figura 14:</i> Definición de parábola en T1P. (p. 482)	75
<i>Figura 15:</i> Descripción analítica de la parábola en T1P (p. 482).....	76
<i>Figura 16:</i> Descripción gráfica de la hipérbola en T5 (p. 609).....	77
<i>Figura 17:</i> Propiedades de la reflexión de la parábola en T4P (p. 903).....	79
<i>Figura 18:</i> Ecuación cuadrática general en T7I (p. 631).....	80
<i>Figura 19:</i> Ecuación de la circunferencia en T6I (p. 1173).	80
<i>Figura 20:</i> Procedimientos en T3P (p. 772).....	81
<i>Figura 21:</i> Procedimientos en T9O (p. 53).	82
<i>Figura 22:</i> Ejemplos en T6I (p. 1187).....	83
<i>Figura 23:</i> Argumentos en T3P (p. 761).	84
<i>Figura 24:</i> Ejemplo en T1P, parábola (p. 487).	86
<i>Figura 25:</i> Ejemplo en T3P, elipse (p. 778).....	86
<i>Figura 26:</i> Ejemplo en T4P, elipse (p. 914).....	86
<i>Figura 27:</i> Ejemplo en T2P, circunferencia (p. 109).	87
<i>Figura 28:</i> Ejemplo en T6I, traslación de ejes (p. 1178).....	87
<i>Figura 29:</i> Ejemplo en T1P, rotación de ejes (p. 509).	87
<i>Figura 30:</i> Ejemplo en T6I, hipérbola (p. 626).	88
<i>Figura 31:</i> Ejemplo en T5P, rotación de ejes (p. 708).	88
<i>Figura 32:</i> Ejemplo en T9O, parábola (p. 50).....	88
<i>Figura 33:</i> Ejemplo en T5P, secciones cónicas (p. 696).....	89
<i>Figura 34:</i> Ejemplo en T1P, parábola (p. 484).	90
<i>Figura 35:</i> Ejemplo en T9O, circunferencia (p. 41).....	92
<i>Figura 36:</i> Error de tipo E1	99
<i>Figura 37:</i> Error de tipo E2	102
<i>Figura 38:</i> Ejemplo error de tipo E3	105
<i>Figura 39:</i> Gráfica de la hipérbola obtenida con Geogebra	107
<i>Figura 40:</i> Error de tipo E3	108
<i>Figura 41:</i> Error de tipo E3	110
<i>Figura 42:</i> Gráfica de la elipse obtenida con geogebra.....	112
<i>Figura 43:</i> Error de tipo E2	113
<i>Figura 44:</i> Gráfica de la elipse obtenida con geogebra.....	115

<i>Figura 45: Error de tipo E2</i>	116
<i>Figura 46: Error de concepto en ítem 3</i>	119
<i>Figura 47: Respuesta de estudiante en ítem 5</i>	120
<i>Figura 48: Respuesta de estudiante en ítem 7</i>	121
<i>Figura 49: Respuesta de estudiante en ítem 1</i>	122
<i>Figura 50: Respuesta de estudiante en ítem 3</i>	123

Índice de esquemas

Esquema 1: Objetos primarios del EOS evidenciados en el ejemplo 1	91
Esquema 2: Objetos primarios del EOS evidenciados en ejemplo 2.....	92
Esquema 3: Objetos primarios en actividad evaluativa del ítem 3.....	124

Resumen

En este trabajo se estudia y analiza por una parte libros de texto que forman parte principalmente de la bibliografía de la asignatura de Introducción al análisis, en la carrera de Pedagogía en Educación Media en Matemática de la Universidad Católica de la Santísima Concepción. Para realizar el análisis de texto se considera la estructura y presentación de la ecuación cuadrática bidimensional en los libros de texto, con el fin de evidenciar en qué medida los textos aportan en el aprendizaje del concepto en los futuros profesores de matemática (FPM) que cursan la asignatura antes mencionada; además de identificar la variedad de campos de problemas en que se aborda el objeto matemático en estudio.

En una segunda fase de investigación el propósito consiste en establecer el tipo de errores que cometen los FPM al momento de resolver actividades evaluativas relacionadas con la ecuación cuadrática bidimensional. Estos errores se analizan considerando en el análisis los tipos de respuestas que ponen en juego los FPM cuando se enfrentan a actividades evaluativas en la asignatura antes mencionada.

En esta investigación se considera como marco teórico referencial el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento e Instrucción Matemática para el estudio y análisis de los textos y de los errores, se considera principalmente los objetos primarios del EOS para el levantamiento de información y análisis. La metodología a utilizar es el enfoque cualitativo de investigación, a través de un tipo de estudio descriptivo, en que los participantes corresponden a estudiantes de la carrera Pedagogía en Educación Media en Matemática del segundo semestre del año 2018 correspondiente al primer año en la carrera.

Los resultados obtenidos a través del análisis, permiten identificar la estructura de los textos revisados y, por otra parte, establecer los errores que comúnmente comenten los estudiantes, con la finalidad de describirlos y compararlos con la efectividad que tiene el uso del texto como recurso de aprendizaje.

Abstract

In this work, textbooks are studied and analyzed on the one hand, which are mainly part of the bibliography of the subject of Introduction to analysis, in the Pedagogy in Middle Education in Mathematics of the Catholic University of the Holy Conception. In order to carry out the text analysis, the structure and presentation of the two-dimensional quadratic equation in the textbooks is considered, in order to demonstrate to what extent the texts contribute in the learning of the concept in the future teachers of mathematics (FPM) that they study the aforementioned subject; In addition to identifying the variety of problem fields in which the mathematical object under study is addressed.

In a second phase of research, the purpose is to establish the type of errors that the FPM make when solving evaluation activities related to the two-dimensional quadratic equation. These errors are analyzed considering in the analysis the types of responses that the FPM put into play when faced with evaluative activities in the aforementioned subject.

In this research, the Ontosemiotic Approach to Mathematical Knowledge and Instruction for the study and analysis of texts and errors is considered as a referential theoretical framework, mainly the primary objects of the EOS for information gathering and analysis. The methodology to be used is the qualitative research approach, through a type of descriptive study, in which the participants correspond to students of the Pedagogy in Secondary Education in Mathematics of the second semester of the year 2018 corresponding to the first year in the career.

The results obtained through the analysis, allow to identify the structure of the revised texts and, on the other hand, to establish the errors that the students commonly comment, with the purpose of describing them and comparing them with the effectiveness of the use of the text as a resource of learning.

Introducción

La enseñanza en general, es un proceso fundamental en la Educación Chilena, enseñanza que se da desde los niveles de transición en la enseñanza primaria, siguiendo por la educación secundaria hasta llegar a la educación superior, por la cual se entrega a los estudiantes del sistema educativo los conocimientos y habilidades que van desarrollando a lo largo de su período de formación.

Esta investigación se enfoca en estudiantes de educación superior, de la carrera Pedagogía en Educación Media en Matemática de la UCSC, quienes cursaron el segundo semestre académico del año 2018, y tiene relación con el uso de los textos universitarios declarados en los programas de las asignaturas y los errores cometidos por futuros profesores de matemática (FPM) en la realización de actividades evaluativas. Por otro lado, los estándares de formación de profesores en Mineduc (2012) señalan en sus lineamientos que: “la formación matemática contribuye a que los futuros profesores desarrollen su capacidad de confrontar y construir estrategias para resolver problemas y realizar un análisis crítico de diversas situaciones concretas, incorporando formas habituales de la actividad matemática, tales como la exploración sistemática de alternativas, la aplicación y el ajuste de modelos, la flexibilidad para modificar puntos de vista ante evidencias, la precisión en el lenguaje y la perseverancia en la búsqueda de soluciones” (p. 43). Por ello los futuros profesores deben manejar las herramientas necesarias que le permitan desarrollar la tarea de educar, siendo uno de los propósitos principales el correcto aprendizaje de los contenidos matemáticos propuestos en el plan de estudio de matemática para todos los niveles educativos. De acuerdo a lo anterior, se pretende en esta investigación analizar la ecuación cuadrática bidimensional en textos bibliográficos escolares y universitarios, así como estudiar y analizar los errores que cometen los futuros profesores de matemática (FPM) en la realización de actividades evaluativas bajo el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento e Instrucción Matemática (EOS) (Godino y Batanero 1994). Esta Tesis se ha desarrollado en cinco capítulos que describimos a continuación:

En el capítulo 1 se describe el problema de investigación contextualizándolo en el currículum del sistema educativo chileno, por lo que se considera el currículum en Chile, los estándares para la formación de profesores, el plan de estudio de la carrera de Pedagogía en Educación Media en matemática, se plantean las preguntas de investigación y presentan el objetivo general,

los objetivos específicos.

El capítulo 2 presenta los fundamentos teóricos de este estudio, que se ha considerado como marco referente el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento e Instrucción Matemática, describiendo los objetos primarios como herramienta principal en el análisis de textos y de errores.

El capítulo 3 considera la metodología utilizada para el estudio, que en este caso corresponde al paradigma cualitativo de investigación, pues se considera un análisis descriptivo de lo observado en las actividades evaluativas rendidas por los participantes del estudio y en lo evidenciado luego de la revisión de textos.

En el capítulo 4 se presenta el análisis de los resultados obtenidos en esta investigación, de acuerdo a la selección de los textos considerada y a la revisión de las actividades evaluativas desarrolladas por los FPM en la asignatura de introducción al análisis.

Finalmente, en el capítulo 5 se presentan las conclusiones de esta investigación, considerando las delimitaciones que se tuvo al realizar el estudio y se presentan algunas de las proyecciones que se podrían seguir a partir de esta tesis.

CAPÍTULO I
FORMULACIÓN GENERAL DEL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

I. INVESTIGACIÓN PROPUESTA.

1.1 Formulación del Problema

La enseñanza de la matemática es trascendental en Chile, en todos los niveles educativos. Es por ello que el Ministerio de Educación en Mineduc (2015) señala que “Comprender las matemáticas y ser capaz de aplicar sus conceptos y procedimientos a la resolución de problemas reales, es fundamental para los ciudadanos y las ciudadanas en el mundo moderno” (p. 94).

De acuerdo a lo anterior, el aprendizaje en general y la matemática en particular, es un proceso que se genera de forma progresiva en que se aumenta gradualmente el conocimiento teórico y práctico en los estudiantes a medida que avanzan en las etapas educativas. Por lo tanto, el aprendizaje de la matemática se da principalmente cuando el estudiante logra desarrollar conocimientos, a partir de la reflexión, el razonamiento y la argumentación, al momento de resolver problemas o tareas que logra a través de las habilidades que posee (Mineduc 2015).

En muchas investigaciones se señala la importancia que los textos escolares y universitarios tienen en los procesos de enseñanza aprendizaje, puesto que su uso es fundamental como recurso de aprendizaje para los estudiantes, así lo mencionan Cordero y Flores (2007) señalando que “el libro de texto juega un papel importante puesto que prácticamente norma todas las acciones de enseñanza y aprendizaje o por lo menos tiene una gran influencia en ellas” (p. 14). Así también lo establecen en sus investigaciones Gea, Batanero, Fernandes y Gómez (2014) en relación a la importancia del texto, y el uso de este como recurso didáctico.

Por otro lado, en la enseñanza de las matemáticas es de interés determinar y establecer aquellos errores más frecuentes que comenten los estudiantes frente a la realización de tareas matemáticas, estos errores pueden tener diferentes causas y estar presentes en el desarrollo de actividades de aprendizaje. En esta investigación estamos interesados en estudiar como la estructura y la presentación del contenido de la ecuación cuadrática bidimensional en los textos o libros educativos pueden establecer en los FPM procedimientos o algoritmos matemáticos que induzcan a errores frente a la realización de actividades evaluativas, es decir, la presentación de los contenidos matemáticos en los textos escolares y universitarios pueden favorecer la aparición de errores en las actividades evaluativas. En la mayoría de las ocasiones es el profesor quien presencia los errores por parte de los estudiantes en alguna actividad matemática; los errores son una preocupación constante para el docente ya que suelen aparecer en el desarrollo de tareas educativas y que para su análisis se debe desarrollar un proceso de diagnóstico,

corrección y superación de los errores, todo ello mediante actividades que promuevan en los estudiantes identificar y analizar dichos errores (Engler, Gregorini, Muller, Vrancken y Hecklein, 2015).

1.2 Contexto Educativo

De acuerdo a lo establecido para la asignatura de matemática en las actuales Bases Curriculares (2015) se fijan cuatro ejes temáticos, estos son: Números y Operaciones, Álgebra y Funciones, Geometría y Datos y Probabilidades. El desarrollo de esta investigación está centrado principalmente en el eje de álgebra y funciones, que según MINEDUC (2015) señala que:

“En este eje, se espera que los y las estudiantes comprendan la importancia del lenguaje algebraico para expresarse en matemática y las posibilidades que ese lenguaje les ofrece. Se pretende que escriban, representen y usen expresiones algebraicas para designar números; que establezcan relaciones entre ellos mediante ecuaciones, inecuaciones o funciones, siempre en el contexto de resolver problemas; y que identifiquen regularidades que les permitan construir modelos y expresen dichas regularidades en lenguaje algebraico. Este eje pone especial énfasis en que las alumnas y los alumnos sean capaces de reconocer modelos y ampliarlos, y en que desarrollen la habilidad de comunicarse por medio de expresiones algebraicas”. (p. 99)

1.3 Estándares de formación de profesores

La matemática está presente en la vida de los estudiantes en cada una de las etapas educativas: educación parvularia, escolar y superior. El Mineduc (2012) establece los estándares orientadores para carreras de pedagogía en educación media, estos estándares de formación de profesores entregan orientaciones disciplinares y teóricas, que permiten establecer las habilidades necesarias que debe manejar un egresado de pedagogía, con el fin de conocer en su totalidad las herramientas fundamentales para ejercer su docencia de la mejor forma. Por lo tanto, el propósito general de los estándares según Mineduc (2012) es “ser un instrumento de apoyo para las instituciones formadoras de profesores de Educación Media en las mencionadas disciplinas, ya que tendrán en ellos un parámetro público de referencia para orientar las metas a alcanzar en la formación de sus estudiantes” (p. 7).

Los estándares para egresados de pedagogía en educación media, en las distintas disciplinas, se organizan en dos categorías *Estándares Pedagógicos* y *Estándares Disciplinarios*. Estas complementan con el fin de desarrollar en los futuros profesores conocimientos y habilidades que le permitan ejercer de mejor forma su desempeño profesional.

Estándares Pedagógicos: Los estándares pedagógicos corresponden a todo aquello relacionado con las habilidades profesionales que se deben adquirir para realizar el proceso de enseñanza, junto con ello el conocimiento teórico necesario en cada disciplina con el fin de conocer ampliamente el currículo de la Educación media en el proceso enseñanza aprendizaje, considerando los elementos y tareas esenciales como las planificaciones, ambientes de aprendizaje, comunicación con todos quienes forman el sistema educativos, estudiantes, padres y apoderados, etc. (Mineduc 2012). Dentro de los estándares pedagógicos se mencionan específicamente diez estándares que se aplican para todas las áreas. Para este estudio sólo se mencionan aquellos estándares relacionados con este trabajo los cuales son:

Estándar Pedagógico 1: Conoce a los estudiantes de educación media y sabe cómo aprenden.

Estándar Pedagógico 3: Conoce el currículo de educación media y usa sus diversos instrumentos curriculares para analizar y formular propuestas pedagógicas y evaluativas.

Estándar Pedagógico 4: Sabe cómo diseñar e implementar estrategias de enseñanza aprendizaje adecuadas para los objetivos de aprendizaje y de acuerdo al contexto.

Estándar Pedagógico 5: Está preparado para gestionar la clase y crear un ambiente apropiado para el aprendizaje según contextos.

Estándar Pedagógico 6: Conoce y sabe aplicar métodos de evaluación para observar el progreso de los estudiantes y sabe usar los resultados para retroalimentar el aprendizaje y la práctica pedagógica.

Estándar Pedagógico 9: Se comunica oralmente y por escrito de forma efectiva en diversas situaciones asociadas a su quehacer docente.

Estándar Pedagógico 10: Aprende en forma continua y reflexiona sobre su práctica y su inserción en el sistema educacional.

Estándares disciplinares: Los estándares según el Ministerio de Educación (2012) fueron elaborados para las asignaturas de Lenguaje y Comunicación; Matemática; Historia, Geografía y Ciencias Sociales; Biología; Física; y Química. Esta investigación, está centrada en el área de

matemática, donde se expone lo que los futuros profesores deben realizar, como es la construcción de estrategias en la resolución de problemas, con el fin de abordar y generar actividades relacionadas con situaciones concretas para el análisis y reflexión que permitan realizar una búsqueda de soluciones a partir de los diferentes puntos de vistas y opiniones que manifiesten los estudiantes (Mineduc 2012). Asimismo, el Ministerio de Educación (2012), da a conocer cinco áreas temáticas para matemática: Sistemas Numéricos y Álgebra, Cálculo, Estructuras Algebraicas, Geometría y Datos y Azar. En esta investigación se considera principalmente dos de los ejes. Álgebra y Funciones y Geometría.

Estándares disciplinares para Álgebra

En los estándares disciplinares de álgebra se trabajan los siguientes temas: “sistemas numéricos; la operatoria con expresiones algebraicas y aplicaciones a la resolución de ecuaciones e inecuaciones; y del concepto de función, sus propiedades y representaciones” (Mineduc 2012, p. 43).

Por otra parte, en el aprendizaje del álgebra se considera fundamental generar la capacidad de trabajar en aplicaciones que conlleven al aprendizaje de la matemática. Respecto a los estándares relacionados con este eje, se menciona el estándar N°3, en el cual se señala lo que debe lograr un profesor en formación. De acuerdo a ello, un futuro profesor debe estar capacitado para conducir el aprendizaje de funciones, como tema principal en álgebra, funciones que pueden ser lineales, cuadráticas, exponenciales, entre otras; y que permitan realizar el modelamiento en la resolución de problemas, mediante estrategias de aprendizaje eficientes de acuerdo al contexto escolar en que se apliquen (Mineduc 2012).

La descripción anteriormente mencionada se relaciona con puntos específicos que debe lograr un futuro profesor respecto al eje de álgebra. El Ministerio de Educación (2012) en los estándares señala lo que debe manifestar un profesor en formación, respecto a la ecuación cuadrática bidimensional.

Para identificar estos puntos se denota al Estándar disciplinar álgebra (EDA); a continuación, se identifican los estándares relacionados al eje álgebra y funciones.

EDA 1: Utiliza propiedades de funciones para analizar las soluciones de ecuaciones.

EDA 2: Determina dominios y recorridos de funciones en forma algebraica y gráfica.

EDA 5: Conoce las ventajas y desventajas que tienen para los alumnos y alumnas las diferentes representaciones de una función.

EDA 6: Reconoce los contenidos de diferentes niveles del currículo que se relacionan con el concepto de función.

EDA 7: Planifica actividades que permiten analizar propiedades de funciones que se estudian en diferentes niveles del currículo.

EDA 10: Es capaz de aplicar programas computacionales para que sus alumnos reconozcan propiedades de los gráficos de funciones.

EDA 11: Diseña instrumentos de evaluación acerca de los aprendizajes relacionados con funciones que se estudian a nivel escolar.

EDA 12: Reflexiona acerca de complejidades propias de la evaluación de conocimientos matemáticos a nivel escolar.

Estándares disciplinares para Geometría

Los estándares para este eje consideran los principales temas que debe manejar y conducir un futuro profesor para generar el aprendizaje de la geometría, dentro de ellos está la geometría analítica, del espacio y euclidiana, así también como conceptos relacionados a transformaciones isométricas, mediciones, homotecias y trigonometría (Mineduc 2012).

En relación a este eje, los estándares relacionados pertenecen al estándar N° 14 en el que se menciona lo que el futuro profesor debe ser capaz de realizar: “Es capaz de conducir el aprendizaje de la Geometría analítica plana” (Mineduc 2012, p. 17).

En esta investigación se considera solo aquellos estándares y sub estándares relacionados con la ecuación cuadrática bidimensional. Para ello se denota como al estándar disciplinar de geometría (EDG). Los EDG considerados en esta investigación son:

EDG 2: Resuelve problemas que involucran lugares geométricos y cónicas en el plano.

EDG 3: Emplea coordenadas polares para el estudio de curvas y lugares geométricos.

EDG 5: Utiliza rotación y traslación de ejes para estudiar cónicas.

EDG 6: Conoce las dificultades y errores frecuentes que cometen los estudiantes en geometría analítica, y posee estrategias para superarlos.

EDG 7: Articula los contenidos del currículo escolar referentes a geometría analítica y los relaciona con otros presentes en él.

EDG 9: Plantea actividades que estimulan a los alumnos y alumnas a realizar conexiones entre conceptos geométricos y otros conceptos matemáticos.

EDG 11: Planifica actividades orientadas a que los alumnos y alumnas analicen situaciones especiales al aplicar fórmulas de geometría analítica.

EDG 13: Construye instrumentos para evaluar el aprendizaje referido a puntos, rectas y cónicas en el plano (p. 72).

El aporte de esta investigación en relación a los estándares está en levantar información acerca de cómo los estándares tanto disciplinares como pedagógicos contribuyen en la formación de futuros profesores de matemática en la UCSC.

1.4 Antecedentes de la Carrera Pedagogía en Educación Media en Matemática

En esta investigación se trabaja con profesores en formación de Pedagogía en Educación Media en Matemática de la Universidad Católica de la Santísima Concepción, esta carrera se inicia el año 2011 y a la fecha lleva en funcionamiento 9 años. La duración de esta carrera es de 9 semestres y respecto a su descripción se señala lo siguiente:

“El itinerario formativo de la carrera, a través de un currículum basado en resultados de aprendizajes y competencias, forma a un profesor de Educación Media en Matemática en conformidad al marco curricular nacional, sin obviar la necesaria formación en investigación e innovación, de acuerdo a las necesidades y contextos en que se desenvolverá laboralmente. Por ello, resulta fundamental educar hacia la necesaria disposición a la profundización académica, el perfeccionamiento y el trabajo personal orientados al aprendizaje y autoaprendizaje, imprescindible para cualquier profesional de la educación” (recuperado de <https://educacion.ucsc.cl/carreras/pedagogia-en-educacion-media-en-matematica/>).

Dentro de los ejes formativos y temáticos que contempla la carrera están: Sistemas Numéricos y Álgebra (Estructuras Algebraicas), Cálculo, Geometría y Datos y Azar. Cada uno de estos ejes se trabajan de forma transversal, primero como asignaturas en relación a la teoría y luego cada uno finaliza con su respectiva didáctica específica.

Muchos problemas en la vida cotidiana, así como problemas en la naturaleza son modelados matemáticamente a través de ecuaciones cuadráticas, unidimensional, bidimensional.

tridimensional, por lo que estos conceptos son fundamentales en la formación de los estudiantes de las carreras de pedagogía, en particular, en esta investigación nuestro objeto matemático de estudio es la ecuación cuadrática bidimensional, contenido que se aborda transversalmente en los ejes de Sistemas numéricos y Álgebra, eje de Cálculo y eje de Geometría, específicamente se estudia la ecuación cuadrática bidimensional en las asignaturas de: Introducción al Álgebra, Introducción al cálculo, Introducción al Análisis y de forma implícita en los cursos Geometría del espacio.

En cada uno de los cursos mencionados, la ecuación cuadrática se plantea como parte de los contenidos declarados en los programas de estudios, en Introducción al Álgebra se menciona como “Ecuaciones, tipos de ecuaciones y ecuaciones reducibles a cuadráticas”, en cuanto a Introducción al Análisis se menciona en los contenidos “Gráficas de relaciones lineales, gráficas de relaciones cuadráticas (circunferencia, elipse, hipérbola, parábola)” y por último en Geometría del Espacio, se trabaja la representación gráfica de la ecuación cuadrática asociándola a: “secciones cónicas: Ecuación canónica de una parábola, propiedades y reflexión de la parábola, ecuación canónica de la elipse, propiedades y reflexión de la elipse, ecuación canónica de la hipérbola, reflexión de la hipérbola” (p.3).

Dentro de los contenidos relacionados al eje de geometría, cabe mencionar que implícitamente se encuentran los conceptos de rotación y traslación de ejes. A pesar que estos conceptos no se encuentran formalmente en los cursos correspondientes al eje, son contenidos necesarios para abordar la ecuación cuadrática desde la representación geométrica, como así también en cursos posteriores a los ya mencionados, por ejemplo: el curso correspondiente a ecuaciones diferenciales entre otros.

1.5 Textos en Matemática

En este apartado se describe el uso del texto de matemática como la herramienta en el proceso de aprendizaje de los estudiantes y en la enseñanza dictada por el docente. En la investigación se desea analizar los textos que forman parte de las bibliografías de los programas de estudio en Pedagogía en Educación Matemática en la UCSC, y con ello indagar acerca la estructura que estos poseen y la forma en que se aborda en cada uno del objeto matemático en estudio.

Importancia del texto

En el análisis de texto existen variadas investigaciones que señalan la importancia que este tiene en los procesos de enseñanza aprendizaje, puesto que su uso es fundamental como recurso de aprendizaje para los estudiantes, así lo mencionan Cordero y Flores (2007) señalando que “el libro de texto juega un papel importante puesto que prácticamente norma todas las acciones de enseñanza y aprendizaje o por lo menos tiene una gran influencia en ellas” (p. 14). Así también Gea et.al (2014) realizan una investigación en relación a la importancia del texto, y mencionan el uso del texto como recurso didáctico, señalando lo siguiente:

“su estudio permite observar los resultados de la transposición didáctica (Chevallard, 1991), esto es, los cambios que experimenta el conocimiento matemático cuando es adaptado para la enseñanza. Desde el currículo propuesto en las directrices curriculares al implementado en el aula, una fase importante es el currículo escrito, que se plasma en los libros de texto (Herbel, 2007). Es por ello necesario el estudio del resultado de la transposición didáctica, plasmado en los libros de texto, para asegurar que no se producen desajustes respecto al significado institucional de los objetos matemáticos” (p. 147).

De acuerdo a la importancia que tiene el texto en el proceso de aprendizaje, se evidencia que los textos complementan la enseñanza, ya que presentan una fuente de actividades y tareas a resolver en el aula, son una guía de aprendizaje donde se encuentra el conocimiento a transmitir y contribuye como una herramienta de estudio para los estudiantes (Ortiz, 1999 citado por Gea 2014). Es por ello, que el texto se considera una herramienta fundamental tanto para el estudiante como para el docente; dentro de esta investigación se trabaja con futuros profesores quienes en este caso tienen ambos roles y que, por lo tanto, hacen permanente uso de los textos en su aprendizaje, pues son los profesores quienes consideran secciones del texto como fuente de conocimiento que utilizan en sus prácticas diarias (Cordero y Flores, 2007). Asimismo, la importancia en el uso del texto se deriva desde el análisis crítico que se puede realizar entorno a este, en relación a su evaluación, idoneidad y adecuación, ya que esto debe representar un factor importante en los programas de formación de profesores, esto según señalan Font y Godino (2006).

Investigaciones acerca del uso del texto

El análisis de texto corresponde a una de las investigaciones que con mayor frecuencia se realiza en el área de la matemática, es por ello que existen diversos estudios que tratan algún tema en específico y lo analizan utilizando como herramienta los textos, ya sean escolares o universitarios. Dentro de dichas investigaciones se encuentra el análisis de conceptos de cualquier eje de matemática, ya sea en álgebra, funciones, cálculo, geometría o datos y azar. Algunos de estos estudios, están relacionados con analizar habilidades matemáticas y ver cómo los textos aportan en dicha área para lograr el cumplimiento de objetivos y habilidades declaradas en el currículum chileno para la asignatura. Del Pino y Estepa (2017) desarrollan una investigación entorno a la dispersión estadística, concepto declarado en la educación secundaria obligatoria, para ello analizan y revisan los contenidos relacionados a dispersión en una muestra de textos correspondientes a los niveles de 3° y 4°. Asimismo, Parra y Pino-Fan (2017), estudian el concepto de función en los libros de texto chilenos debido a la importancia que tiene el uso del texto en la práctica docente durante el proceso de enseñanza aprendizaje. Por otra parte, el análisis de texto se realiza en distintas direcciones, Reyes (2017) investiga acerca de la idoneidad didáctica de dos textos escolares chilenos que presentan un enfoque intercultural como forma de enseñanza en que se rescatan y valoran los pueblos originarios chilenos, pero no solo desde la visión del lenguaje, sino también en matemática. Asimismo, Martínez (2008) trabaja el análisis de textos como práctica discursiva, en un estudio en que desarrolla las ideas positivas y negativas del uso del texto, generando una opinión controversial acerca de la práctica docente y el excesivo uso del texto como recurso de aprendizaje en el aula. Por otra parte, Burgos, Castillo, Beltrán, Giacomone y Godino (2019) desarrollan un método de análisis para profundizar y ampliar las características de una lección para un libro de texto determinado, ello relacionado al concepto de proporcionalidad y en un curso de educación primaria, a través del EOS. Otros estudios sobre análisis de textos sobre Optimización en el Bachillerato pueden ser visto en Balcaza, Contreras y Font (2017, 2018).

De acuerdo a las investigaciones mencionadas, se reafirma la importancia del análisis y estudio del texto desde diferentes perspectivas. Para esta investigación, el análisis está enmarcado en estudiar la ecuación cuadrática bidimensional como objeto matemático presente en los programas de estudio de los FPM de la UCSC.

El texto como elemento de aprendizaje en la formación de profesores

Existen escasas investigaciones en relación al análisis de textos y la formación de profesores. Dentro de la información revisada se evidencia que, Cooney (1985) citado por Parra y Pino-Fan (2017) en su estudio revelan que “los libros de texto son la influencia primaria para las concepciones curriculares de los profesores, así como para su estilo de instrucción matemática” (p. 2). Así también, es importante considerar que los textos son herramientas reguladoras en el proceso de enseñanza aprendizaje, pues poseen una gran implicancia en lo que desarrolla un profesor en la clase de matemática en relación a la teoría y las prácticas que utiliza dentro del aula (Martínez, 2008).

1.6 Errores en Matemática

Definición e importancia del error

Los errores en la enseñanza de la matemática surgen frecuentemente y son evidenciados generalmente en la clase de matemática por parte del docente. Existen diversas investigaciones que tratan acerca del concepto de error, en cuanto a su definición, importancia o el porqué de su aparición. Bernabeu, León, Jiménez y Matos (2009) definen el error como “la presencia de un esquema cognitivo, inadecuado en el alumno” (p. 5). Así también los autores señalan respecto al error que es una “manifestación exterior de un proceso complejo en el que interactúan muchas variables: profesor, alumno, currículo, contexto sociocultural, etc” (p. 5). Por lo tanto, los errores no surgen de forma casual en los estudiantes, ya que su presencia se genera por la equivocada cognición de conceptos que han adquirido en sus aprendizajes previos, o diferentes causas que se vuelven inevitables en algunos casos. Es por ello que los errores que surgen dentro del proceso de enseñanza aprendizaje dependen fundamentalmente del entorno en que se desarrolle dicho proceso con el estudiante y cuyas causas pueden variar, pero que generalmente se mantienen en el tiempo.

Por otra parte, García (2010) menciona el aprendizaje de la matemática como una fuente que genera errores de distinta naturaleza, como la siguiente “Algunas tienen su origen en el macrosistema educativo, pero en general, su procedencia se concreta en el microsistema educativo, es decir, alumno, materia, profesor e institución escolar” (p. 9).

Respecto al error y la forma en que este se aborda, es el docente quien debe enfatizar en el error y trabajar en él conjuntamente con los estudiantes, de esta forma se generan aprendizajes significativos; que influyen positivamente en el rendimiento académico de los estudiantes (Engler et.al 2015).

En cuanto al origen de por qué se producen los errores en el proceso de aprendizaje, Uribe (2015) señala lo siguiente:

“Los errores forman parte de lo que produce un estudiante en el proceso de aprender Matemáticas y se constituyen, para muchos, en elementos estables dentro del mismo proceso, constituyéndose en señales de serias deficiencias en los desarrollos algebraicos llegando a convertirse, en muchos casos, en causa de fracaso académico” (p. 4).

Así también, los estudiantes comenten errores de forma reiterada por la mala comprensión de algún concepto durante el aprendizaje y en ocasiones estos errores suelen ser repetitivos, por lo tanto, esto puede generar dificultades por parte de los estudiantes al momento de realizar alguna actividad matemática (Uribe 2015).

Por otra parte, es importante mencionar que los errores son una fuente de aprendizaje, pues permiten trabajar desde otra perspectiva el conocimiento de conceptos, además pueden ser superados con el tiempo (Abrate R., Pochulu M. y Vargas J. 2006).

Algunas características principales de los errores señalados por Rico (1995) citado por Abrate et.al (2006) son los siguientes:

- Los errores son a menudo el resultado de grandes concepciones inadecuadas acerca de aspectos fundamentales de las matemáticas.
- Frecuentemente los errores se presentan como resultado de la aplicación correcta y crédula de un procedimiento imperfecto sistematizado, que se puede identificar con facilidad por el profesor.
- También los errores pueden presentarse cuando el alumno utiliza procedimientos imperfectos y posee concepciones inadecuadas que no son reconocidas por el profesor.
- Los alumnos con frecuencia inventan sus propios métodos, no formales, pero altamente originales, para la realización de las tareas que se les proponen y la resolución de problemas (p. 34).

Tipos de errores

En esta investigación el propósito principal es detectar los errores que frecuentemente cometen los futuros profesores de matemática FPM en actividades evaluativas relacionadas con la ecuación cuadrática bidimensional; respecto a ello Kilpatrick, Gómez y Rico (1998) mencionan cuatro líneas principales en que se estudia el error, estas líneas son:

- Primero, estudios relativos al análisis de errores, causas que los producen o elementos que los explican, y taxonomías y clasificaciones de errores detectados.
- Segundo, Estudios dedicados al tratamiento curricular de los errores del aprendizaje en matemáticas.
- Tercero, estudios dedicados a determinar qué conviene que aprendan los profesores en formación en relación con los errores que cometen los alumnos.
- Cuarto, trabajos de carácter técnico que implementan y sostienen una determinada clase de análisis sobre errores (p. 85).

De acuerdo a los cuatro puntos planteados, esta investigación se concentra en el tercer punto, respecto a formación de profesores, ya que se busca observar y analizar los procesos que evidencian los errores de los FPM en relación a la ecuación cuadrática.

Existen formas de clasificar los errores de acuerdo a como se presentan, Radatz (1979) citado por Kilpatrick et.al (1998) realiza un análisis de los errores más frecuentes relacionados con el procesamiento de información y los clasifica en categorías, estas son: dificultades del lenguaje, dificultades de información espacial, errores de aprendizaje respecto a hechos, destrezas y conocimientos, errores debido a asociaciones incorrectas y errores respecto a reglas y estrategias. Cada categoría esta descrita de tal forma que se pueda evidenciar en la información obtenida. A continuación, se presenta la descripción con que Radatz (1979) señala cada una de ellas:

- 1) *Errores debidos a dificultades de lenguaje.* Señala que el aprendizaje de los conceptos, símbolos y vocabulario matemáticos es para muchos alumnos un problema similar al aprendizaje de una lengua extranjera. Una falta de comprensión semántica de los textos matemáticos es fuente de errores; por ello, la resolución de problemas verbales está especialmente abierta a errores de traducción desde un esquema semántico en el lenguaje natural a un esquema más formal en el lenguaje matemático.

- 2) *Errores debidos a dificultades para obtener información espacial.* Aunque se trata de un campo de estudio cuyo desarrollo se está iniciando, es cierto que las diferencias individuales en la capacidad para pensar mediante imágenes espaciales o visuales es una fuente de dificultades para muchos jóvenes y niños en la realización de tareas matemáticas.
- 3) *Errores debidos a un aprendizaje deficiente de hechos, destrezas y conceptos previos.* En este tipo de errores se incluyen todas las deficiencias de conocimiento sobre contenidos y procedimientos específicos para la realización de una tarea matemática. Estas deficiencias incluyen la ignorancia de los algoritmos, conocimiento inadecuado de hechos básicos, procedimientos incorrectos en la aplicación de técnicas y dominio insuficiente de símbolos y conceptos necesarios.
- 4) *Errores debidos a asociaciones incorrectas o a rigidez del pensamiento.* La experiencia sobre problemas similares anteriores puede producir una rigidez en el modo habitual de pensamiento y una falta de flexibilidad para codificar y decodificar nueva información. En estos casos los alumnos desarrollan operaciones cognitivas, que continúan empleando aun cuando las condiciones fundamentales de la tarea matemática en cuestión se hayan modificado. Persisten en la mente algunos aspectos del contenido o del proceso de solución, inhibiendo el procesamiento de nueva información.
- 5) *Errores debidos a la aplicación de reglas o estrategias irrelevantes.* Este tipo de errores surgen con frecuencia por aplicar con éxito reglas o estrategias similares en áreas de contenidos diferentes (p. 88).

Las categorías planteadas no son únicas, puesto que en otras investigaciones se presentan distintas formas para clasificar errores. Para esta investigación se considera necesario hacer uso de dichas categorías, pues ejemplifican esencialmente lo que se espera evidenciar respecto a los errores en futuros profesores y de acuerdo con el análisis de texto que se realiza previamente.

Errores y formación de profesores

Los errores generalmente se evidencian cuando se realizan tareas o actividades matemáticas que desarrollan los estudiantes de los diferentes niveles educativos como así también los FPM, en este último caso es imprescindible identificar y analizar si los futuros profesores cometen errores, con el fin de trabajarlos y superarlos, para que a la hora de poner en práctica la enseñanza

de un nuevo conocimiento, este no se vea afectado por la aparición de errores ni el cuestionamiento del proceso de enseñanza y su veracidad (Nortes R. y Nortes A. 2016).

Asimismo, Abrate et.al (2006) señalan respecto a los profesores en formación los errores que estos cometen al momento de realizar tareas matemáticas, mencionado que “los profesores en formación cometen errores en la realización de tareas matemáticas, muchos de ellos similares o debidos a las mismas causas que los que cometen los alumnos; y poner de manifiesto las concepciones deficientes y los errores cometidos resultaría una tarea formativa ineludible para ellos, en tanto obligaría a una reestructuración positiva de los esquemas previos” (p. 16).

De esta forma los errores no siempre son parte de los estudiantes, ya que también puede estar presente en el profesor o profesor en formación, en el conocimiento matemático que éste presente y en cómo esto puede afectar el proceso educativo. Asimismo, respecto a las causas que propician el error en matemática, Nortes R. y Nortes A. (2016) mencionan que muchas veces se relacionan con la actitud y ansiedad que se presentan hacia la matemática y enfatizan que esto sucede generalmente al resolver un problema.

Los errores forman parte del proceso de aprendizaje de los estudiantes y contribuyen positivamente en éste, pues se trabaja los conocimientos que poseen desde la teoría hasta las habilidades que se ponen en juego al realizar una tarea matemática. Esto muchas veces conlleva a errores, que se manifiestan de forma inevitable en el proceso de enseñanza y que tienen por objetivo ser analizados y trabajados (Kilpatrick et.al, 1998).

Los puntos anteriormente señalados son fundamentales como material teórico que deben conocer y considerar tanto los profesores como los profesores en formación, ya que debe convertirse en objeto de estudio para la reflexión y práctica docente, así lo señala Kilpatrick et.al (1998) quien menciona lo siguiente:

“los profesores en formación inicial y permanente deben tener un conocimiento general de las consideraciones teóricas y de fundamentación relativas a la clasificación de errores, determinación de causas, esquemas teóricos de interpretación y desarrollo curricular derivado del diagnóstico, tratamiento y superación de los errores en el aprendizaje” (p. 98).

Asimismo, es importante considerar el análisis de errores, puesto que los profesores en formación muchas veces cometen errores debido a causas similares que sus estudiantes en tareas matemáticas, dejando en evidencia los conceptos no adquiridos o cuya concepción es deficiente.

Por lo tanto, es necesario utilizar dichas tareas o actividades para proponer las correcciones necesarias que permitan generar y reestructurar los conocimientos cognitivos previos que poseen los estudiantes (Kilpatrick et.al 1998).

Investigaciones acerca de errores

Existen investigaciones que relacionan los errores evidenciados con algún objeto matemático en específico, dentro de la intervención a través de cuestionarios o pruebas que detecten los errores más comunes o frecuentes en alguna muestra. Minnard (2016), realiza un análisis de errores más frecuentes en estudiantes de ingeniería de primer año a través de un test, para determinar las competencias que poseen los estudiantes que ingresan a dicha carrera, dicho test es realizado considerando diferentes tipos de problemas en las unidades principales de matemática, de esta forma la segunda unidad considerada hace alusión a la ecuación y en un apartado en específico a la ecuación cuadrática. La investigación realizada revela que el 33% de los estudiantes presenta problemas en los contenidos relacionados a dicho objeto matemático, el objetivo de este estudio es, según Minnard (2016) encontrar “acciones para mejorar la formación docente y por el otro, facilitar el tránsito de los alumnos entre el secundario y las carreras científicas y tecnológicas” (p. 19), todo ello con el objetivo que los estudiantes novatos adquieran las competencias necesarias para llevar con efectividad la asignatura de matemática. Nortes R. y Nortes A. (2016), realizan una investigación relacionada a los errores evidenciados en futuros profesores de matemática del grado de primaria. Esta investigación se basa en abordar los tipos de errores que surgen luego que se solicita a los profesores realizar un problema matemático elemental. Respecto a los resultados obtenidos, se concluye que los errores se mantienen durante todo el proceso, errores básicos de teoría que surgen a pesar de la realización de cursos en didáctica y matemática, lo que conlleva a manifestar errores que se transmiten desde el profesor a los estudiantes.

De ello es posible señalar que los errores que se han evidenciado se mantienen constantes a pesar de las variadas intervenciones con cursos de especialización en las asignaturas que deben cursar los futuros profesores de forma obligatoria, por lo tanto, con los resultados obtenidos se espera mejorar los programas de los cursos que deben realizar los futuros profesores, con el fin de entregarles las competencias necesarias y fundamentales que necesitan para desarrollar su labor como docentes.

El análisis de los errores en matemática permite una mejor comprensión del objeto matemático en el cual está enfocada esta investigación, para este caso, la ecuación cuadrática. Así lo señala Bernabeu et.al (2009) quienes mencionan que el análisis de errores “puede proporcionar una comprensión más completa y profunda del contenido, ayudándonos a investigar cuestiones relativas a la enseñanza y aprendizaje del mismo, a los que generalmente resulta difícil acercarse por otra vía” (p. 6).

Así también, considerando ambos focos de esta investigación, Barrantes y Zapata (2008) mencionan en su investigación la relación que existe entre el error y los libros de texto señalando lo siguiente: “Estos errores, en la enseñanza de la geometría, son causados muchas veces por una utilización exclusiva del libro de texto y la no utilización de otros recursos o materiales que amplíen el esquema conceptual del alumno” (p. 56). De esta forma, también se menciona que la utilización de los textos genera graves confusiones en los estudiantes, en el caso del aprendizaje de conceptos, que pueden ser definidos por el maestro y por los textos de distinta forma, generando contradicciones en dichas definiciones.

Dentro de las investigaciones revisadas como referencias teóricas, existe escasa literatura acerca de la conexión que hay entre el aprendizaje de ciertos objetos matemáticos y los errores que estos ocasionan en los futuros profesores, por lo tanto, no se ha evidenciado investigaciones que relacionen ambos temas. A partir de esto, es que en esta investigación se pretende establecer aquellos errores que cometen los FPM cuando realizan tareas evaluativas respecto a la ecuación cuadrática bidimensional.

Investigaciones sobre la ecuación cuadrática

Existen investigaciones relacionadas con la ecuación cuadrática en diferentes aspectos, algunas de ellas se centran en la evolución histórica del concepto Sánchez, Montes y Luque (2005) presentan un trabajo desde el marco histórico en la resolución de la ecuación cuadrática, iniciando en un contexto geométrico para luego trabajar desde la construcción del concepto en el aula cuyo propósito es “crear una secuencia de situaciones didácticas, basadas en la reflexión sobre los métodos de solución de las ecuaciones cuadráticas utilizados en cada época”. Asimismo, Martínez y Arrieche (2010), estudian las configuraciones epistémicas y el desarrollo histórico de la ecuación de segundo grado con la finalidad de “acercar el objeto matemático al estudiante, para convertirlo en un tema más accesible, práctico e interesante” (p. 98).

Bonilla y Parraguez (2013) realizan un estudio acerca de la comprensión del concepto de Elipse en estudiantes bajo un enfoque cognitivo desde la teoría de los modos de pensamiento.

Por otra parte, Llanes, Ibarra y Hernández (2016) investigan las prácticas discursivas y operativas de dos profesores de bachillerato durante el desarrollo del tema “Resuelve Ecuaciones Cuadráticas I”. El propósito del estudio fue “determinar que los profesores alcanzan una mayor idoneidad didáctica (media alta) y una mayor coincidencia en los conocimientos evidenciados en las facetas epistémica y ecológica” (p. 1).

1.7 Preguntas de Investigación

El contexto de la investigación está centrado en analizar los textos universitarios que son utilizados por los FPM como recurso bibliográfico declarado en el programa de la asignatura, Introducción al Análisis de la carrera de Pedagogía Media en Matemática. Con el propósito de complementar este análisis se han incorporado otros textos de estudios en que el contenido de la ecuación cuadrática bidimensional es abordado. Por otro lado, esta investigación también se enfoca en analizar los errores que comenten los FPM al responder a actividades evaluativas sobre la ecuación cuadrática bidimensional. Una problemática interesante a observar es poder indagar y establecer cómo estos errores cometidos por los FPM pueden ser inducidos o estar direccionados por la estructura de los textos universitarios que ellos utilizan. En relación a lo anterior se ha planteado las siguientes preguntas de investigación:

¿La estructura de los textos declarados en la bibliografía de la asignatura introducción al análisis y que podrían utilizar los estudiantes pueden inducir a errores en el aprendizaje de la ecuación cuadrática bidimensional?

¿Cuáles son los errores más usuales que comenten los futuros profesores de matemática en las respuestas dadas frente a tareas evaluativas relacionadas con la ecuación cuadrática bidimensional?

Para responder a estas preguntas, se plantean los siguientes objetivos de investigación:

1.8 Objetivos General y Específicos

Objetivo General

Analizar los textos universitarios y analizar los tipos de errores que comenten los futuros profesores de matemática frente a la realización de actividades evaluativas relacionadas con la ecuación cuadrática bidimensional bajo el Enfoque Ontosemiótico.

Objetivos Específicos

Objetivo Específico 1 (OE1): Indagar acerca de la estructura de los textos utilizados por los futuros profesores de matemática de la Universidad Católica de la Santísima Concepción, respecto de la ecuación cuadrática bidimensional.

Objetivo Específico 2 (OE2): Identificar y caracterizar los errores que comenten los futuros profesores de matemática en las respuestas dadas a actividades evaluativas sobre la ecuación cuadrática bidimensional.

Objetivo Específico 3 (OE3): Identificar la relación que existe entre los textos declarados en la bibliografía de la asignatura introducción al análisis cursada por los futuros profesores de matemática de la Universidad Católica de la Santísima Concepción y los errores que cometen los mismos en la resolución de actividades evaluativas respecto a la ecuación cuadrática bidimensional.

1.9 Supuestos de investigación

Los supuestos para esta investigación son los siguientes:

- a) Los textos escolares y universitarios analizados, presentan una estructura que aborda todos los aspectos relacionados con la ecuación cuadrática bidimensional.
- b) Los futuros profesores de matemática cometen mayoritariamente errores de tipo algebraico y procedimental.
- c) Las actividades evaluativas están en relación con los campos de problemas propuestos en el análisis de textos.
- d) Existe una relación causal entre la estructura de los textos declarados en la bibliografía de la asignatura Introducción al Análisis y los errores que cometen los FPM al resolver problemas relacionados con la ecuación cuadrática bidimensional.

CAPÍTULO II
MARCO TEÓRICO

II. MARCO TEÓRICO

En este capítulo se describe el marco de referencia que da sustento a esta investigación, el cual corresponde al Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento e Instrucción Matemática (EOS) propuesto por Godino, Batanero y Font (2009); en particular se aplican las nociones de objeto matemático, práctica y los objetos primarios propuestos en el enfoque.

2.1 Descripción del Enfoque Ontosemiótico

En esta investigación, la problemática planteada es analizar los textos escolares y universitarios que utilizan los FPM, así también se realiza un análisis de los errores cometidos por los FPM frente a actividades evaluativas respecto a la ecuación cuadrática bidimensional. En el EOS se trabaja desarrollando diferentes nociones en cuanto a los procesos de diseño e instrucción en la actividad matemática. Para este trabajo se considera solo la noción de sistema de prácticas y noción de objetos y procesos, pues se utiliza como herramientas de análisis los objetos primarios del EOS.

El EOS, fue iniciado en los años 90 por el grupo de investigación Teoría de la Educación Matemática de la Universidad de Granada, con los trabajos iniciales de Godino y Batanero. Ambos autores entre los años 1993 y 1998 comienzan desarrollando la noción de “significado institucional y personal de un objeto matemático y su relación con la noción de comprensión” (Godino et.al 2009, p. 3), es en el año 2006 en que el modelo es perfeccionado hasta tener un marco teórico referencial en didáctica de la matemática llamándose Enfoque Ontosemiótico del conocimiento e instrucción matemática. En el año 2009 Godino, Batanero y Font describen y desarrollan el EOS como marco teórico. La definición general que señalan para el enfoque es la siguiente “marco teórico para la didáctica de las matemáticas impulsado por problemas relacionados con la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas y la aspiración de articular las diversas dimensiones y perspectivas implicadas” (p. 20).

Este enfoque tiene como finalidad “tratar de aportar herramientas teóricas para analizar conjuntamente el pensamiento matemático, los ostensivos que le acompañan, las situaciones y los factores que condicionan su desarrollo” (Godino, Giacomone, Batanero y Font 2017) (p. 3). El EOS, está constituido en la enunciación de una “ontología de los objetos matemáticos que tiene en cuenta el triple aspecto de la matemática como actividad de resolución de problemas, socialmente compartida, como lenguaje simbólico y sistema conceptual lógicamente

organizado, pero teniendo en cuenta además la dimensión cognitiva individual” (p. 20) así lo describen Godino et.al (2017).

Así también los autores señalan respecto al enfoque lo siguiente:

“En el EOS se asumen los presupuestos de la epistemología pragmatista y los objetos se derivan de las prácticas matemáticas. En concreto se considera que los objetos matemáticos son emergentes de sistemas de prácticas. Dicha emergencia es un fenómeno complejo cuya explicación implica considerar, como mínimo, dos niveles de objetos que emergen de la actividad matemática” (p. 5).

Significado Personal y Significado Institucional

Las nociones de significado personal y significado institucional se derivan de un objeto matemático concreto. Según Blanco (2012) es, en los sistemas de práctica donde se pueden identificar este tipo de significados, cuya finalidad es precisar y operativizar las nociones de relación personal e institucional de un objeto.

Un sistema de práctica matemática es entendido por Bautista, de la Fuente y Moll (2017) como “toda actuación o expresión realizada para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución obtenida, validarla o generalizarla a otros contextos o problemas” (p. 4). Desde el sistema de práctica se derivan los significados institucional y personal, es así como Godino (1996) citado por Gea (2014) señala que la comprensión de un objeto se puede realizar a través de la observación directa de las prácticas personales e institucionales (significado personal e institucional), dichas observaciones son los indicadores que permiten la evaluación de la práctica.

Según Godino y Batanero (1994) “el significado de los objetos matemáticos debe estar referido a la acción (interiorizada o no) que realiza un sujeto en relación con dichos objetos” (p. 12). El significado entonces puede ser personal e institucional dependiendo de la práctica que se realice. El significado personal surge a través de las prácticas personales, que según Godino et.al (1994) son “actuaciones observables, esto es, manifestaciones empíricas, o también acciones interiorizadas no observables directamente” (p. 8). Este tipo de prácticas se realiza con el fin de intentar resolver un problema, que se deriva de un objeto en un momento dado.

En cuanto al significado institucional, Godino y Batanero (1994) señalan que “permite introducir en la problemática epistemológica y didáctica el estudio de la estructura de los

sistemas de prácticas sociales de los que emergen los objetos matemáticos, así como de su evolución temporal y dependencia institucional” (p. 13). Por lo tanto, este tipo de práctica se realiza en sistemas de prácticas institucionales respecto a un objeto matemático específico en un problema dado.

Es por esto que en esta investigación se considera el *significado personal* como toda práctica realizada por los profesores en formación, manifestada en las tareas matemáticas a desarrollar, y el *significado institucional* como todo aquello pretendido en los planes de estudio de las asignaturas de formación. Lo anterior se resumen en el siguiente esquema:

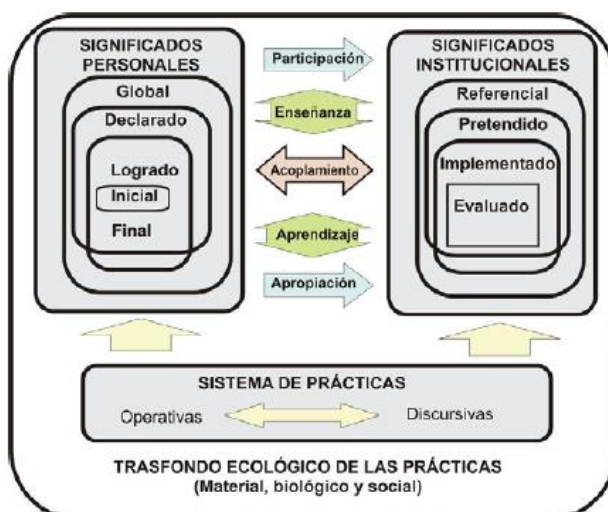


Figura 1: Tipos de significados institucionales y personales (Godino, J. D., et.al 2009)

Objeto Matemático, Práctica y Significado

Es necesario definir qué se entiende por práctica matemática, este concepto según Godino et.al (2009) se entenderá como: “toda actuación o expresión (verbal, gráfica, etc.) realizada por alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución obtenida, validarla o generalizarla a otros contextos y problemas” (p. 4). Respecto al concepto de objeto matemático Godino et al, (2006) citado por Bautista (2018) lo definen como “sistema de prácticas operativas y discursivas para resolver un cierto tipo de problemas” (p. 20). Asimismo, el objeto matemático surge a través del sistema de prácticas y se genera progresivamente mientras se trabaja alguna tarea o actividad matemática dentro de la institución (Contreras, Ordoñez y Wilhelmi 2010).

Por lo tanto, es importante el hecho de que el objeto matemático está completamente ligado a lo institucional y que el significado de este varía completamente del lugar en que se trabaje dicho objeto, Godino (2002) citado por Gea, Batanero, Cañadas y Contreras (2014) señalan que el

objeto matemático “se caracteriza por su definición y propiedades; pero éstas pueden variar según las distintas instituciones en que se trate y, por tanto, hemos de concederles un carácter relativo” (p. 128).

En relación al objeto y práctica matemática se derivan diferentes tipos de objetos que se relacionan entre sí y que permiten la descripción de las configuraciones para el análisis del aprendizaje respecto a un tema en específico, este tipo de objeto son los objetos primarios, que serán descritos más adelante.

El contexto en el que se desarrolla una práctica matemática, puede ser personal o institucional. Personal si la práctica es específicamente de la persona e institucional si ésta es compartida a una institución, es así como Godino et.al (2009) consideran el contexto de la siguiente forma: “Una institución está constituida por las personas involucradas en una misma clase de situaciones problemáticas” (p. 5). Los objetos matemáticos intervienen en las prácticas matemáticas y en el lenguaje, de acuerdo a ello, pueden presentar distintas facetas duales como son: Personal – Institucional, ostensivo – no ostensivo, expresión – contenido, extensivo – intensivo y unitario – sistémico. Por lo tanto, para un nivel de análisis detallado a partir del enfoque, es necesario considerar el objeto matemático en juego y por ende los objetos primarios implicados en las prácticas, así también los procesos matemáticos. Lo anterior se resume en el siguiente esquema:

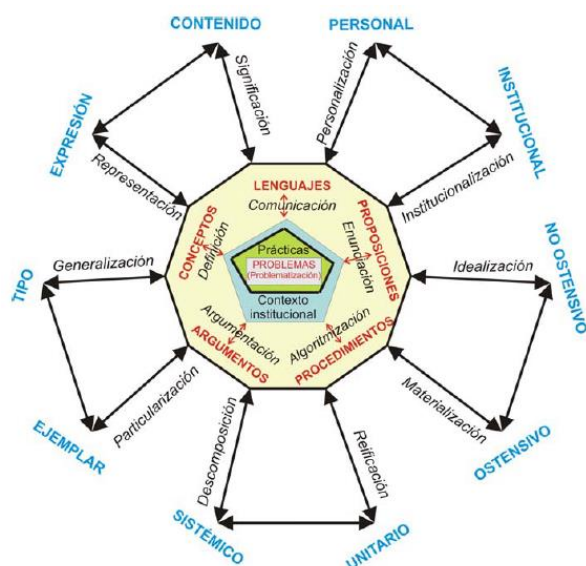


Figura 2: Configuración de objetos y procesos (Godino, J. D., et.al 2009)

La representación del esquema considera desde su centro la práctica matemática como la acción realizada por alguien para resolver un problema en un contexto determinado. A partir de la práctica matemática, se puede precisar y explicitar el objeto matemático, por ello, surgen los objetos primarios. Cada objeto primario está vinculado con un proceso cognitivo - epistémico tales como: institucionalización, idealización, materialización, generalización, descomposición, etc, estos procesos según Godino et.al (2009) forman parte de los procesos más importantes en una actividad matemática. A través de los procesos surgen los atributos contextuales de los objetos, en las dualidades: personal – institucional, ostensivo – no ostensivo, unitario – sistémico, etc. Este esquema permite realizar un análisis detallado a partir de un objeto matemático.

Godino et.al (2017) señalan una descripción desde el marco teórico del EOS en cuanto a los principales componentes del enfoque, mencionando lo siguiente:

“Las nociones de conocimiento y competencia se relacionan, teniendo en cuenta las conexiones entre práctica y objeto. La práctica, como acción orientada al fin de resolver un problema o realizar una tarea, conlleva una capacidad o competencia por parte del sujeto que la realiza. Pero la realización competente de una práctica implica la intervención de objetos interconectados que regulan y emergen de la misma, los cuales constituyen el conocimiento declarativo o discursivo correspondiente” (p. 6).

2.2 Objetos Primarios

Como se señaló anteriormente, dentro de las prácticas matemáticas intervienen tipos de objetos, Godino et.al (2009) señalan seis objetos considerados como primarios para el funcionamiento de dichas prácticas. Estos objetos son: situaciones - problema, lenguaje, conceptos, proposición, procedimientos y argumentos. En esta investigación se utiliza esta clasificación en el análisis de textos escolares y universitarios y en el análisis de actividades evaluativas desarrolladas por los FPM.

Los seis objetos primarios señalados están relacionados entre sí a través de diferentes funciones que permiten la aplicación del análisis frente a un objeto derivado de una práctica matemática; dicha relación está presentada en la siguiente figura:

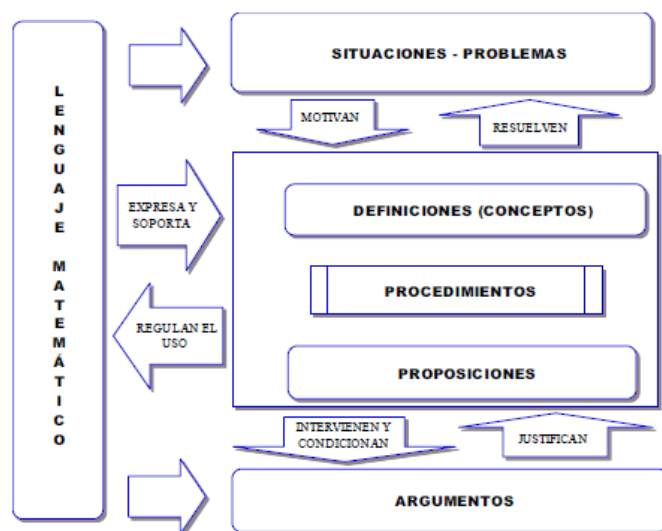


Figura 3: Configuración de objetos primarios (Godino, J.D., et.al 2009)

En el esquema los seis objetos primarios están vinculados entre sí, los autores han definido estos objetos con las siguientes descripciones:

- *Elementos lingüísticos* (términos, expresiones, notaciones, gráficos, ...) en sus diversos registros (escrito, oral, gestual, ...).
- *Situaciones – problemas* (aplicaciones extra-matemáticas, tareas, ejercicios, ...).
- *Conceptos- definición* (introducidos mediante definiciones o descripciones) (recta, punto, número, media, función, ...).
- *Proposiciones* (enunciados sobre conceptos, ...).
- *Procedimientos* (algoritmos, operaciones, técnicas de cálculo, ...).
- *Argumentos* (enunciados usados para validar o explicar las proposiciones y procedimientos, deductivos o de otro tipo, ...) (p. 7).

Los objetos primarios nombrados permiten diferenciar cuando se trata de una entidad conceptual o procedimental. Por lo tanto, según los autores Godino et. al (2009) la vinculación que hay entre dichos objetos es la siguiente “Las situaciones – problemas son el origen o razón de ser de la actividad; el lenguaje representa las restantes entidades y sirve de instrumento para la acción;

los argumentos justifican los procedimientos y proposiciones que relacionan los conceptos entre sí” (p. 7).

Esta investigación está centrada en analizar la ecuación cuadrática bidimensional a través del uso de los objetos primarios del EOS, donde se entenderá por ecuación cuadrática bidimensional, aquella expresión algebraica que representa en dos variables una ecuación de segundo grado en su forma general, y cuya representación geométrica se relaciona genéricamente con el lugar geométrico definido por una circunferencia, parábola, elipse o hipérbola.

Este trabajo se realiza tanto en el análisis de los textos como en las actividades evaluativas rendidas por los FPM. Respecto a los objetos primarios cabe señalar que cada uno es evidenciado siguiendo alguna característica presente en el análisis del objeto matemático tanto en los textos como en las respuestas de los FPM; de esta forma en cuanto al lenguaje Contreras et.al (2010) nombran los siguientes tipos: “Lenguaje natural, Lenguaje analítico, correspondiente al uso del lenguaje simbólico propio de la Matemática, Lenguaje gráfico, entendido en sentido amplio, es decir, cualquier representación gráfica que se utilice, bien sea de una función, un dibujo representativo...Lenguaje numérico” (p. 70). Al igual que con lenguaje, Contreras et.al (2010) mencionan el objeto primario situación problema, dando una breve descripción de cómo son evidenciados cada uno en el análisis, y de qué forma están presentes en un estudio, respecto a los problemas señalan que son: “situaciones, que incluyen problemas más o menos abiertos, aplicaciones extramatemáticas o intramatemáticas, ejercicios, etc. Son las tareas que inducen la actividad matemática” (p. 70). Para esta investigación los problemas están relacionados al objeto matemático en estudio, es decir, la ecuación cuadrática bidimensional, asimismo se deben vincular los conceptos y procedimientos de acuerdo al tema. En cuanto a los objetos primarios los autores señalan lo siguiente, “conceptos, dados mediante definiciones o descripciones (número, punto, recta, media, función) ... Acciones del sujeto ante las tareas matemáticas (operaciones, algoritmos, técnicas de cálculo, procedimientos)” (p. 70).

En el caso del objeto matemático de proposiciones se refiere a aquellas propiedades de los objetos matemáticos utilizadas para justificar las acciones realizadas, y respecto a los Argumentos, corresponden a aquellas acciones que validan lo realizado ante una tarea

matemática, y si estas validan una proposición, entonces se denominarían demostraciones o deducciones (Contreras et.al 2010).

De esta forma, y siguiendo lo señalado por los autores los seis objetos primarios forman parte del análisis a través del EOS en esta investigación realizamos nuestro análisis, haciendo énfasis en cada objeto y utilizando los mismos como herramientas que permiten levantar información y analizar tanto los textos escolares y universitarios como en la detección de errores cometidos por los FPM frente a actividades evaluativas.

2.3 Análisis de textos a través del EOS

Existen varias investigaciones en que se utilizan los objetos primarios del EOS para el análisis de textos escolares y universitarios, Contreras et.al (2010) utilizan este marco teórico con el fin de describir las configuraciones epistémicas respecto a la integral definida y cómo este objeto se desarrolla en una muestra de libros de texto. Contreras, García y Font (2012) analizan los diferentes significados utilizados para la enseñanza de la noción de límite, asimismo lo realizan Alvarado y Batanero (2008) quienes investigan acerca del significado del Teorema Central del Límite en textos universitarios. Por otro lado, Bautista et.al (2017) investiga respecto a la evolución de la optimización durante el tiempo, determinado lo siguiente: “configuraciones institucionales de referencia relacionadas con el estudio histórico-epistemológico en los libros de texto de Bachillerato, con el fin de detectar el significado institucional pretendido y conflictos semióticos potenciales de significado” (p. 7). De esta forma, el estudio realizado se centra en analizar los textos de bachillerato en concordancia con lo señalado en el Enfoque Ontosemiótico. Así también, Parra y Pino-Fan (2017) realizan una investigación cuyo objetivo principal es determinar los significados que están presentes en los libros de texto del Ministerio de Educación respecto al concepto de función, para realizar la contraposición que esto tiene con el significado holístico del concepto. Por otra parte, respecto a un estudio epistemológico, Balcaza, Contreras y Font (2017) investigan acerca de la evolución de la optimización en cuanto a su significado atribuido por diferentes autores en tres libros de texto, todo ello con la finalidad de determinar posibles dificultades que pueden presentar en el aprendizaje los estudiantes que utilizan dichos manuales.

Para esta investigación, es necesario abordar el EOS desde las prácticas matemáticas respecto al objeto en estudio, en este caso la ecuación cuadrática. Por ello los objetos matemáticos

representan la herramienta fundamental para el análisis de textos y para el análisis de errores, ya que se busca evidenciar tipos de errores que cometen los FPM y que de alguna forma están relacionados con lo manifestado en los textos bibliográficos estudiados. Es por ello que de acuerdo a los errores existen variadas investigaciones que contienen este tema; Urbano (2017) realiza una investigación en que evidencia errores identificados en los libros de texto, señalando cuatro tipos de errores, dichos errores son acerca del concepto, indefinición, omisión y símbolo, todo ello respecto al contenido en que estuviese asociado. De acuerdo a ello, en los resultados obtenidos se evidenció que están localizados en las actividades, ejercicios o problemas realizados. En dicha investigación se analizó tanto lo teórico como lo práctico, y de acuerdo a los tipos de errores se obtuvo lo siguiente: “El tipo más frecuente fue Símbolo, seguido de Omisión, Indefinición y por último Concepto” (p. 221).

De forma general se concluye que los errores correspondientes a teoría y a práctica tienen una misma frecuencia de ocurrencia, por lo tanto, la probabilidad de evidenciar un error no tiene dependencia si el contenido al cual corresponde es teórico o de un ejercicio (Urbano, 2017).

2.3.1 Desarrollo de campos de problema a través del análisis de texto

El análisis de textos o libros de estudio es una parte importante dentro de la investigación, no solo por la riqueza que entregan los resultados de acuerdo al análisis, sino porque explicitan de forma clara y visible lo que está presente en cada libro en relación al objeto matemático en estudio. La revisión de textos permite realizar un análisis exhaustivo y detallado de la presentación de la ecuación cuadrática bidimensional y la forma en que se abordan los temas relacionados al mismo, este análisis conlleva a la identificación de campos de problemas entendido como “Entidades fenomenológicas que inducen actividades matemáticas (situaciones-problemas, aplicaciones) de donde surge el objeto” (Cobo 2003, Alvarado y Batanero 2008), estos campos de problemas son extraídos del propio estudio realizado en los textos y que serán determinantes al momento de evaluar el conocimiento y errores que cometen los futuros profesores en la realización de actividades evaluativas relacionadas con la ecuación cuadrática bidimensional. Para esta investigación es necesario contemplar los campos de problemas derivados del análisis, pues es determinante al momento de identificar los errores que cometen los estudiantes para establecer una relación de dependencia entre ambos análisis.

2.4 Relación entre errores y el enfoque ontosemiótico

Dentro de la investigación realizada, y de la teoría descrita, es necesario precisar la relación que existe entre los errores y el enfoque ontosemiótico del conocimiento e instrucción matemática. Para el análisis de estos focos se ha escogido como marco teórico para sustentar la investigación el EOS, ya que las grandes áreas que aborda permiten un análisis exhaustivo y detallado del objeto matemático en estudio.

De acuerdo con lo anterior, existen investigaciones que abordan el estudio del error a partir del EOS, como es el caso del trabajo realizado por Neira (2017) en que se señala el origen del error en relación al marco teórico “los errores, dificultades y conflictos que tiene su origen en la complejidad semiótica o bien en la falta de representatividad de los significados pretendidos e implementados, en el EOS se llaman conflictos semióticos y conflictos epistémicos” (p. 59). Es por ello que de acuerdo al esquema que presenta el enfoque, los errores están presentes en alguno de elementos, y siguiendo la importancia que este genera en el aprendizaje, son también los que derivan en un obstáculo. Neira (2017) en su investigación describe el obstáculo como “Un conocimiento que funciona bien en algunos contextos, pero que al ser aplicado en otros produce errores” (p. 60). Por lo tanto, el autor en su estudio menciona los errores como la principal componente que genera obstáculos y con ello dificultades, todo esto a partir de lo expresado por el estudiante al momento de evidenciar una práctica. Por otro lado, Del Mar, Batanero y Gea (2019) realizan una investigación con el fin de determinar el conocimiento que tienen los futuros profesores acerca de los errores que podrían cometer sus estudiantes, siendo estos principalmente errores procedimentales e interpretativos.

Por lo anterior, el concepto de error puede ser investigado a partir del enfoque ontosemiótico, en las prácticas y actividades matemáticas que se evidencian a través de las entidades relacionadas a los objetos primarios.

CAPÍTULO III
METODOLOGÍA DE LA INVESTIGACIÓN

III. METODOLOGÍA

En este capítulo se presentan los aspectos metodológicos utilizados en esta investigación. Primeramente, se da a conocer el enfoque metodológico utilizado, el tipo de estudio y diseño aplicado, los participantes que forman parte de esta investigación, las técnicas de recopilación de información, la metodología del proceso y finalmente los alcances de estudio.

3.1 Enfoque Metodológico

El problema de investigación presentado en esta tesis, está centrado primeramente en analizar los textos escolares y universitarios declarados en los programas de estudio de la carrera de Pedagogía en Educación Media en Matemática de la UCSC, así también se analizan los errores que comenten los FPM en actividades evaluativas entorno a la ecuación cuadrática bidimensional.

Este trabajo tiene por finalidad profundizar en ambos análisis, por lo tanto, utilizamos el *paradigma cualitativo* de investigación en el cual, Hernández, Fernández y Baptista, (2010) describen que este paradigma: “proporciona profundidad a los datos, dispersión, riqueza interpretativa, contextualización del ambiente o entorno, detalles y experiencias únicas” (p. 17). Así también, la principal finalidad del paradigma cualitativo es según Patton (2002) citado por Hernández et.al (2010) “Describir comunidades, contextos o ambientes; asimismo, las actividades que se desarrollan en éstos, las personas que participan en tales actividades y los significados de las mismas” (p. 412) y según Daymon, (2010) citado por Hernández et.al (2010) “Identificar problemas”. En esta investigación dichas finalidades apuntan directamente a los objetivos que forman parte de este estudio y al enfoque de esta investigación, con la identificación, descripción y caracterización de los textos y de analizar los errores que presentan los participantes de este estudio en las actividades evaluativas desarrolladas.

Es importante mencionar que si bien existen trabajos de investigación relacionados con análisis de textos (Balcaza et.al 2017, Parra y Pino-Fan 2017, Reyes 2017, Burgos et.al 2019), no se ha evidenciado investigaciones que relacionen específicamente este análisis con la ecuación cuadrática bidimensional. Hernández et.al (2010) señalan que “es recomendable seleccionar el enfoque cualitativo cuando el tema del estudio ha sido poco explorado, o no se ha hecho investigación al respecto en algún grupo social específico” (p. 364).

3.2 Tipo de estudio y diseño

El tipo de estudio que corresponde a esta investigación es *descriptivo* ya que se enfoca en “especificar las propiedades, las características y los perfiles de personas, grupos, comunidades, procesos, objetos o cualquier otro fenómeno que se someta a un análisis” (p. 80), esto según señalan Hernández et.al (2010). Además, según Gea (2014), en un estudio descriptivo se sitúa en “observar y describir los fenómenos, sin manipular ninguna variable” (p. 91).

Al centrarnos en este trabajo y según lo señalado por los autores respecto al diseño, el análisis a realizar es en relación a un objeto matemático específico para un proceso epistémico – cognitivo de un grupo de estudio, que en este caso son los textos escolares y universitarios y los FPM. Por lo tanto, este estudio está centrado en dos fases de trabajo: primero, determinar configuraciones epistémicas entorno al desarrollo del objeto utilizando los objetos primarios del enfoque (lenguaje, conceptos, situación problema, procedimientos, proposiciones y argumentos) y la segunda fase consta en determinar los significados personales de los FPM a través de lo descrito en la primera fase.

Asimismo, respecto a lo que debe realizar el investigador en este tipo de estudio, Hernández et.al (2010) menciona que “debe ser capaz de definir, o al menos visualizar, qué se medirá (qué conceptos, variables, componentes, etc.) y sobre qué o quiénes se recolectarán los datos (personas, grupos, comunidades, objetos, animales, hechos, etc.)” (p. 80). En este caso, como el análisis se realiza respecto a los errores, es necesario determinar los tipos de errores que existen, ya sean algebraicos, geométricos, de comprensión, entre otros; además de tener claridad del grupo en estudio, del cual se proporcionan los datos necesarios para la recolección de información.

Respecto al diseño que se utiliza en este estudio es de tipo *Fenomenológico*, pues según señala Mertens (2005) citado por Hernández et.al (2010) “se enfocan en las experiencias individuales subjetivas de los participantes” (p. 515). En este estudio dichas experiencias estarán enfocadas en el conocimiento que tienen los participantes del estudio respecto al objeto matemático y en cómo desarrollan las actividades evaluativas.

Además, de acuerdo con Creswell (1998), Álvarez-Gayou (2003) y Mertens (2005), citados por Hernández et.al (2010) la fenomenología se fundamenta en las siguientes premisas:

- En el estudio, se pretende describir y entender los fenómenos desde el punto de vista de cada participante y desde la perspectiva construida colectivamente.

- El diseño fenomenológico se basa en el análisis de discursos y temas específicos, así como en la búsqueda de sus posibles significados.
- El investigador confía en la intuición, imaginación y en las estructuras universales para lograr aprender la experiencia de los participantes.
- El investigador contextualiza las experiencias en términos de su temporalidad (tiempo en que sucedieron), espacio (lugar en el cual ocurrieron), corporalidad (las personas físicas que la vivieron) y el contexto relacional (los lazos que se generaron durante las experiencias).
- Las entrevistas, grupos de enfoque, recolección de documentos y materiales e historias de vida se dirigen a encontrar temas sobre experiencias cotidianas y excepcionales.
- En la recolección enfocada se obtiene información de las personas que han experimentado el fenómeno que se estudia (p. 515).

Por lo tanto, de acuerdo a las premisas mencionadas por los autores, esta investigación es fenomenológica ya que se busca analizar en profundidad un tema específico, en este caso los errores en actividades evaluativas respecto a la ecuación cuadrática bidimensional, así también analizar la experiencia de un grupo determinado de participantes respecto a las tareas a desarrollar, utilizando instrumentos que permitan recolectar dicha información.

3.3 Participantes del Estudio

Los participantes del estudio corresponden a FPM de la carrera de Pedagogía en Educación Media en Matemática de la Universidad Católica de la Santísima Concepción. Este grupo de participantes son los estudiantes que cursan el segundo semestre del primer año académico de la carrera en la asignatura de Introducción al Análisis en el año 2018. El grupo de participantes del estudio inicia con 27 FPM que cursan la asignatura antes mencionada, cantidad que va disminuyendo a medida que rinden las actividades evaluativas posteriores hasta llegar a una cantidad de 19 estudiantes.

3.4 Técnicas de Recopilación de Información

Como se mencionó anteriormente, esta investigación está centrada en el paradigma cualitativo; para este paradigma Hernández et.al (2010) plantea que las técnicas de recopilación de información tienen como finalidad “obtener datos (que se convertirán en información) de personas, seres vivos, comunidades, contextos o situaciones en profundidad; en las propias “formas de expresión” de cada uno de ellos” (p. 408), así también la recolección de datos tiene como objetivo “analizarlos y comprenderlos, y así responder a las preguntas de investigación y generar conocimiento” (p. 408). Las técnicas de recopilación de información que hemos usado para nuestra investigación son principalmente dos *análisis documental* y *observación*.

Análisis de contenido o documental

Para nuestro estudio consideramos pertinente la técnica de análisis documental, ya que permite estudiar datos en profundidad, en este caso la información de los textos escolares y universitarios y la información extraída de las actividades evaluativas en relación a errores. Dulzaides y Molina (2004) indican que el propósito del análisis documental está en “identificar, describir y representar el continente y el contenido de los documentos” (p.1). Por otra parte, Ávila (2006) menciona que el análisis documental “es una técnica que permite obtener documentos nuevos en los que es posible describir, explicar, analizar, comparar, criticar entre otras actividades intelectuales, un tema o asunto mediante el análisis de fuentes de información.” (p. 50). En esta investigación se considera como fuente de información los nueve textos seleccionados y los siete ítems correspondientes a las actividades evaluativas, de los cuales se extrae la información necesaria y pertinente para realizar nuestro análisis.

Observación

En nuestro estudio, se ha optado por la técnica de observación para la recopilación de datos, ya que como señala Vieytes (2004) “Es un método que permite registrar los datos de manera exhaustiva y sistemática. El observador cuenta con un tipo de plantilla o lista en la que puede señalar la presencia o ausencia de determinado comportamiento, la intensidad y frecuencia con que se produce un evento” (p. 517).

Iniciamos nuestra investigación con el análisis de textos, se realiza una revisión completa y exhaustiva de cada texto seleccionado, indagando en los capítulos de los libros aquellos temas

relacionados con el objeto matemático en estudio. Además, se revisa la estructura que presenta cada texto según, los contenidos y conceptos, los ejemplos y ejercicios y aquellas secciones destinadas al trabajo individual y/o colectivo, entre otros.

Así también, Hernández, et al. (2010) señala que la técnica de observación: “es muy útil para recolectar datos acerca de fenómenos, temas o situaciones delicadas o que son difíciles de discutir o describir” (p. 418). Por ello en el análisis de texto es necesario y fundamental recolectar otros datos importantes como lo son: uso del lenguaje, tipos de simbología, la estructura de los procedimientos, los tipos de argumentación, las representaciones y configuraciones gráficas, entre otros. El tipo de observación utilizada en este apartado es la observación no participativa, pues el trabajo consiste en revisar cuidadosamente en cada texto y actividades evaluativas aquellos elementos antes mencionados.

3.5 Metodología del Proceso

La metodología a utilizar para desarrollar esta investigación consta de dos tipos de estudio a realizar. Primeramente, se trabaja en el análisis de textos y luego en el análisis de errores cometidos por los FPM al responder a actividades evaluativas matemáticas. A continuación, se describe cómo se realizó cada uno de los análisis mencionados.

Análisis de textos

En el análisis de texto, se desarrolló un proceso que consta de varias etapas de trabajo, pues primero se hizo una clasificación de los textos a utilizar declarados en los programas de estudio de Pedagogía en Educación Media en Matemática e Ingeniería, en el que se contabilizó la cantidad de textos necesarios para el estudio, que fue dividido en tres grupos.

Como se señaló anteriormente, el objeto en estudio, es la ecuación cuadrática bidimensional, este objeto como contenido matemático es trabajado desde la enseñanza media, por lo tanto, en primera instancia se consideró como parte de los textos a analizar, algunos textos escolares, específicamente aquellos en que se declara el concepto de ecuación cuadrática. Luego el segundo grupo considerado son los textos que forman parte delo declarado en la bibliografía mínima y complementaria de las asignaturas consideradas para el análisis, y por último se consideran otros textos adicionales, en que se trabaja el objeto matemático de forma detallada y completa.

Para seleccionar y clasificar los textos a utilizar para el análisis, se revisó todos aquellos textos declarados en las bibliografías mínima y complementaria de los programas de estudio ya mencionados. Luego de ello, se clasificó solo aquellos textos que consideraban el objeto matemático dentro de sus apartados de forma explícita, es entonces que a partir de esta clasificación se siguieron las siguientes etapas de trabajo y análisis que describimos a continuación:

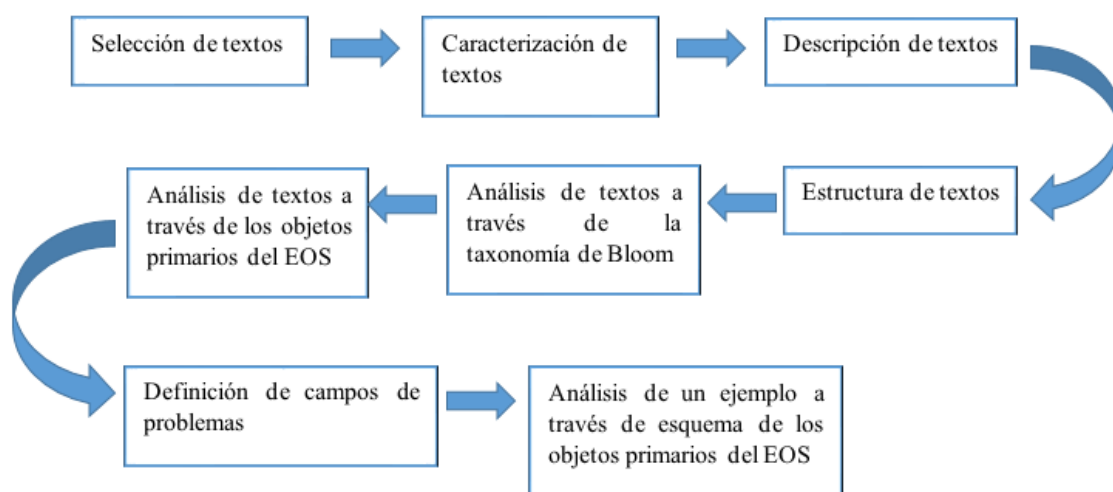


Figura 4: Etapas de trabajo en análisis de textos. Elaboración propia

- *Selección de textos*, los textos se seleccionan desde los programas de estudio de las carreras Pedagogía Media en Matemática e Ingeniería. Se consideran solo aquellos textos en que se aborde el concepto de la ecuación cuadrática bidimensional.
- *Caracterización de los textos seleccionados*, los textos se clasifican según su autor, editorial, año y el código que presenta cada uno de estos y con el cual se identifican a lo largo de esta investigación y análisis.
- *Descripción general de los textos seleccionados*, cada texto se describe según los rasgos generales que se evidencian en su revisión en cuanto a la estructura que cada uno de estos presenta.
- *Estructura de los textos seleccionados*, establece como estructura si el texto corresponde a uno tradicional o no tradicional y si presenta el uso de herramientas Tic's.

- *Análisis de texto según los niveles de conocimiento*, en esta parte del análisis se considera los seis niveles de conocimiento de la taxonomía de Bloom que van graduados según el nivel de dificultad que presenta cada uno de ellos, de la misma forma se va evidenciando en cada texto si estos están o no presentes y cómo fue evidenciando de forma general en los textos.
- *Análisis de textos según los objetos primarios del enfoque ontosemiótico*. En esta sección del análisis se trabaja con los seis objetos primarios del enfoque, detallando cada uno de ellos y trabajando sub categorías que generan un análisis exhaustivo y profundo.
- *Campos de problemas*, en esta última parte del análisis se definen los campos de problemas que surgen del trabajo realizado y de la información que se pudo obtener en el análisis. Los campos de problema permiten realizar una clasificación más asertiva en cuanto al tipo de problema que se puede encontrar en cada texto, además se presenta un cuadro resumen que entrega datos específicos en cuanto a cantidad de problemas por cada campo.
- *Análisis de problemas bajo el esquema de los objetos primarios del EOS*. La última instancia considerada en el análisis, es la revisión de dos ejemplos presentes en los textos analizados, clasificándolos según al campo de problemas al cual pertenezcan y evidenciando qué objetos primarios están presentes en los procedimientos desarrollados.

Con este primer análisis, se busca determinar los campos de problemas predominantes en los textos. Así también, identificar cómo esto influye en los errores que pueden cometer los estudiantes al momento de realizar actividades relacionadas con la ecuación cuadrática.

3.5.2 Análisis de errores

La segunda etapa de trabajo, consiste en analizar errores. Estos errores serán evidenciados en las actividades evaluativas relacionadas con la ecuación cuadrática bidimensional, desarrolladas por estudiantes que cursaron la asignatura de introducción al análisis en el segundo semestre de 2018 del primer año de la carrera de pedagogía media en matemática. Esta etapa se desarrollará a través de las siguientes fases de trabajo:

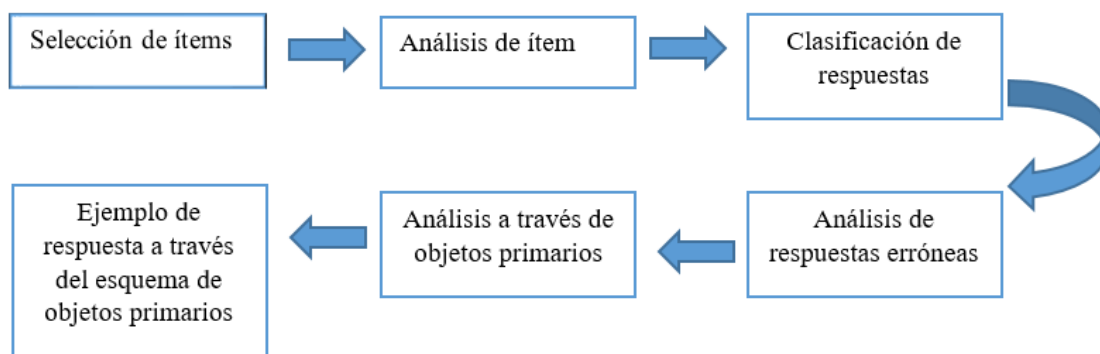


Figura 5: Fases de trabajo en análisis de evaluaciones. Elaboración propia

- *Selección de ítems a analizar:* se describe brevemente cada ítem y se clasifica respecto al tipo de evaluación a la cual pertenecen.
- *Análisis por cada ítem:* se señala una breve descripción de cada ítem, indicando el problema seleccionado y su solución experta.
- *Clasificación de respuestas:* se presenta a través de una tabla resumen de frecuencia y porcentaje, respecto al tipo de respuesta dada por cada estudiante, clasificada como: correcta, incompleta, errónea o en blanco.
- *Análisis de respuestas erróneas:* con el fin de determinar los errores cometidos por los estudiantes en cada ítem; esto a través de la revisión de evaluaciones y la identificación de los tipos de errores para cada ítem.
- *Análisis a través de objetos primarios:* se analizan las respuestas erróneas de la fase anterior haciendo uso de los objetos primarios y se evidencia si estos están o no presentes en dichas respuestas. Para cada uno de los objetos se presenta una tabla resumen respecto a la información evidenciada en las evaluaciones.
- *Ejemplo de respuestas erróneas:* se presenta un ejemplo que corresponde a la respuesta de uno de los estudiantes ante algún ítem analizado y se aplica el esquema del enfoque ontosemiótico para su análisis.

A través de los dos análisis mencionados se espera identificar aquellos errores que comenten comúnmente los estudiantes, realizar una tipología respecto a dichos errores e identificar a qué se debe la presencia de estos, y en qué medida el uso de los textos facilita la presencia de ellos.

CAPÍTULO IV
ANÁLISIS DE RESULTADOS

IV. ANÁLISIS DE RESULTADOS

En el siguiente capítulo se presentan los resultados de esta investigación, dichos resultados están enfocados primeramente en el análisis de texto, en la caracterización y descripción de cada texto que forma parte del estudio y luego en el análisis de errores evidenciados en el desarrollo de actividades evaluativas que rindieron los futuros profesores de matemática (FPM).

4.1 Análisis de Textos

Nuestro primer foco de investigación se relaciona con el análisis de textos, dicho análisis se ha realizado a partir de la información levantada de los contenidos de los programas de las asignaturas introducción al análisis y cálculo 1 respecto de la ecuación cuadrática bidimensional. En dichos programas se presenta una sección correspondiente a la bibliografía de cada asignatura, siendo diferenciada en bibliografía mínima y bibliografía complementaria. De esta forma considerando ambos tipos de bibliografía se realizó una revisión de los textos indicados en tales programas y se consideró solo aquellos que contienen el tópico relacionado con la ecuación cuadrática bidimensional. De acuerdo a lo anterior se ha seleccionado 9 textos con el objeto matemático señalado, estos se han agrupado en tres categorías: textos universitarios utilizados en la carrera de Pedagogía media en matemática, textos universitarios utilizados en las carreras de ingeniería de la UCSC y se incorporado a la investigación un grupo de textos escolares utilizados en el sistema educacional chileno que contiene la ecuación cuadrática bidimensional, con el propósito de indagar cómo estos textos escolares abordan el contenido. El análisis que se presenta a continuación está relacionado en primer lugar con la descripción de los textos seleccionados a través de indicadores que hacen posible su identificación y principales características, así también con una acotada descripción de cada texto. Luego, se presentan diferentes tablas que clasifican los textos respecto a su estructura, y en un análisis más detallado se utilizan los niveles de conocimiento de acuerdo a la taxonomía de Bloom para indagar acerca de lo teórico y práctico declarado en cada texto. Finalmente, el análisis está enfocado en el estudio de los textos a través de los objetos primarios del EOS.

4.1.1 Descripción de los textos seleccionados

En esta sección se presenta la descripción general de los textos seleccionados en nuestro estudio, esta descripción contempla las siguientes características: nombre del texto, su autor, la editorial y el año de edición, así como una resumida descripción de cada texto. La Tabla 1 contiene la lista de los 9 textos seleccionados (T1, ..., T9) y la característica básica de cada uno de ellos.

Tabla 1: *Descripción de los textos de estudio*

Texto	Autores	Editorial	Año
T1	Álgebra y Trigonometría	Zill Dewer	Editorial Mc Graw Hill 2012
T2	Geometría Analítica.	Lehmann, Charles	Limusa/Grupo Noriega Editores. 1993
T3	Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica	Swokowski-Cole	Thompson Editores. 2006
T4	Cálculo y Geometría analítica	Larson R. Hostetler R. Edwards B.	Sexta Edición Volumen 2 1999
T5	Cálculo con geometría analítica	Tomas B. G. Finnney R.	Editorial Addison – Wesley. 1997
T6	Cálculo con Geometría Analítica	Leithold, L.	Editorial Harla. 1992
T7	Cálculo con Geometría Analítica	Swokowski.	Grupo Editorial Iberoamericano. 1989
T8	Texto del estudiante 3ero medio	Saiz, O., y Blumenthal, V.	Ediciones Calycanto 2009
T9	Geometría Analítica	Kindle, J.	Editorial McGraw-Hill 1999

A continuación, hemos realizado una descripción del contenido de la ecuación cuadrática bidimensional en cada uno de los textos seleccionados, señalando aspectos como: nombre del autor y del texto, además de una breve descripción enmarcada en la estructura y presentación del objeto matemático. En la siguiente tabla se presenta la información que describe cada texto.

Tabla 2: *Descripción de los textos*

Título	Descripción
T1 <i>Álgebra y Trigonometría</i>	<p>Texto que incluye secciones relacionadas con ecuación cuadrática, secciones cónicas y traslación y rotación de ejes. Su estructura es tradicional, donde se presenta la definición del concepto, ejemplos resueltos paso a paso y luego las actividades a realizar por el lector.</p> <p>El texto es mayoritariamente analítico, pero también contempla secciones en que se representan gráficamente las secciones cónicas, tanto en ejemplos como en actividades a realizar.</p>
T2 <i>Geometría Analítica.</i>	<p>Texto que contempla inicialmente la sección cónica de circunferencia, luego el concepto de ecuación cuadrática general, transformaciones de coordenadas, rotación de ejes y posteriormente las secciones cónicas siguientes.</p> <p>La estructura del texto es tradicional, se inicia con la definición del concepto, su ecuación y la demostración asociada. Posteriormente se presenta su representación gráfica, un ejemplo y la sección de ejercicios a realizar por el lector.</p>
T3 <i>Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica</i>	<p>El texto comienza con una sección relacionada a cónicas (circunferencia, elipse, parábola e hipérbola). La estructura para presentar la información es tradicional, consiste en la definición del concepto, descripción de elementos de forma algebraica como gráfica. Luego se continúa con ejemplos y una sección de ejercicios a desarrollar. Además, este texto incluye secciones en que se enseña cómo utilizar la calculadora para realizar cálculos respecto a las diferentes cónicas presentadas.</p>
T4 <i>Cálculo y Geometría analítica</i>	<p>El texto inicia con la sección de cónicas y luego con un apartado llamado “Rotaciones y la Ec. Cuadrática general de 2do grado” en su estructura se contempla una descripción histórica del concepto, luego la definición, las ecuaciones tanto vertical como horizontal, la demostración y su representación gráfica. Posteriormente se presenta la sección de ejercicios y resolución de problemas</p>
T5 <i>Cálculo con geometría analítica</i>	<p>El texto contempla una sección de geometría plana en que se trabajan las cónicas, luego se presenta la sección de rotación de ejes.</p> <p>La estructura de presentación de contenidos es tradicional, se describen los conceptos, su ecuación, representación gráfica, ejemplos y ejercicios.</p>

T6	<i>Cálculo con Geometría Analítica</i>	El texto inicia con secciones cónicas, luego con traslación de ejes. La estructura consta de la definición de conceptos, deducción de la ecuación, representación de sus elementos y gráficos, además de ejemplos y ejercicios.
T7	<i>Cálculo con Geometría Analítica</i>	El texto contempla una sección de temas selectos de geometría analítica cuyo nombre es secciones cónicas. Se define las cónicas: parábola, elipse e hipérbola, en que se da una definición, representación gráfica, elementos, teoremas, ejemplos (5), ejercicios (cálculo de ecuaciones, de elementos, problemas y demostraciones)
T8	<i>Texto del estudiante 3ero medio</i>	Este texto presenta el concepto de ecuación cuadrática, los tipos de ecuación y las formas de resolución. De la misma manera se señala el concepto de Función cuadrática y el análisis de su gráfica además de problemas relacionados con la vida diaria. Su estructura consta de la deducción de conceptos y su posterior definición, la ecuación correspondiente, ejemplos y ejercicios tanto analíticos como geométricos. Además, considera actividades como talleres de profundización, presentando actividades a realizar por el estudiante, de cálculo, aplicación y construcción de una parábola con materiales manuales. Así también se señalan links de interés asociados a la aplicación de software geométricos para realizar actividades propuestas, y una sección de evaluación respectiva al tema estudiado.
T9	<i>Geometría Analítica</i>	El texto contempla secciones relacionadas a cónicas y transformación de coordenadas. La estructura contempla la definición de conceptos, ecuaciones, ejemplos y ejercicios, todo ello algebraicamente. En el capítulo 8 la sección es llamada Transformación de coordenadas, esta sección está enfocada en la transformación de ejes coordenados, con la traslación y rotación de ejes. Este texto es mayoritariamente algebraico, pero también contiene actividades relacionadas a secciones geométricas de las cónicas.

4.1.3 Clasificación de textos

Los textos seleccionados son clasificados principalmente de acuerdo a la importancia definida en los programas de asignaturas, esta clasificación se define como perteneciente a la bibliografía mínima, complementaria u otros. En esta clasificación se indica si el texto es utilizado en las asignaturas como bibliografía mínima, complementaria en las carreras de Pedagogía en

Educación Media en Matemática (PMM), Ingeniería (ING), u otros

PMM: Pedagogía en Educación Media en Matemática

ING: Ingeniería

Otros: Textos adicionales

Mínima: Bibliografía Mínima

Complem.: Bibliografía complementaria

Respecto a lo mencionado la clasificación es la siguiente:

Tabla 3: *Clasificación de textos*

	<i>Texto</i>	<i>PMM</i>	<i>ING</i>	<i>Otros</i>	<i>Mínima</i>	<i>Complem.</i>
<i>T1</i>	Zill Dewer (2012). <i>Algebra y Trigonometría</i>	X			X	
<i>T2</i>	Lehmann, Charles (1993). <i>Geometría Analítica.</i>	X			X	
<i>T3</i>	Swokowski-Cole (2006). <i>Algebra y Trigonometría con Geometría Analítica</i>	X				X
<i>T4</i>	Larson R. Hostetler R. Edwards B. (1999) <i>Cálculo y Geometría analítica</i>	X			X	
<i>T5</i>	Tomas B. G. Finney R. (1997) <i>Calculo con geometría analítica</i>	X			X	
<i>T6</i>	Leithold, L. (1992). <i>Cálculo con Geometría Analítica</i>		X			X
<i>T7</i>	Swokowski. (1989). <i>Cálculo con Geometría Analítica</i>		X			X
<i>T8</i>	Saiz, O. y Blumenthal, V. (2009) <i>Texto del estudiante 3ero medio. Ediciones cal y canto.</i>			X		
<i>T9</i>	Kindle, J. (1999) <i>Geometría Analítica</i>			X		

Respecto a la tabla de clasificación, se observa que la mayor concentración de los textos de estudio está en aquellos utilizados en la carrera de Pedagogía Media en Educación Matemática, siendo mayormente textos de bibliografía mínima. En cuanto a la bibliografía de los textos usados en las carreras de Ingeniería, se considera para el análisis dos textos, en los cuales se desarrolla el contenido de la ecuación cuadrática bidimensional. Hay otros dos textos

considerados en el análisis que corresponden a: Texto del estudiante de 3° año medio (T8) utilizado por el Ministerio de Educación para la asignatura de matemática y el texto de Geometría Analítica (T9); que desarrolla ampliamente el concepto de Ecuación Cuadrática bidimensional.

4.1.5 Estructura de los textos

Respecto a la estructura de los textos utilizados para este análisis podemos identificarlos como tradicional y no tradicional. Se considera estructura tradicional aquella en que el texto presenta sus contenidos de la siguiente forma: definición, proposición, teoremas, demostración, ejemplos, aplicaciones y ejercicios. En caso de que el texto presente dicha estructura cumpliendo con la mayoría de los puntos o en su totalidad, será considerado como tradicional.

En caso contrario que el texto no tenga la estructura descrita anteriormente será considerado no tradicional, por ejemplo: presenta secciones focalizadas en problemas asociados al objeto matemático, comienza sus unidades o contenidos utilizando un problema de análisis para conllevar el contenido en estudio, entre otros. Un aspecto interesante en el análisis de la estructura de los textos es determinar el uso de las tecnologías de la información y de la comunicación, Tic's.

Para diferenciar la clasificación de textos en este análisis se han designado los símbolos:

P: Pedagogía I: Ingeniería M: Enseñanza media O: Otros textos.

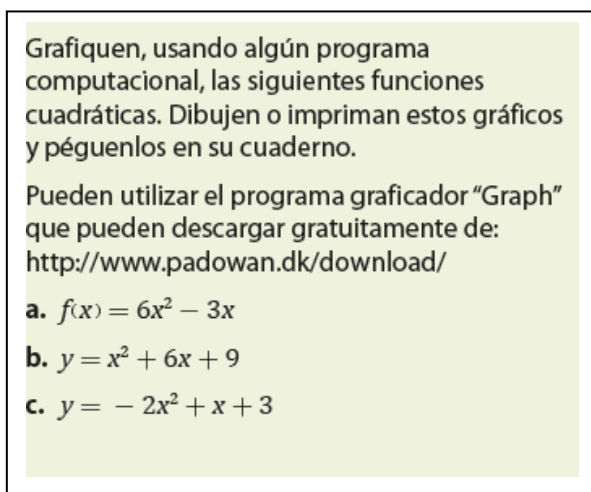
Por lo tanto, la codificación de los textos se interpreta como: T1P indica que el texto seleccionado es el T1 para la carrera de pedagogía, de la misma forma para los textos siguientes.

De acuerdo a esto la estructura obtenida es:

Tabla 4: *Estructura de textos*

	Estructura Tradicional	Estructura no tradicional	Uso de las Tics
T1P	X		
T2P	X		
T3P	X		
T4P	X		
T5P	X		
T6I	X		
T7I	X		
T8M		X	X
T9O	X		

En cuanto a la tabla de clasificación presentada, se observa que la mayoría de los textos se concentra en una estructura tradicional respecto a la forma en que se presentan los contenidos. Por lo tanto, existe homogeneidad entre los textos seleccionados para el análisis, pues comparten la forma, estructura y secciones en los libros de texto. En tanto, T8M es el único libro que presenta una estructura diferente, pues se basa en iniciar el contenido matemático con problemas contextualizados y actividades que conlleven al contenido en sí, y en algunos de los casos incorporando el uso de herramientas tecnológicas o uso de las Tic's. Esto se ve visualizado en actividades que están enfocadas en graficar como la que se presenta a continuación en que se sugiere utilizar un programa para facilitar su realización.



Grafiquen, usando algún programa computacional, las siguientes funciones cuadráticas. Dibujen o impriman estos gráficos y péguenlos en su cuaderno.

Pueden utilizar el programa graficador "Graph" que pueden descargar gratuitamente de: <http://www.padowan.dk/download/>

a. $f(x) = 6x^2 - 3x$

b. $y = x^2 + 6x + 9$

c. $y = -2x^2 + x + 3$

Figura 6: Uso de tics en T8M. (p. 104)

4.1.6 Análisis de textos según Taxonomía de Bloom

En la siguiente sección se hace un análisis de texto teniendo como referencia los niveles de conocimiento definidos en la taxonomía de Bloom. Estableciendo una clasificación de los textos seleccionados, determinando en qué nivel de profundidad del conocimiento están desarrolladas los ejercicios y problemas abordados en el texto. Las dimensiones de conocimiento según Bloom se han graduado desde el nivel inferior (conocer) hasta el superior (evaluar). Para medir las actividades y su presencia en cada categoría se realizó un análisis tanto de los ejemplos que presenta en las secciones correspondientes al tema, como en la sección de ejercicios y problemas propuestos para que desarrolle el estudiante. Respecto a esto, las categorías de la taxonomía son: *Conocimiento*: que contempla acciones relacionadas a los verbos nombrar, definir, mencionar, escribir, identificar, mostrar, recopilar, entre otros.

Compresión: contempla verbos como resumir, describir, explicar, dar ejemplos, asociar, distinguir.

Aplicación: asocia actividades como aplicar, demostrar, calcular, contemplar, construir.

Análisis: se relaciona con analizar, ordenar, clasificar, explicar, inferir.

Síntesis: contempla acciones como planear, diseñar, inventar, formular, generar.

Evaluación: es el último nivel de conocimiento en que deben estar presentes actividades relacionadas a valorar, decidir, evaluar, recomendar, concluir.

La Tabla 5 contiene la clasificación de los textos según las dimensiones del conocimiento de la taxonomía.

Tabla 5: Dimensiones del conocimiento según taxonomía de Bloom

	Nivel 1 Conocimiento	Nivel 2 Comprensión	Nivel 3 Aplicación	Nivel 4 Análisis	Nivel 5 Síntesis	Nivel 6 Evaluación
T1P	X	X	X	X		
T2P	X	X	X			
T3P	X	X	X	X		
T4P	X	X	X	X		
T5P	X	X	X	X		
T6I	X	X	X	X		
T7I	X	X	X	X		
T8M	X	X	X	X		
T9O	X	X	X			

Respecto a las dimensiones de conocimiento presentados en los diferentes textos analizados, en su mayoría los textos alcanzan los cuatro primeros niveles de la taxonomía, siendo los niveles de conocimiento, comprensión y aplicación alcanzados en un 100% de los textos estudiados. En cambio, el nivel de análisis está presente en un 78% de la totalidad de los textos, respecto a los dos más altos niveles de síntesis y evaluación, no fueron evidenciados en la revisión de actividades de los textos. Las actividades, problemas y ejemplos de los textos seleccionados presentan el mismo tipo de estructura, ya que están relacionados al cálculo de ecuaciones, resolución de problemas, y demostración en algunos casos. A continuación, se presentan algunos ejemplos o problemas definidos en los distintos niveles de la taxonomía.

Nivel 1: Conocimiento

En T1P se evidencian actividades, cuyo objetivo está relacionado con el nivel taxonómico del conocimiento:

Identifique la sección cónica definida por la ecuación dada.

a) $9x^2 + 12xy + 4y^2 + 2x - 3y = 0$
b) $3x^2 - 5y^2 + 8x - y + 2 = 0$

Solución a) Con $A = 9, B = 12, C = 4$, el discriminante

$$B^2 - 4AC = (12)^2 - 4(9)(4) = 144 - 144 = 0$$

indica que la ecuación define una parábola.

b) Con $A = 3, B = 0, C = -5$, el discriminante es

$$B^2 - 4AC = (0)^2 - 4(3)(-5) = 60 > 0$$

La ecuación define una hipérbola.

Figura 7: Actividad nivel de Conocimiento en T1P. (p. 508)

Esta actividad está enfocada en identificar la sección cónica dada su ecuación general, para ello es imprescindible el manejo de operatoria algebraica básica, así como conocimientos elementales de los productos notables, además de conocer el concepto de discriminante de una cónica.

Nivel 2: Comprensión

Respecto al segundo nivel de la taxonomía de Bloom, en T2P se visualizan ejercicios propuestos en el nivel taxonómico de la comprensión. Presentamos un ejemplo cuyo objetivo es deducir la ecuación de la elipse a partir de una expresión dada:

1. Deducir la ecuación ordinaria $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$ a partir de la definición de la elipse.

Figura 8: Actividad nivel de Comprensión en T2P. (p. 179)

Esta actividad está enfocada en comprender la relación que existe entre la ecuación estándar de la cónica y sus elementos característicos, considerando la definición, la noción de lugar geométrico como fundamental para la resolución del problema.

Nivel 3: Aplicación

En T4P, se considera actividades a resolver enfocadas en el nivel taxonómico de aplicación, como se presenta en el siguiente ejemplo:

Diseño de puentes. Cada uno de los cables de sujeción de un puente colgante se halla suspendido (con forma de parábola) entre dos torres separadas 120 metros entre sí y tienen una altura de 20 metros sobre una autopista. Los cables tocan la autopista en el punto medio entre las torres.

a) Hallar una ecuación de la figura parabólica de cada cable.

b) Hallar la longitud de cada cable de sujeción.

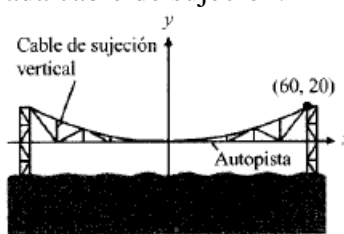


Figura 9: Actividad nivel de Aplicación en T4P. (p. 912)

Nivel 4: Análisis

El T5P se presenta un ejemplo en el nivel de Análisis de la taxonomía de Bloom. Este ejemplo está enfocado en demostrar o probar proposiciones utilizando contraejemplos.

Pruebe o encuentre contraejemplos para las siguientes proposiciones sobre la gráfica de $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$.

a. Si $AC > 0$, la gráfica es una elipse.

b. Si $AC > 0$, la gráfica es una hipérbola.

c. Si $AC > 0$, la gráfica es una hipérbola.

Figura 10: Actividad nivel de Análisis en T5P (p. 708)

Para abordar la resolución del problema planteado se debe conocer la estructura global de la ecuación general de la ecuación cuadrática bidimensional y establecer la importancia de sus parámetros en la caracterización de la cónica.

Nivel 5: Síntesis

En cuanto al nivel de síntesis, no se ha evidenciado actividades en los textos analizados que estén enfocadas en ello, por lo tanto, ninguno de los textos evidencia alcanzar con dicho nivel taxonómico.

Nivel 6: Evaluación

El último nivel, Evaluación no fue evidenciado en las actividades de los textos analizados, por lo tanto, no hay actividades que estén enfocadas en el nivel taxonómico de evaluación.

4.1.7 Análisis de textos a partir de los Objetos Primarios respecto al EOS

A continuación, se presenta el análisis de textos realizado bajo el EOS. Este análisis está enfocado en la utilización de los objetos primarios del EOS señalados por Godino et.al (2009) para el análisis de los textos seleccionados.

Como ya fue definido en el marco teórico recordamos que los objetos primarios del EOS son: Elementos lingüísticos, situaciones problema, concepto – definición, proposiciones, procedimientos, argumentos.

En la Tabla 6 se muestra que todos los textos seleccionados pueden ser analizados bajo el EOS.

Tabla 6: *Presencia de Objetos primarios del Enfoque Ontosemiótico en los textos*

	Elementos lingüísticos	Situaciones Problema	Definiciones	Procedimientos	Proposiciones	Argumentos
T1P	X	X	X	X	X	X
T2P	X	X	X	X	X	X
T3P	X	X	X	X	X	X
T4P	X	X	X	X	X	X
T5P	X	X	X	X	X	X
T6I	X	X	X	X	X	X
T7I	X	X	X	X	X	X
T8M	X	X	X	X		
T9O	X	X	X	X	X	X

Se puede observar de la tabla anterior que de los textos analizados como: las actividades propuestas en ellos pueden ser analizados bajo el marco de referencia del EOS, principalmente la utilización de los objetos primarios como herramientas para levantar información respecto a nuestra investigación.

Elementos lingüísticos

Corresponde al primer objeto primario, está presente en cada uno de los textos en análisis, ya que cada texto cuenta con actividades relacionadas con términos, expresiones, notaciones, gráficos de cada una de las secciones cónicas y de la ecuación cuadrática. El lenguaje matemático se divide en dos secciones, una contempla notaciones matemáticas utilizadas en los textos para denotar los contenidos del tema, y la segunda en la representación gráfica que cada texto contiene.

El primer tipo de lenguaje es la notación simbólica que se utiliza en los textos para representar la ecuación cuadrática bidimensional y las secciones cónicas.

Tabla 7: Notación simbólica y expresiones algebraicas

Notación	Concepto	T1	T2	T3	T4	T5	T6	T7	T8	T9
		P	P	P	P	P	I	I	M	O
$ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$	Ec. cuadrática forma estándar	X							X	
$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$	Ec. Cuadrática general	X	X		X	X	X			X
$x^2 = 4py$	Ec. De la Parábola	X	X	X	X	X	X	X		X
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	Ec. De la Elipse	X	X	X		X	X	X		X
$e = \frac{c}{a}$ $c = \sqrt{a^2 - b^2}, 0 < e < 1$	Excentricidad de una elipse	X	X	X	X	X	X	X		X
$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	Ec. De la hipérbola	X	X	X		X	X	X		X
$e = \frac{c}{a}$ $c = \sqrt{a^2 + b^2}, 0 < e < 1$	Excentricidad de la Hipérbola	X	X		X	X	X			X
$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$	Ec. De la circunferencia Con centro en (h, k) y radio: r		X		X		X			X

$x^2 + y^2 = r^2$	Ec. De la circunferencia con centro en el origen	X		X	X		X
$x' = x - h$ $y' = y - k$	Ec. Traslación de ejes, con punto (x, y)				X		X
$x = x' \cos \theta - y' \sin \theta$ $y = x' \sin \theta - y' \cos \theta$	Ec. Rotación de ejes.	X	X		X	X	X

Respecto a la ecuación de la parábola, en T1P se tiene una notación con una letra distinta a la expresada en la tabla ($x^2 = 4cy$), a pesar de ello representan la misma información en la ecuación respectiva a la cónica. Asimismo sucede con T9O, la expresión que representa la ecuación de la parábola cambia en solo una letra, pero representa lo mismo que la expresión denotada en la tabla $x^2 = 4ay$.

En T4P, respecto a la ecuación de la elipse, no se utiliza la expresión indicada en la tabla, sino que se utiliza la ecuación canónica de dicha cónica diferenciándola respecto al eje horizontal y vertical.

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \text{ El eje mayor es horizontal}$$

$$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1 \text{ El eje mayor es vertical}$$

Figura 11: Ecuación canónica de la elipse en T4P (p. 904).

Respecto a la ecuación de la hipérbola, sucede lo mismo para el texto T4P. Se presentan las ecuaciones para cada eje y cambian la notación en las expresiones que utilizan.

La forma canónica de la ecuación de una hipérbola con centro (h, k) es:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \text{ El eje transversal es horizontal}$$

$$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1 \text{ El eje transversal es vertical}$$

Figura 12: Expresión algebraica para representar la ecuación de la elipse en T4 (p. 904).

En la tabla 7 se observa que no todos los textos presentan las notaciones consideradas en el análisis, sólo un texto presenta en su mayoría las notaciones, para este caso es T9O. Por otra parte, los textos T1P y T8M consideran literalmente el objeto matemático, la ecuación cuadrática en su forma estándar, y por el contrario en su forma general consideran el concepto los textos T1P, T2P, T4P, T5P, T6I y T9O. Observamos que el texto T1P trabaja ambos tipos de ecuaciones.

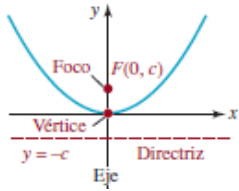
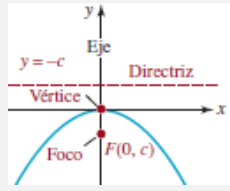
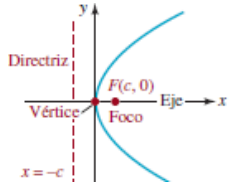
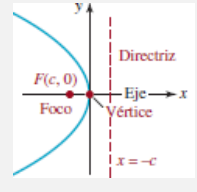
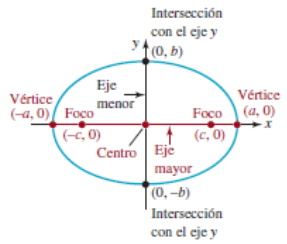
En cuanto a las secciones cónicas y su notación, están consideradas las ecuaciones de: parábola, elipse, hipérbola y circunferencia; sólo en T9O están contempladas la totalidad de dichas cónicas, pero en los textos anteriores sólo se trabajan algunas, omitiendo en su mayoría la ecuación de la circunferencia. Lo mismo sucede con la ecuación correspondiente a traslación de ejes, ya que solo en T6I y T9O se mencionan y desarrollan.

De los 9 textos analizados, el texto T8M es el que presenta menor presencia de las notaciones consideradas, ya que solo contempla la ecuación cuadrática en su forma estándar ya que, por ser un texto de estudio de enseñanza media, solo se trabajan aquellos contenidos declarados en los planes y programas correspondientes al nivel, por ello se omite todo lo relacionado a secciones cónicas.

Representación Gráfica

La mayoría de los textos considera la representación gráfica de cada una de las secciones cónicas que forman parte de este análisis, el texto T8M desarrolla solo la sección de parábola, pues desarrolla la noción de función cuadrática ($f(x) = ax^2 + bx + c$). Respecto a las representaciones para cada sección, estas varían dependiendo del texto analizado y en algunos casos como T1P se realiza más de una gráfica por sección cónica. A continuación, se presenta una tabla con las representaciones gráficas de las secciones cónicas definidas en cada texto, y posteriormente la visualización de cada gráfica.

Tabla 8: Representación gráfica de secciones cónicas

Representación Gráfica	T1	T2	T3	T4	T5	T6	T7	T8	T9
<p>Parábola</p> $x^2 = 4py, p > 0$ 	X	X	X	X	X	X	X	X	
<p>Parábola</p> $x^2 = 4py, p < 0$ 	X	X	X	X	X	X	X	X	
<p>Parábola</p> $y^2 = 4px, p > 0$ 	X	X	X		X	X	X		X
<p>Parábola</p> $y^2 = 4px, p < 0$ 	X	X	X		X	X	X		
<p>Elipse</p> $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, a > b$ 	X	X	X	X	X	X	X		X

<p style="text-align: center;">Elipse</p> $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1, a > b$	<p>X X X X</p>
<p style="text-align: center;">Hipérbola</p> $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	<p>X X X X X X X X</p>
<p style="text-align: center;">Hipérbola</p> $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$	<p>X X X X X X X</p>
<p style="text-align: center;">Circunferencia</p> $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$	<p>X X X X</p>

Respecto a la representación gráfica de la parábola, en T8M se representa como la gráfica de la función cuadrática. En T2P, para la Elipse, se mencionan los dos tipos de ecuaciones respectivas a cada eje, pero la representación gráfica presentada es solo para la ecuación $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, a > b$.

Del análisis realizado, el texto T8M presenta la mayor escasez en la presencia de secciones cónicas, y es porque el enfoque se limita solo a lo declarado en el curriculum para el concepto de ecuación cuadrática.

En el caso de la circunferencia, son pocos los textos que consideran este contenido como parte de las secciones cónicas, ya que en la mayoría de los casos solo se concentra en trabajar y desarrollar la parábola, elipse e hipérbola.

Situaciones Problema

Las situaciones problema es otro componente de los objetos primarios del EOS y éstas se refieren a las diferentes aplicaciones, actividades, tareas y ejercicios que se solicitan realizar. Godino et. al (2009) señalan que los objetos matemáticos emergen de las prácticas, personales e institucionales, cuando se resuelve un problema, por ello dan gran importancia a este objeto primario. Para establecer las situaciones problema se hace una revisión detallada en cada texto seleccionando los tipos de ejercicios y problemas propuestos relacionados con la ecuación cuadrática bidimensional. Luego se agrupan los problemas de acuerdo a las situaciones fenomenológicas que originan las actividades matemáticas caracterizando estos según los tipos o campos de problemas; por ello se ha evidenciado cuatro grandes áreas:

Problemas numéricos y algebraicos: son aquellos problemas asociados a la aplicación de la ecuación cuadrática, en el cálculo de ecuaciones, resolución de problemas, determinación de elementos, etc.

Problemas geométricos: está asociado a la construcción de secciones cónicas, identificación de sus elementos, determinar coordenadas, entre otros. Es toda aquella actividad asociada al aspecto geométrico del objeto matemático en estudio.

Problemas de aplicaciones: Considera los tipos de problemas relacionados al contexto geométrico, ya sea en el cálculo de área, perímetro y volumen de cónicas en revolución, identificación de rectas tangentes o secantes a secciones cónicas, y también se considera aquellos problemas asociados al cálculo de medidas.

Problemas de Razonamiento: este es evidenciado cuando se presentan actividades que están enfocadas en la demostración matemática, ya sea a través de probar proposiciones, demostrar teoremas, argumentar o conjeturar.

A continuación, se presenta la Tabla 9 correspondiente a la sección tipos y áreas de problemas:

Tabla 9: *Tipos y áreas de problemas*

Tipos de Problemas		T1P	T2P	T3P	T4P	T5P	T6I	T7I	T8M	T9O
1	Deducir la ecuación dado elementos de la sección cónica	X	X	X	X	X	X	X		X
2	Determinar los elementos de una sección cónica	X	X	X	X	X	X	X		X
3	Determinar las intersecciones de los ejes	X								
4	Aplicaciones y resolución de problemas	X		X	X	X	X	X		X
5	Determinar la excentricidad de una sección cónica	X				X				
6	Determinar la ecuación circunscrita o inscrita		X				X			X
7	Reducir ecuaciones		X							
8	Calcular los valores máximo y mínimo de una función		X							
9	Determinar la ecuación de la recta tangente a una sección cónica						X	X		X
10	Resolver ecuaciones cuadráticas	X							X	
11	Resolver problemas que involucren ecuaciones cuadráticas	X		X					X	
12	Despejar variables en fórmulas o ecuaciones	X		X						
13	Escribir ecuaciones dadas dos secciones cónicas		X							
14	Factorizar expresiones algebraicas								X	
15	Identificar la sección cónica dada una ecuación	X								

PROBLEMAS NUMÉRICOS Y ALGEBRAICOS

PROBLEMAS GEOMÉTRICOS	16	Calcular el discriminante					X		
	17	Determinar la ecuación cuadrática dado un ángulo					X		
	18	Resolver una ecuación dada la traslación de ejes						X	
	19	Esbozar la gráfica de una sección cónica	X		X	X	X	X	X
	20	Ubicar los elementos de una sección cónica al construir su gráfica	X		X				
	21	Determinar procedimientos para obtener puntos haciendo uso de regla y compás		X					
	22	Esbozar regiones del plano dada una inecuación cuadrática					X		
	23	Dibujar a escala la aplicación respecto a una sección cónica					X		
	24	Describir la gráfica de una sección cónica						X	
	25	Identificar y trazar la gráfica dada una ecuación	X						X
26	Graficar la traslación de un eje dada su ecuación						X		
PROBLEMAS DE APLICACIÓN	27	Determinar la longitud de cuerda en una circunferencia		X					X
	28	Traslación de ejes					X	X	
	29	Determinar el ángulo que se forma por dos rectas tangentes		X					
	30	Determinar coordenadas de los elementos de las cónicas		X	X				
	31	Resolver problemas que involucran el perímetro, área o volumen		X		X		X	X
	32	Determinar el lugar geométrico dada la ecuación		X					
	33	Determinar las coordenadas	X						

	de un punto dado el ángulo								
PROBLEMAS DE RAZONAMIENTO	34	Determinar el ángulo de rotación					X		
	35	Determinar condiciones respecto a una cónica degenerada					X		
	36	Obtener las coordenadas de los elementos de una sección cónica						X	
	37	demostrar proposiciones	X	X		X	X	X	X
	38	Argumentar respecto a una situación problema	X						
	39	Discutir acerca de la ecuación cuadrática general dada una condición		X					
	40	demostrar teoremas		X					
	41	Conjeturar acerca de una expresión				X			
	42	Mostrar una proposición dada por medio de argumentos matemáticos	X						
	43	Probar una proposición usando contraejemplos						X	

De la tabla anterior, se ha levantado información sobre 43 tipos de problemas distintos considerados en los 9 textos en estudio, dichos problemas están presentes en actividades relacionadas al objeto matemático en todas sus dimensiones ya sea a través de la ecuación cuadrática, secciones cónicas y aquellas en que el apartado se refiere a rotación y traslación de ejes. Algunos de los tipos de problemas propuestos están presentes en los 9 textos en estudio, pero por otra parte hay casos en que los problemas solo se presentan en un texto, de esta forma es visible la versatilidad que presenta cada texto particularmente, en sus contenidos, ejemplificación, resolución de problemas y actividades matemáticas.

La siguiente Tabla 10 presenta el porcentaje en que está presente cada tipo de problema en las áreas definidas, para cada uno de los textos en análisis. Los porcentajes presentados se han

extraído de la tabla de tipos de problema, y contabilizados de acuerdo al área a la que pertenece cada uno; por lo tanto, se ha obtenido la siguiente información:

Tabla 10: *Resumen de área de problemas*

Áreas de Problemas	T1P	T2P	T3P	T4P	T5P	T6I	T7I	T8M	T9O
Problemas algebraicos y numéricos	56%	40%	71,4%	42,8%	42,9%	50%	50%	100%	55,6%
Problemas geométricos	18,75%	6,6%	14,3%	14,3%	14,3%	25%	12,5%	0%	11,1%
Problemas de aplicación	6,25%	33,3%	14,3%	14,3%	14,3%	16,6%	25%	0%	22,2%
Problemas de Razonamiento	18,75%	20%	0%	28,6%	28,5%	8,4%	12,5%	0%	11,1%

Las áreas de problemas evidenciadas en la tabla anterior contemplan la cantidad en porcentaje de su presencia en los 9 textos. La mayoría de los textos contienen las cuatro áreas de problemas, solo en T8M hay déficit en ello pues es el texto que solo se centra en actividades relacionadas con problemas algebraicos y numéricos; en cambio los demás textos contienen la mayoría de las áreas de problemas, enriqueciendo así la diversidad de tareas y actividades para desarrollar. Respecto a la información presentada, podemos indicar que en todos los textos predomina el área de problemas algebraicos y numéricos y con ello la resolución de problemas y el cálculo de ecuaciones, elementos, entre otros.

Conceptos y Definiciones

El tercer objeto primario corresponde a definiciones relacionadas a la ecuación cuadrática bidimensional y a secciones cónicas. Godino (2002) citado por Gea (2014) menciona en su investigación la importancia que tiene el uso de la definición y las características que atribuye al objeto matemático, además señala que el significado de cada definición puede variar, todo dependiendo de la institución en la que se trabaje. También el autor señala respecto a las definiciones lo siguiente:

“son evocadas por el estudiante cuando se enfrenta a la resolución de una situación problema, es importante analizar el tratamiento que se realiza de éstas en la enseñanza, ya que, la progresiva construcción de su significado depende directamente de los conceptos que se describan y utilicen” (p. 118).

Por otra parte, en esta investigación se considera la presencia de los conceptos y definiciones en los textos seleccionados, dejando entrever de qué forma la definición está claramente explícita

y es única en cada texto con el fin de beneficiar a la comprensión del lector, ya que como señala Del Pino-Ruiz, J. y Estepa, A. (2017) “en muchas ocasiones se dan varias definiciones y/o formulaciones de un mismo término, sin especificar que son equivalentes, lo que puede provocar confusión en los estudiantes” (p. 6).

Para el análisis se identifican aquellos conceptos previos o enunciados previos a la definición formal del objeto matemático, luego se analizan definiciones explícitas respecto a la categorización de los conceptos asociados a la ecuación cuadrática bidimensional, ver Tabla 11. En tercer lugar, se presenta la selección de textos que describen el concepto matemático relacionándolo con la ecuación estándar asociada a cada sección cónica, describiendo detalladamente cómo se obtiene esta, ver Tabla 12. Por último, se consideran aquellas descripciones que se realizan de acuerdo a las gráficas asociadas a los conceptos, señalando sus elementos o características ver Tabla 13.

Dentro de las definiciones de los conceptos asociados a la ecuación cuadrática se logra evidenciar que algunos textos incluyen una introducción al contenido, en este caso la Tabla 11 muestra los principales conceptos que contienen presentaciones previas a la definición formal.

Tabla 11: *Enunciado previo a la definición del concepto*

Concepto	T1P	T2P	T3P	T4P	T5P	T6I	T7I	T8M	T9O
Ecuación cuadrática	X	X		X				X	
Circunferencia		X				X			
Parábola	X	X			X	X	X		
Elipse	X			X	X	X	X		
Hipérbola	X	X			X	X	X		
Rotación de ejes	X								
Traslación de ejes						X			

Si bien la mayoría de los textos contemplan en general los conceptos principales considerados y denotados en la tabla, no todos ellos consideran parte de sus escritos una introducción de los conceptos, describiendo enunciados que propicien en el lector una mejor comprensión del tema. De los 9 textos considerados solo 7 contemplan este tipo de descripción, los textos T1P, T2P y T6I son los que mayormente contemplan introducción a los conceptos. Respecto al enunciado de ecuación cuadrática en T4P se enuncia la ecuación cuadrática y se describe su uso en secciones cónicas, no obstante, más adelante no se define el concepto formalmente. En tanto en

T5P se realiza un enunciado general respecto a las secciones cónicas señalando su importancia y aplicación. Asimismo sucede en T7I, la descripción del enunciado es de forma general para las tres secciones cónicas que se trabajan en dicho libro.

De acuerdo a lo expuesto en T1P se presenta la siguiente descripción para introducir el concepto de elipse:

■ **Introducción** Esta figura es frecuente en astronomía. Por ejemplo, las órbitas de los planetas en torno al Sol son elípticas, y el Sol está en un foco. De igual manera, los satélites de comunicaciones, el telescopio espacial Hubble y la estación espacial internacional giran en torno a la Tierra en órbitas elípticas, con la Tierra en un foco. En esta sección se definirá la elipse y se estudiarán algunas de sus propiedades y aplicaciones.

Figura 13: Enunciado previo en T1P para el concepto de Elipse (p. 489).

Tabla 12: *Definiciones explícitas presentes en los textos analizados*

Definición	T1P	T2P	T3P	T4P	T5P	T6I	T7I	T8M	T9O
Ecuación cuadrática	X		X					X	
Circunferencia		X				X			X
Parábola	X	X	X	X	X	X	X		X
Elipse	X	X	X	X	X	X	X		X
Hipérbola	X	X	X	X	X	X	X		X
Traslación de ejes						X			X
Rotación de ejes	X	X			X		X		X

De las definiciones señaladas, no todas están presentes en la selección de textos, siendo T9O el texto con mayor presencia de conceptos explícitos con un 86%. Por el contrario, el texto T8M, es el que presenta menor presencia de conceptos formales con un 14%.

A continuación, se presenta un ejemplo del concepto de parábola.

Definición 11.1.1 Parábola

Una **parábola** es el conjunto de puntos $P(x, y)$ en el plano que son equidistantes a una recta fija L , llamada **directriz**, y a un punto fijo F , llamado **foco**.

Figura 14: Definición de parábola en T1P. (p. 482)

La siguiente tabla describe la formulación analítica presente en los textos seleccionados.

Tabla 13: *Formulación analítica de los elementos asociados a la ecuación cuadrática*

Concepto - Definición	T1P	T2P	T3P	T4P	T5P	T6I	T7I	T8M	T9O
Ecuación cuadrática		X						X	
Circunferencia		X				X			X
Parábola	X	X	X		X	X	X		X
Elipse	X	X	X		X	X	X		X
Hipérbola	X	X	X		X	X	X		X
Traslación de ejes									X
Rotación de ejes	X				X	X			X

Respecto a la tabla anterior la mayoría de los textos contiene secciones que describen los procedimientos que llevan a la ecuación estándar de la cónica, esto realizado de forma analítica. En T1P, a pesar de ser un texto que contiene como contenido explícito la ecuación cuadrática, no contempla la descripción y formulación de la ecuación mencionada, solo lo presenta literalmente señalando de forma general a que se refiere dicho concepto, en tanto para las secciones cónicas, si aparece la formulación de cada cónica, además del apartado correspondiente a rotación de ejes.

En tanto en T2P se presenta la mayoría de los temas de forma explícita, con excepción de rotación de ejes puesto que está contemplado en la ecuación cuadrática en cada una de las secciones. Esto mismo sucede con T5P, T6I, T7I y T9O que presentan más de un concepto propuesto. A continuación, se presenta un ejemplo de la descripción analítica del concepto de directriz de la parábola.

■ **Parábola con vértice en (0, 0)** Para describir analíticamente una parábola se usará un sistema de coordenadas rectangulares donde la directriz es una recta horizontal $y = -c$, en donde $c > 0$, y la ubicación del punto F sea $(0, c)$. Entonces se ve que el eje de la parábola está a lo largo del eje y , como muestra la FIGURA 11.1.3. El origen es necesariamente el vértice, porque está en el eje a c unidades tanto del foco como de la directriz. La distancia desde un punto $P(x, y)$ a la directriz es

$$y - (-c) = y + c.$$

Figura 15: Descripción analítica de la parábola en T1P (p. 482).

La siguiente tabla identifica aquellos textos que contienen apartados en que se describen conceptos relacionados con la ecuación cuadrática bidimensional a través de gráficas, identificando elementos y describiendo características de ellos que permitan una mejor comprensión del concepto de cónica y sus elementos a partir de su representación gráfica.

Respecto a lo evidenciado en los textos se obtuvo la siguiente información:

Tabla 14: Descripción de los elementos a través de la gráfica asociada a cada concepto

Concepto Ejemplificado	T1P	T2P	T3P	T4P	T5P	T6I	T7I	T8M	T9O
Ecuación cuadrática									
Circunferencia		X							
Parábola	X	X	X	X	X		X		X
Elipse	X	X	X	X	X		X		X
Hipérbola	X	X	X	X	X		X		X
Traslación de ejes									
Rotación de ejes					X				

De acuerdo con lo evidenciado en los textos, solo siete de ellos contienen este tipo de descripción para alguno de sus conceptos. Si bien existe presencia de este tipo de descripción de gráficas, la información encontrada es escasa, pues en muchos textos se desarrollan varios conceptos del objeto matemático, pero no todos ellos presentan su gráfica y mucho menos su descripción. Es por ello que en la mayoría de los casos solo se señalan las definiciones explícitas de conceptos, definiciones breves que muchas veces generan complicaciones para su comprensión. A continuación, un ejemplo de descripción de gráfica para el concepto de hipérbola:

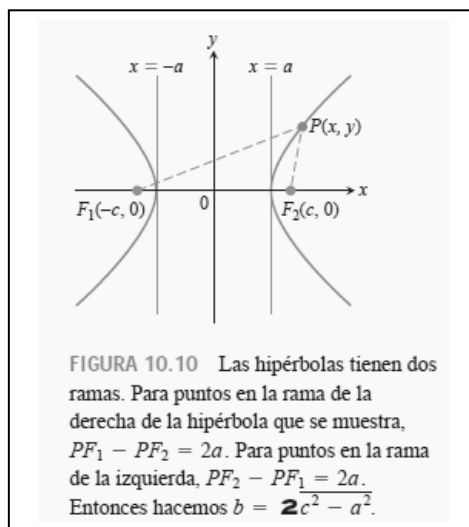


Figura 16: Descripción gráfica de la hipérbola en T5 (p. 609).

De acuerdo a la información analizada en las subcategorías encontradas para este objeto primario, se puede señalar que no todos los textos revisados contemplan los aspectos

relacionados con la ecuación cuadrática bidimensional, además que, en su mayoría solo presentan definiciones de forma explícita sin considerar descripciones de cada concepto, de su ecuación y de su gráfica con cada uno de sus elementos.

Proposición

El cuarto objeto primario del EOS son las proposiciones, se refiere a teoremas o propiedades presentes en los textos que tengan relación con el objeto matemático en estudio, en Godino, Font, Contreras y Wilhelmi, (2006) citado por Gea (2014) señala que estos “describen atributos o propiedades de los objetos matemáticos a los que se refieren, naturaleza es epistémica, y por tanto institucional; enriquecen el significado del objeto, y se constituyen en objetos explícitos de enseñanza” (p. 137).

Dentro de las proposiciones se encuentra las propiedades presentes en alguno de los elementos asociados al objeto matemático. En el análisis de los textos seleccionados se evidenció propiedades relacionadas con la ecuación cuadrática bidimensional y con algunas secciones cónicas. Por lo tanto, se considera solo aquellas que han sido comunes en los textos revisados, estas propiedades son:

Tabla 15: *Propiedades asociadas a la ecuación cuadrática*

Propiedades	T1P	T2P	T3P	T4P	T5P	T6I	T7I	T8M	T9O
<i>Multiplicación por cero</i>	X		X						
<i>Si $a \bullet b = 0$ entonces $a = 0, b = 0$ o ambas.</i>									
Propiedad de reflexión de la parábola		X	X	X	X				
Propiedad de reflexión de la Elipse		X	X		X				
Propiedad de la recta tangente a la Hipérbola		X							

Las propiedades evidenciadas están presentes solo en algunos de los textos en análisis, se ha considerado aquellas propiedades que se describen de forma explícita en dichos textos y están asociadas a elementos de la ecuación cuadrática como la propiedad para resolver ecuaciones

aplicando el método de la factorización y propiedades relacionadas con la reflexión y recta tangente. La presentación de dichas propiedades es la siguiente:

Propiedad de reflexión de la parábola
 Sea P un punto de una parábola. La recta tangente a la parábola en el punto P forma ángulos iguales con las dos rectas siguientes.

1. La recta que pasa por P y por el foco.
2. La recta que pasa por P y es paralela al eje de la parábola.

Figura 17: Propiedades de la reflexión de la parábola en T4P (p. 903).

De la misma forma que las propiedades, en los textos analizados se ha evidenciado teoremas presentes para la ecuación cuadrática bidimensional; de esta forma se han seleccionado aquellos teoremas principales en la muestra de textos:

Tabla 16: Teoremas asociados a la ecuación cuadrática

Teoremas	T1P	T2P	T3P	T4P	T5P	T6I	T7I	T8M	T9O
Ecuación $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$		X		X			X		X
Ecuación de la circunferencia $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$		X				X			
Ecuación canónica de la parábola $x^2 = 4py$	X	X	X	X	X	X	X		X
Ecuación canónica de la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	X	X	X	X	X	X	X		X
Ecuación canónica de la hipérbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	X	X	X	X	X	X	X		X
Asíntotas de una hipérbola $y = \pm \frac{b}{a} x \sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}}$	X	X		X	X				X
Ecuación de traslación de ejes $x' = x - h$ $y' = y - k$	X					X	X		

$$x = x' \cos \theta - y' \operatorname{sen} \theta$$

$$y = x' \operatorname{sen} \theta - y' \cos \theta$$

La información que entrega la tabla anterior es un resumen de los principales teoremas extraídos de los textos analizados, primeramente, se señala el teorema asociado a la ecuación cuadrática en su forma general, esta ecuación está relacionada a las secciones cónicas, parábola, elipse e hipérbola. Según lo observado en la tabla, este teorema solo está presente en 4 de los textos en estudio y depende de ciertas condiciones para identificar a que sección cónica se refiere, como se presenta a continuación:

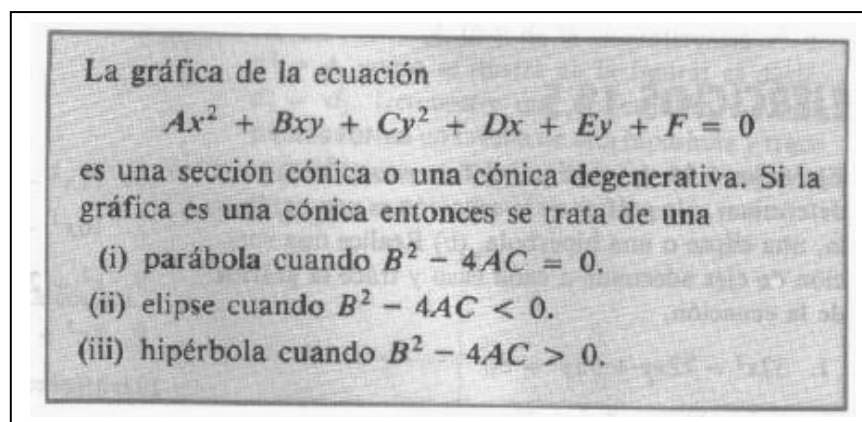


Figura 18: Ecuación cuadrática general en T7I (p. 631).

Los 4 teoremas siguientes (ec. circunferencia, ec. parábola, ec. elipse y ec. hipérbola) están asociados a las ecuaciones de las secciones cónicas. En los textos estudiados se presenta cada ecuación como un teorema asociado a dicho elemento y en esta ocasión estos teoremas están presentes para la mayoría de los textos a excepción de T8M, pues es un texto que no contiene dichos temas en estudio. La forma en que se presentan estos teoremas es la siguiente:

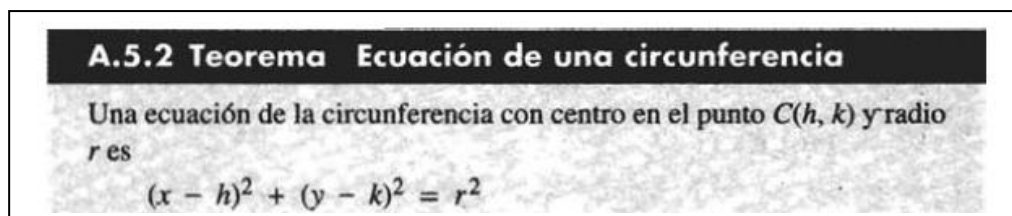


Figura 19: Ecuación de la circunferencia en T6I (p. 1173).

Procedimientos

Los procedimientos en cada texto son visibles cuando se presentan ejemplos y actividades que están desarrolladas paso a paso, esto se puede apreciar en los 9 textos analizados ya que todos ellos presentan una sección cuyo objetivo es generar ayuda al estudiante para resolver problemas o actividades de acuerdo al objeto matemático en estudio.

En su investigación Gea (2014), señala respecto al análisis de procedimientos que su función es “dar respuesta a una determinada situación-problema, el sujeto aplica diversas operaciones, algoritmos, técnicas de cálculo, que llegan a automatizarse y son específicas del tipo de problema. Por este motivo, en algunos casos se constituyen en objetos de enseñanza” (p. 151). Para este elemento primario se ha considerado un tipo de procedimiento a analizar, que corresponde a procedimientos de tipo algorítmico.

Procedimientos de tipo algorítmicos: Se entenderá como procedimiento algorítmico a aquellos apartados en que se desarrollen problemas, ejercicios o tareas matemáticas utilizando operaciones ordenadas en que se describa cada paso a desarrollar con el fin de encontrar una solución. Todos los textos seleccionados en el estudio contemplan apartados enfocados en los procedimientos, algunos procedimientos de tipo algorítmicos se han extraído de T3P, respecto a la elipse.

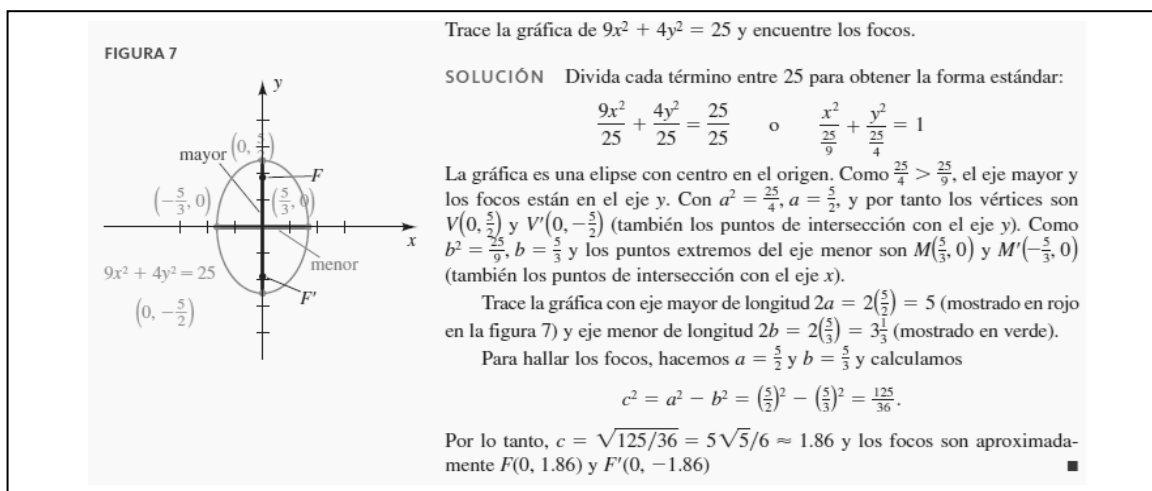


Figura 20: Procedimientos en T3P (p. 772).

En T9O se presenta la siguiente actividad matemática:

Hallar la ecuación de la elipse de centro el origen, foco en el punto (0, 3) y semieje mayor igual a 5.

Datos: $c = 3$ y $a = 5$. Por consiguiente, $b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{25 - 9} = 4$.

Aplicando la fórmula $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$, se obtiene la ecuación $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$.

Figura 21: Procedimientos en T9O (p. 53).

De acuerdo con lo analizado este objeto primario está presente en todos los textos que forman parte del estudio, ya que dichos textos tienen como principal objetivo ser una herramienta de estudio tanto en estudiantes universitarios como para cualquier lector que los utilice, por lo tanto, para cada sección asociada a un contenido se dispone de ejemplos o ejercicios con sus respectivos procedimientos, siendo como mínimo tres ejemplos para cada concepto con diferentes tipos de resolución.

Argumentos

Por último, el sexto elemento primario son los argumentos, que están presentes y son evidenciados cuando se realiza una demostración que esté justificada a través de argumentos matemáticos. La demostración en el análisis de textos está presente en ejemplos, en teoremas para determinar ecuaciones y en problemas.

Los textos presentan secciones destinadas a ejemplificar los conceptos presentados en forma de ejercicios o problemas que contienen los procedimientos necesarios para lograr la solución. Este tipo de actividades está presente en todos los textos, pues al ser textos de estudio es necesario que se cuente con apartados que permitan y generen aprendizaje en el lector con las máximas herramientas posibles. Los ejemplos en este estudio están presentes en cada concepto considerado de forma general en esta investigación ya sea la ecuación cuadrática, secciones cónicas o secciones referidas a traslación y rotación de ejes. Como se señaló anteriormente todos los textos contienen la sección destinada a ejemplos, como la siguiente:

► **EJEMPLO 3** Demuestre que la gráfica de la ecuación

$$25x^2 + 16y^2 + 150x - 128y - 1119 = 0$$

es una elipse. Determine el centro, una ecuación del eje principal, los vértices, los extremos del eje menor y los focos. Dibuje la elipse y verifique la gráfica en la graficadora.

Solución Con objeto de escribir la ecuación dada en una de las formas estándar, se comienza por completar los cuadrados en x y y . Al hacerlo se tiene

$$25(x^2 + 6x) + 16(y^2 - 8y) = 1119$$

$$25(x^2 + 6x + 9) + 16(y^2 - 8y + 16) = 1119 + 225 + 256$$

$$25(x + 3)^2 + 16(y - 4)^2 = 1600$$

$$\frac{25(x + 3)^2}{1600} + \frac{16(y - 4)^2}{1600} = 1$$

$$\frac{(x + 3)^2}{64} + \frac{(y - 4)^2}{100} = 1$$

Esta ecuación es de la forma

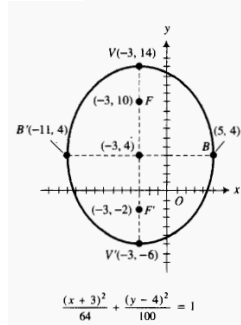
$$\frac{(y - k)^2}{a^2} + \frac{(x - h)^2}{b^2} = 1 \quad (a > b)$$

donde (h, k) es $(-3, 4)$, $a^2 = 100$ y $b^2 = 64$. Por tanto, la gráfica es una elipse cuyo centro se encuentra en $(-3, 4)$ y cuyo eje principal tiene la ecuación $x = -3$. Como $a = 10$ y $b = 8$, los vértices están en $V(-3, 14)$ y $V(-3, -6)$, y los extremos del eje menor se encuentran en $B(5, 4)$ y $B(-11, 4)$. Para determinar los focos se emplea la ecuación $b^2 = a^2 - c^2$ con $c > 0$, de donde resulta

$$64 = 100 - c^2$$

$$c^2 = 36$$

$$c = 6$$



$$\frac{(x + 3)^2}{64} + \frac{(y - 4)^2}{100} = 1$$

FIGURA 10

Figura 22: Ejemplos en T6I (p. 1187).

Argumento algebraico deductivo: En algunos textos este tipo de argumentos está presente cuando se demuestran teoremas o propiedades utilizando teoremas anteriores, así lo señala Gea (2014) pues menciona que son “manipulaciones algebraicas para tratar de argumentar una propiedad, o mostrar la equivalencia de dos expresiones algebraicas” (p. 165). Este tipo de actividades está presente en 8 de los textos, solo en T8M no está presente, pues T8M es un texto que no está enfocado en la habilidad de argumentación.

A continuación, se presenta una actividad que utiliza este tipo de argumentos cuando se solicita encontrar una expresión equivalente a la ecuación de alguna cónica. Esto es visualizado en T3P, para una ecuación equivalente de la parábola:

Una ecuación equivalente para la parábola es

$$y = \frac{1}{4p}x^2.$$

Hemos demostrado que las coordenadas de todo punto (x, y) sobre la parábola satisface $x^2 = 4py$. A la inversa, si (x, y) es una solución de $x^2 = 4py$, entonces al revertir los pasos previos vemos que el punto (x, y) está sobre la parábola.

Si $p > 0$, la parábola abre hacia arriba, como en la figura 3. Si $p < 0$, la parábola abre hacia abajo. La gráfica es simétrica con respecto al eje y porque la sustitución de $-x$ por x no cambia la ecuación $x^2 = 4py$.

Si intercambiamos los papeles de x y y , obtenemos

$$y^2 = 4px \quad \text{o bien, lo que es equivalente,} \quad x = \frac{1}{4p}y^2.$$

Figura 23: Argumentos en T3P (p. 761).

Tabla 17: Tipo de argumentación presente en los textos analizados

Concepto Ejemplificado	T1P	T2P	T3P	T4P	T5P	T6I	T7I	T8M	T9O
Ejemplos	X	X	X	X	X	X	X	X	X
Argumento algebraico deductivo	X	X	X	X	X	X	X		X

De la tabla presentada se aprecia que la sub categoría ejemplos está presente en un 100% de los textos, de forma similar ocurre respecto a los argumentos algebraicos – deductivos. Por lo tanto, la argumentación es evidenciable y está presente en los textos considerados para el estudio.

Campos de Problemas

El análisis de los textos seleccionados permite visualizar de qué forma se trabaja el objeto matemático en cada uno de ellos, en este caso el análisis realizado a través de los objetos primarios nos permite indagar la estructura que presentan los textos. Para este análisis se consideraron los 6 objetos primarios del EOS, ejemplificando para cada uno su presencia en los textos. De los textos seleccionados, 8 de ellos presentan una estructura similar que se va diferenciando en la forma de abordar cada tema respectivo al objeto matemático y uno de los textos presenta una estructura distinta, este corresponde al texto utilizado en enseñanza media otorgado por el Ministerio de Educación.

De todos los textos presentes en los programas de estudios seleccionados, solo 7 de ellos contienen la ecuación cuadrática bidimensional. Respecto a T8M, se evidencia que no considera completamente el tema en estudio, ya que se centra básicamente en generar actividades de

cálculo sin presentar situaciones de argumentación en ellos. A pesar de presentar las actividades mencionadas cabe destacar que considera secciones en que se hace uso de tics, softwares geométricos, generando actividades distintas para el estudiante, que los textos universitarios no lo utilizan, en general.

Los textos universitarios, T1P, T2P, T3P, T4P, T5P, T6I, T7I y T9O, contemplan variadas actividades para que desarrollen los estudiantes, pero centrándose generalmente en el cálculo y resolución de problemas. La estructura que presentan es similar en todos los casos, considerando los ejemplos resueltos paso a paso y las secciones de ejercicios; a pesar de ello no todos los textos analizados contemplan los 4 tipos de cónicas, ya que la sección asociada a circunferencia está ausente en varios de los textos, además de las secciones de rotación y traslación de ejes.

Del análisis exhaustivo de las actividades declaradas en los textos se ha definido 10 grupos de problemas respecto de la ecuación cuadrática bidimensional, esto da origen a los siguientes campos de problema:

Campos de problemas

CP1: Problemas de representaciones analíticas

CP2: Problemas relacionados a determinar elementos de las secciones cónicas

CP3: Problemas de contexto geométrico

CP4: Problemas de cálculo de medidas

CP5: Problema de las traslaciones

CP6: Problema de las rotaciones

CP7: Problemas respecto a la recta tangente

CP8: Problemas respecto a secciones cónicas degeneradas

CP9: Problemas de aplicación en contextos diversos

CP10: Problemas de argumentación y razonamiento

A continuación, se presenta la descripción de cada campo de problema y un ejemplo respecto a cada uno de ellos:

CP1: Problemas de representación analítica:

Son problemas relacionados a la representación algebraica de las ecuaciones cuadráticas bidimensionales o secciones cónicas, a partir de premisas básicas.

En los problemas 25 a 44, deduzca una ecuación de la parábola que satisfaga las condiciones indicadas.

25. Foco en $(0, 7)$, directriz $y = -7$

26. Foco en $(0, -5)$, directriz $y = 5$

27. Foco en $(-4, 0)$, directriz $x = 4$

Figura 24: Ejemplo en T1P, parábola (p. 487).

CP2: Problemas relacionados a determinar elementos de las secciones cónica:

Este tipo de problemas están enfocados en determinar los elementos secundarios de las secciones cónicas descritas, a través de ecuaciones y representaciones gráficas.

Ejer. 1-14: Encuentre los vértices y focos de la elipse. Trace su gráfica, mostrando los focos.

1 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ 2 $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$

Figura 25: Ejemplo en T3P, elipse (p. 778).

CP 3: Problemas de contexto geométrico:

Este campo de problemas se refiere a todo tipo de actividades relacionadas con aspectos geométricos de la ecuación cuadrática bidimensional, ya sea en la construcción, esbozo o representación geométrica de las secciones cónicas. Así como también en cálculo de área o volumen que requieran geometría de las cónicas.

Área y volumen En los Ejercicios 69 y 70, hallar *a*) el área de la región limitada por la elipse, *b*) el volumen y el área superficial del sólido generado por revolución de esta región alrededor de su eje mayor (elipsoide de revolución prolato), y *c*) el volumen y el área superficial del sólido generado por revolución de la región alrededor de su eje menor (elipsoide de revolución oblongo).

69. $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1$ 70. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$

Figura 26: Ejemplo en T4P, elipse (p. 914).

CP4: Problemas de cálculo de medidas:

Son problemas relacionados al determinar medidas de segmentos trazados entre dos puntos, o medidas de elementos de las secciones cónicas.

5. Hallar la longitud de la circunferencia cuya ecuación es
$$25x^2 + 25y^2 + 30x - 20y - 62 = 0.$$

Figura 27: Ejemplo en T2P, circunferencia (p. 109).

CP5: Problemas de traslaciones:

Este campo de problemas está relacionado a problemas que involucran la traslación de ejes y con ello de secciones cónicas.

EJEMPLO 1 Dada la ecuación

$$x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = 0$$

traslade los ejes de modo que la ecuación de la gráfica con respecto a los ejes x' y y' no contenga términos de primer grado.

Figura 28: Ejemplo en T6I, traslación de ejes (p. 1178).

CP6: Problemas de rotaciones:

Son problemas relacionados al movimiento de rotación, ya sea determinando ángulos o coordenadas de rotación para identificar la sección cónica correspondiente a la información entregada.

Dada la ecuación $3x^2 + 2\sqrt{3}xy + y^2 + 2x - 2\sqrt{3}y = 0$,

- Por rotación de ejes muestre que la gráfica de la ecuación es una parábola.
- Obtenga las coordenadas $x'y'$ del foco. Use esta información para hallar las coordenadas xy del foco.
- Obtenga una ecuación de la directriz en términos de las coordenadas $x'y'$. Use esta información para hallar una ecuación de la directriz en términos de las coordenadas xy .

Figura 29: Ejemplo en T1P, rotación de ejes (p. 509).

CP7: Problemas respecto a la recta tangente:

Son problemas que apuntan directamente en hallar la recta tangente para determinar una ecuación o un elemento de las secciones cónicas en algún problema.

29. Encuentre una ecuación para la recta tangente a la hipérbola $2x^2 - 5y^2 = 3$ en el punto $P(-2, 1)$.

Figura 30: Ejemplo en T6I, hipérbola (p. 626).

CP8: Problemas respecto a secciones cónicas degeneradas:

Son problemas asociados a ecuaciones cuadráticas degeneradas, es decir, ecuaciones cuadráticas bidimensionales que no representan secciones cónicas.

Cónicas degeneradas ¿Alguna sección cónica $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ no degenerada puede tener todas las propiedades siguientes?

- Es simétrica respecto del origen.
- Pasa por el punto $(1, 0)$.
- Es tangente a la recta $y = 1$ en el punto $(-2, 1)$.

Justifique su respuesta.

Figura 31: Ejemplo en T5P, rotación de ejes (p. 708).

CP9: Problemas de aplicación en contextos diversos:

Este campo de problemas tiene relación a todas aquellas actividades enfocadas en situaciones reales que puedan ser resueltas a través de las ecuaciones cuadráticas y los elementos principales de ellas

Se lanza una piedra horizontalmente desde la cima de una torre de 185 metros (m) de altura con una velocidad de 15 metros por segundo (m/s). Hallar la distancia del punto de caída al pie de la torre suponiendo que el suelo es horizontal. Sol. 92,5 m.

Figura 32: Ejemplo en T9O, parábola (p. 50).

CP10: Problemas de razonamiento:

Este campo de problemas está enfocado en problemas relacionados con la discusión de actividades entorno a la ecuación cuadrática bidimensional, estos se deben justificar a través de argumentos matemáticos sobre alguna proposición o teorema y son evidenciados en demostraciones, argumentaciones, entre otros.

Demuestre que las tangentes a la curva $y^2 = 4px$ desde cualquier punto en la recta $x = -p$ son perpendiculares.

Figura 33: Ejemplo en T5P, secciones cónicas (p. 696).

La siguiente tabla muestra la presencia de cada uno de los campos de problemas en los textos seleccionados, así como el porcentaje de aparición de los campos de problemas en los textos. Al final de cada columna se indica el porcentaje de aparición de los campos de problema en cada texto, y cada fila indica el porcentaje de la presencia del campo de problema en los textos analizados.

Tabla 18: *Resumen Campos de Problemas*

	T1P	T2P	T3P	T4P	T5P	T6I	T7I	T8M	T9O	Total
CP1	X	X	X	X	X	X	X	X	X	100%
CP2	X	X	X	X	X	X	X		X	89%
CP3	X	X	X	X	X	X	X		X	89%
CP4		X							X	22%
CP5						X	X		X	33%
CP6	X	X			X		X		X	56%
CP7		X							X	22%
CP8					X				X	22%
CP9	X	X	X	X	X	X	X	X	X	100%
CP10	X	X		X	X	X	X		X	78%
Total	60%	80%	40%	50%	70%	60%	70%	20%	100%	

De lo observado, es posible señalar que los campos de problemas CP1 y CP9 están presentes en la totalidad de los textos analizados. En cambio, CP4, CP7 y CP8 son los campos de problemas con menor presencia siendo abordado cada uno de los problemas en solo el 22% del total de los

textos. Respecto a los textos, solo T9O contempla el 100% de los campos de problemas definidos, y en forma contraria T8M solo contempla el 20% de los campos de problemas.

Análisis de problemas a través de los objetos primarios

A continuación, se presentan dos problemas extraídos de dos textos diferentes. Estos problemas fueron extraídos del apartado de ejemplos o ejercicios resueltos, considerando en este trabajo la solución del problema presentada por los textos como solución experta.

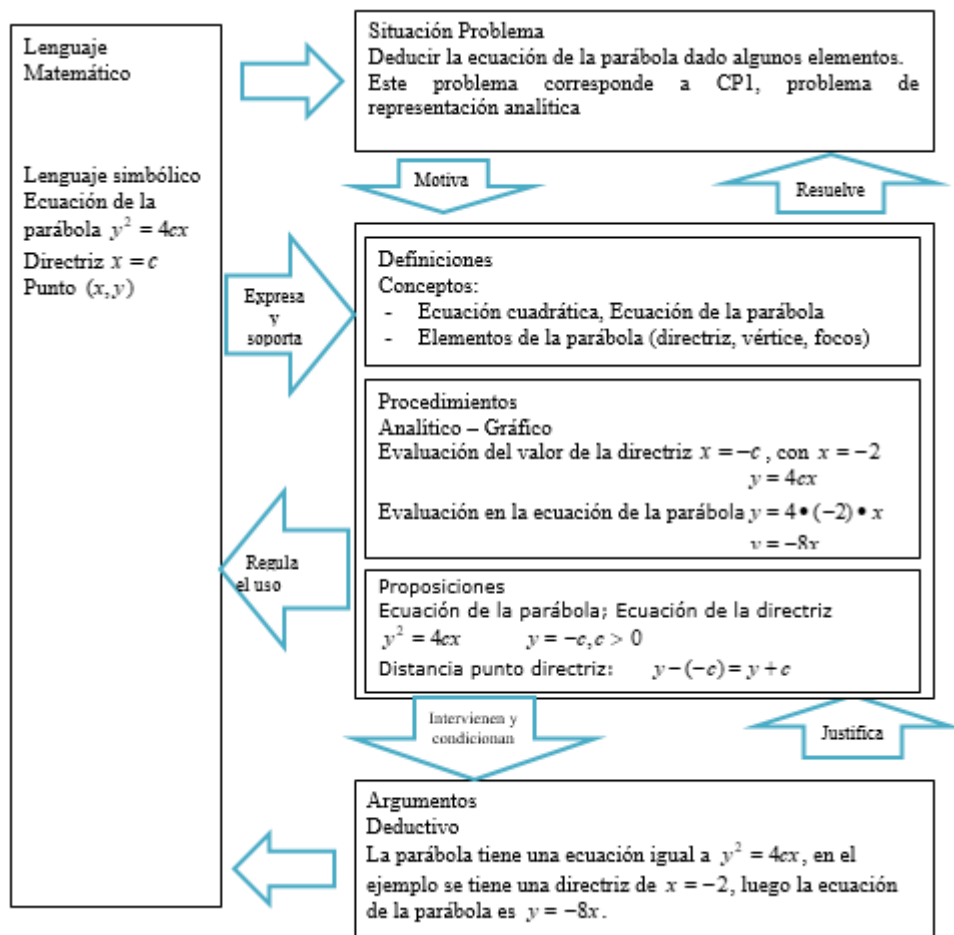
Los dos problemas fueron seleccionados de acuerdo a la forma de resolución propuesta por los autores, considerando un problema con una gran cantidad de información (desarrollo extenso de procedimiento) y el segundo problema con escasa información en la resolución (desarrollo reducido en el procedimiento). Por ello, los ejemplos representan dos tipos de procedimientos evidenciados en los textos, uno que genera una buena comprensión en el lector y otro que, por lo acotado de su desarrollo, genera complicaciones en la comprensión.

Este primer ejemplo es extraído del texto T1P correspondiente a la sección cónica de la parábola y muestra en su resolución un procedimiento amplio.

EJEMPLO 2 Deducción de la ecuación de una parábola	
Deduzca la ecuación, en su forma normal, de la parábola con directriz $x = 2$ y foco en el punto $(-2, 0)$. Haga la gráfica.	
Solución En la FIGURA 11.1.7 se han graficado la directriz y el foco. Por su ubicación se ve que la ecuación que buscamos tiene la forma $y^2 = 4cx$. Como $c = -2$, la parábola se abre hacia la izquierda, y así	
$y^2 = 4(-2)x \quad \text{o} \quad y^2 = -8x.$	
Como se mencionó en la explicación anterior a este ejemplo, si se sustituye $x = c$, o en este caso $x = -2$, en la ecuación $y^2 = -8x$, se pueden determinar dos puntos en su gráfica. De $y^2 = -8(-2) = 16$ se obtiene $y = \pm 4$. Como se ve en la FIGURA 11.1.8 , la gráfica pasa por $(0, 0)$ y también por los extremos $(-2, -4)$ y $(-2, 4)$ de la cuerda focal. ≡	

Figura 34: Ejemplo en T1P, parábola (p. 484).

Esquema 1: Objetos primarios del EOS evidenciados en el ejemplo 1



El problema presentado, forma parte de la sección de ejemplos en T1P, éste tiene por objetivo encontrar la ecuación de la parábola, dado algunos elementos característicos de la parábola; el desarrollo del ejemplo es descriptivo, y se resuelve analítica y gráficamente. Cada uno de los pasos a desarrollar está presente de forma clara y específica, señalando en cada punto cómo se debe resolver el problema; además, se considera la representación gráfica de la sección cónica, y se señalan los elementos en ello.

Respecto al análisis bajo los objetos primarios del enfoque, es posible evidenciar en el esquema 1, que los 6 objetos primarios están presentes y por ello es posible identificarlos con claridad. Este problema presenta un desarrollo extenso y responde claramente a los solicitado en el ejercicio, este desarrollo puede facilitar el aprendizaje y una buena revisión de contenidos asociado a la parábola, favoreciendo así el estudio de dicha sección cónica al FPM.

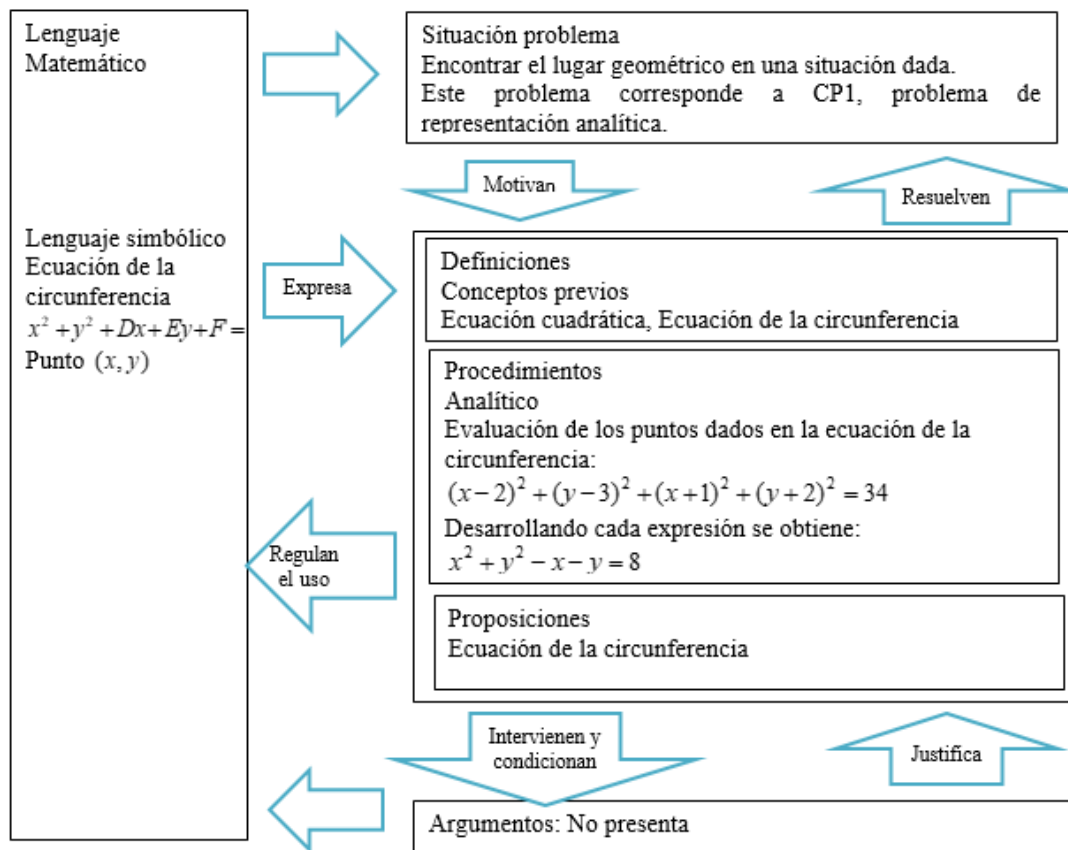
Un segundo ejemplo es extraído del texto T9O correspondiente a la sección cónica de circunferencia y muestra en su resolución información reducida de procedimientos.

22. Hallar el lugar geométrico de los puntos (x, y) cuya suma de los cuadrados de sus distancias a los puntos fijos $(2, 3)$ y $(-1, -2)$ sea igual a 34.

$(x - 2)^2 + (y - 3)^2 + (x + 1)^2 + (y + 2)^2 = 34$. Simplificando, se obtiene, $x^2 + y^2 - x - y = 8$, una circunferencia.

Figura 35: Ejemplo en T9O, circunferencia (p. 41).

Esquema 2: Objetos primarios del EOS evidenciados en ejemplo 2



El problema presentado, forma parte de la sección ejemplos resueltos de T9O, éste tiene por objetivo hallar el lugar geométrico de la circunferencia dados algunos elementos característicos, se puede observar que en la resolución del problema el procedimiento presentado es acotado, con escasa descripción, desarrollado de forma analítica y sin mayor explicación de los pasos a seguir. En el análisis de los objetos primarios, se evidencian 5 de los objetos, el objeto primario de la argumentación no es evidenciado en el problema. A pesar de que los 5 objetos restantes están presentes, la descripción del problema no es completa, y es dificultoso para el lector seguir el procedimiento. Por lo tanto, el ejemplo presentado no facilita la comprensión y el aprendizaje

de los conceptos de la circunferencia. Además, indicar que lo reducido de los procedimientos puede generar o conllevar a errores en el estudio.

4.2. Análisis de Errores

En esta sección abordamos nuestro segundo problema de investigación que corresponde al análisis de errores. Se entenderá por error lo definido como Bernabeu et.al (2009) “la presencia de un esquema cognitivo, inadecuado en el alumno” (p. 5).

En particular se realiza un estudio de las respuestas dadas por los FPM en las actividades evaluativas relacionadas con la ecuación cuadrática bidimensional, para ello se ha seleccionado un conjunto de ítems extraídos de las evaluaciones parciales y globales realizadas por los FPM en la asignatura de introducción al análisis, que inscribieron los FPM el segundo semestre del año 2018. Cabe destacar que los ítems fueron seleccionados desde todas las evaluaciones que realizó este grupo de estudiantes, y de ellas se consideraron aquellas que se relacionan con el tema de ecuación cuadrática bidimensional.

Caracterización de ítems

Para nuestro análisis hemos seleccionado un conjunto de siete problemas o ítems extraídos de las evaluaciones parciales y globales realizadas por los FPM en la asignatura Introducción al Análisis, entre estas se han identificado aquellas relacionadas con ecuaciones, secciones cónicas, elementos característicos, gráficos, entre otros.

El análisis de estas evaluaciones tiene por objetivo determinar los tipos de errores evidenciados en las respuestas de los FPM en cada ítems, además los campos de problemas que son abordados en estas evaluaciones. De acuerdo a ello las fases de trabajo fueron presentadas en el capítulo 3 (figura 5), las cuales son:

Selección de ítems a analizar: se describe brevemente cada ítem y se clasifica respecto al tipo de evaluación a la cual pertenecen.

Análisis por cada ítems: se señala una breve descripción de cada ítem, indicando el problema seleccionado y su solución experta.

Clasificación de respuestas: se presenta a través de una tabla resumen de frecuencia y porcentaje, respecto al tipo de respuesta dada por cada estudiante, clasificada como: correcta, incompleta, errónea o en blanco.

Análisis de respuestas erróneas: con el fin de determinar los errores cometidos por los estudiantes en cada ítem; esto a través de la revisión de evaluaciones y la identificación de los tipos de errores para cada ítem.

Análisis de repuestas erróneas a través de los objetos primarios: se analizan las respuestas erróneas haciendo uso de los objetos primarios y se evidencia si estos están o no presentes en dichas respuestas. Para cada uno de los objetos se presenta una tabla resumen respecto a la información evidenciada en las evaluaciones.

Ejemplo de respuestas erróneas: se presenta un ejemplo que corresponde a la respuesta de uno de los estudiantes ante algún ítem analizado y se aplica el esquema del enfoque ontosemiótico para su análisis.

A continuación, se presentan la primera fase de trabajo respecto a los siete ítems seleccionados que corresponde a la descripción de cada uno de estos. La siguiente tabla presenta el listado de ítems, una breve descripción de cada uno, los campos de problemas que son abordados y se indica el tipo de evaluación a donde es extraído el ítem.

Tabla 19: *Descripción de ítems*

Ítems	Descripción	Campos de Problemas	Tipo de evaluación
Ítem 1	Determinar ecuación de la circunferencia	CP1	Evaluación parcial N°1
Ítem 2	Determinar ecuación de la parábola	CP1	Evaluación parcial N°1
Ítem 3	Identificar sección cónica, determinar elementos	CP1, CP2, CP10	Evaluación parcial N°1
Ítem 4	Determinar elementos de la hipérbola	CP2, CP3	Evaluación parcial N°2
Ítem 5	Determinar los vértices de la hipérbola dada la ecuación	CP2	Evaluación global N°1
Ítem 6	Identificar sección cónica y realizar un estudio completo.	CP1, CP2, CP10	Evaluación global N°1
Ítem 7	Identificar sección cónica, determinar elementos	CP1, CP2, CP3, CP10	Evaluación global N°2

Análisis de ítems

A continuación, se analizan las respuestas dadas por los FPM ante las actividades evaluativas rendidas. Esto se realiza en las siguientes etapas de trabajo:

- a) Análisis general de respuestas.
- b) Análisis de errores según la clasificación de Radatz (1979).
- c) Análisis de errores a través de los objetos primarios del EOS.

Cada una de las etapas de trabajo se realizan de la siguiente forma:

- a) Análisis general de respuestas, a través de la descripción del problema, solución experta y respuestas dadas por los estudiantes a los ítems indicando respuestas correctas, incompletas, erróneas o que fueron dejadas en blanco. Entendiendo éstas como sigue:
 - *Respuesta correcta*: cuando el estudiante logra resolver correctamente el problema del ítem, obteniendo el puntaje total.
 - *Respuesta incompleta*: cuando el estudiante responde parcialmente el problema, se realizan los procedimientos correspondientes, pero llega a un punto en que el estudiante no es capaz de continuar con su solución, por lo tanto, deja incompleta la respuesta.
 - *Respuesta errónea*: cuando el estudiante no logra llegar a la solución del problema planteado y evidencia ciertos errores en el procedimiento dado por el estudiante.
 - *Respuesta en blanco*: cuando el estudiante no desarrolla ningún procedimiento al problema planteado.
- b) Análisis de errores según Radatz. Corresponde a aquellas respuestas que han sido clasificadas como respuestas erróneas dadas por los FPM. En este análisis se realiza una clasificación de los errores evidenciados en dichas respuestas. Estos errores son clasificados de acuerdo a Radatz (1979), ya que se identifican una serie de posibles errores que se comenten en los procedimientos respecto a un problema. De acuerdo a ello y según la revisión de las evaluaciones se han considerado solo dos de las clasificaciones dadas por Radatz, aquellas relacionadas a *Errores debidos a un aprendizaje deficiente de conceptos* y *Errores debidos a asociaciones incorrectas de conceptos*. Estas clasificaciones se describen a continuación incorporando la codificación que tendrán para el posterior análisis:
 - *Errores debidos a un aprendizaje deficiente de conceptos (E1)*: estos se refieren a todos aquellos procedimientos que evidencien la falta de aprendizaje de conceptos, que llevan

al FPM a dar una respuesta incorrecta y se describen confusiones entre ecuaciones y conceptos de las secciones cónicas.

- *Errores debidos a asociaciones incorrectas de conceptos (E2)*: se refiere a aquellos errores que se cometen en los procedimientos, ya sea por un error de cálculo de un valor, o por la errónea asociación de variables.

Podemos observar que para poder establecer una mejor tipología de los errores hemos incorporado un tercer elemento llamado *Errores de proceso* que definimos como:

- *Errores de proceso (E3)*: que considera todo tipo de situaciones en que se desarrolla correctamente el ejercicio, pero se comete errores relacionados con el procedimiento que generalmente ocurren al pasar por alto algún valor o el signo de este (negativo o positivo), y que conllevan a no terminar correctamente el procedimiento.

En total se ha considerado necesario contar con estos tres tipos de errores, los que han sido evidenciados en la revisión de las respuestas dadas por los FPM a las actividades evaluativas. Para este análisis se han elaborado tablas resumen de la información, por ítems.

La tercera etapa de trabajo será abordada más adelante, en el análisis a través de los objetos primarios del EOS.

A continuación, se presenta el resumen de las respuestas dadas por los FPM y se establece una clasificación de errores según Radatz respectivamente. Estas están incluidas en las tablas 20 y 21.

Tabla 20: *Frecuencia de los tipos de respuestas*

Ítem	Resp. Correcta	Resp. Incompleta	Resp. Errónea	Resp. En blanco
Ítem 1	8	2	14	3
Ítem 2	3	8	8	8
Ítem 3	2	4	20	1
Ítem 4	1	3	17	4
Ítem 5	11	0	13	2
Ítem 6	3	6	15	2
Ítem 7	8	0	11	0

Cada uno de los ítems contempla la cantidad de respuestas evidenciadas en la revisión de las actividades evaluativas, siendo la mayor frecuencia en respuestas de tipo errónea, de forma contraria las respuestas incompletas presentan la menor frecuencia.

Tabla 21: *Frecuencia de errores según Radatz*

Ítem	E1	E2	E3	TOTAL
Ítem 1	9	3	2	14
Ítem 2	2	6	0	8
Ítem 3	7	5	8	20
Ítem 4	3	8	6	17
Ítem 5	3	3	7	13
Ítem 6	6	7	2	15
Ítem 7	0	9	2	11

De los tipos de errores señalados, se evidencia que todas las respuestas dadas por los FPM forman parte de alguno de los tipos de errores mencionados, estas respuestas se distribuyen casi de forma equitativa en cada columna, por ello se cuenta con una variedad de respuestas erróneas, como también respuestas correctas y en blanco, información que enriquece la investigación.

En lo que sigue, se presenta el análisis epistemológico de los problemas seleccionados sobre la ecuación cuadrática bidimensional. En este análisis establecemos los tipos de errores cometidos por los FPM frente a las actividades evaluativas.

Análisis Ítem 1

El primer ítem es un problema extraído de la evaluación parcial N°1, esta fue aplicada a los 27 participantes del estudio. Este ítem tiene por objetivo identificar la ecuación de una circunferencia concéntrica que contiene a un punto dado, podemos indicar que en este problema está presente el campo de problemas CP1, es decir, a problemas de representación analítica.

Ítem 1

Determine la ecuación de la circunferencia que es concéntrica a la circunferencia

$$x^2 + y^2 - 4x + 6y - 17 = 0 \text{ y que pasa por el punto } P(5,7) .$$

Solución experta

La ecuación canónica de la circunferencia es: $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$. Por lo tanto, factorizando y completando cuadrados en la ecuación dada se obtiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 - 4x + 6y - 17 &= 0 \\(x^2 - 4x + 4) + (y^2 + 6y + 9) &= 17 + 4 + 9 \\(x-2)^2 + (y+3)^2 &= 30\end{aligned}$$

Luego la coordenada del centro es: $(h, k) = (2, -3)$. Para obtener el valor del radio se utiliza la fórmula: $r^2 = (x-h)^2 + (y-k)^2$. El centro obtenido es $(2, -3)$ que corresponde a la coordenada (h, k) . Por lo tanto, reemplazando el punto $P(5, 7)$ en la fórmula de radio se obtiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}r^2 &= (5-2)^2 + (7-(-3))^2 \\r^2 &= 9 + 100 \\r^2 &= 109.\end{aligned}$$

Considerando el valor del radio se obtiene la ecuación solicitada. Por lo tanto, la ecuación de la circunferencia es:

$$(x-2)^2 + (y+3)^2 = 109.$$

En la Tabla 22 se presenta el resumen de los tipos de respuestas dadas por los FPM para este ítem. Se considera un total de 27 estudiantes para el análisis de este primer ítem.

Tabla 22: Resumen de respuestas de estudiantes al ítem 1

Ítem	Resp. Correcta	Resp. Incompleta	Resp. Errónea	Resp. En blanco	Total
Frecuencia	8	2	14	3	27
Porcentaje	30%	7%	52%	11%	100%

De acuerdo a la Tabla 22, el 52% de los estudiantes que rindieron la evaluación responden erróneamente al problema del ítem 1. Solo 8 de los estudiantes logran completar correctamente el ítem, esto deja en evidencia que la mayoría de los estudiantes (70%) que cursaron la asignatura de introducción al análisis, no evidencia el conocimiento necesario para responder adecuadamente al problema planteado. También es importante mencionar que dos estudiantes responden incompletamente al ítem y tres estudiantes dejan en blanco el problema, esto corresponde a un 7% y 11% respectivamente. En el caso de las respuestas incompletas, los

estudiantes no logran completar el ítem, lo desarrollan parcialmente y omiten el cálculo de alguno de los elementos solicitados.

Análisis de errores del ítem 1.

En lo que sigue se realiza el análisis de las respuestas dadas por los FPM al ítem 1 que anteriormente fueron clasificadas en la sección de errores. Estos errores se analizan primeramente respecto a las categorías: E1: error debidos a un aprendizaje deficiente de conceptos. E2: error debido a asociaciones incorrectas. E3: error de proceso. De acuerdo a esto, la información obtenida es presentada en la Tabla 23.

Tabla 23: Clasificación de errores en ítem 1

Ítem 1	E1	E2	E3	Total
Frecuencia	9	3	2	14
Porcentaje	64,2%	21,4%	14,2%	100%

De la tabla anterior, la mayoría de los errores se concentran en errores debido al aprendizaje deficiente de conceptos (E1), esto con un 64,2% del total. Es decir, 9 de los estudiantes no reconocen correctamente los conceptos, representaciones y expresiones matemáticas asociadas al problema, en este caso la circunferencia. En tanto los errores del tipo E2 y E3, evidencian los casos de estudiantes que cometen errores por asociaciones incorrectas, o por procedimientos mal realizados.

A continuación, se muestra una de las respuestas dadas por un estudiante para este ítem, donde se identifica el error de tipo E1, es decir, error por aprendizaje deficiente de conceptos.

$$7) x^2 + y^2 - 4x + 6y - 77 = 0$$
 punto $P(5, 9)$

$$(x^2 - 4x) + (y^2 + 6y) = 77$$

$$(x^2 - 4x - 2) + (y^2 + 6y + 9) = 77 + 9 - 2$$

$$(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 24$$

$$\frac{(x - 2)^2}{24} + \frac{(y + 3)^2}{24}$$
 centro $(2, -3)$

Figura 36: Error de tipo E1

El estudiante comete errores al momento de factorizar, además del error debido al concepto ecuación canónica de la circunferencia. Este tipo de error evidencia una falta de comprensión de la forma correcta de escribir la ecuación de la circunferencia en su forma canónica.

Análisis Ítem 2

El segundo ítem seleccionado es extraído de la evaluación parcial N°2 y esta fue aplicada a los 27 participantes del estudio. Este ítem tiene por propósito determinar la ecuación canónica de una parábola dado el vértice y un punto; que pertenece a la parábola. Podemos indicar que en este problema está presente el campo de problemas CP1, es decir, a problemas de representación analítica

Ítem 2

Hallar la ecuación de la parábola de vértice el punto V (2,3), de eje paralelo al eje de coordenada Y, que pasa por el punto P(4, 5).

Solución experta

La ecuación canónica de la parábola: $(y - k)^2 = 4p(x - h)$. Reemplazando V (h, k) = (2, 3) en la ecuación, se obtiene:

$$(y - 3)^2 = 4p(x - 2).$$

Ahora evaluando el punto P (4, 5) en la ecuación, se obtiene:

$$(5 - 3)^2 = 4p(4 - 2)$$

$$2^2 = 4p(2)$$

$$4 = 8p$$

$$\frac{1}{2} = p,$$

luego, la ecuación canónica de la parábola es:

$$(y - 3)^2 = 4 \cdot \frac{1}{2} (x - 2)$$

$$(y - 3)^2 = 2(x - 2).$$

A continuación, se presenta la Tabla 24 con el resumen de los tipos de respuestas dadas por los FPM a este ítem. Se establece la frecuencia y el porcentaje para las respuestas dadas.

Tabla 24: *Resumen de respuestas de estudiantes al ítem 2*

Ítem 2	Resp. Correcta	Resp. Incompleta	Resp. Errónea	Resp. En blanco	Total
Frecuencia	3	8	8	8	27
Porcentaje	11%	29,6%	29,6%	29,6%	100%

De acuerdo a la información presentada en la tabla anterior, se observa que la concentración de respuestas está principalmente en tres de las columnas de la tabla, con 8 respuestas incompletas, 8 respuestas erróneas y 8 respuestas en blanco; lo que equivale cada una a 29,6% respectivamente. No obstante, es necesario mencionar que, en el caso de estudiantes que responden en blanco, ellos pueden no presentar las competencias mínimas que les permitan desarrollar este tipo de actividades, o aquellos que responden de forma incompleta, solo pueden trabajar algunas etapas del problema sin lograr la solución correcta. En el caso de las respuestas incompletas, el 29,6% de los estudiantes responden incompletamente al ítem. Para esta clasificación, se evidencia que, en los 8 casos identificados los estudiantes solo logran resolver una parte del problema, lo cual deja entrever la falta de aprendizaje que tienen acerca de la sección cónica de la parábola.

Análisis de errores del ítem 2.

De las respuestas incorrectas derivadas de la Tabla 24, se tiene que 8 de los estudiantes responden incorrectamente al ítem, de acuerdo a ello se realiza la siguiente clasificación de estos errores evidenciados en las respuestas de los FPM al ítem 2.

Al igual que en el primer ítem se considera los tres tipos de errores seleccionados, por lo tanto, la información obtenida es la siguiente.

Tabla 25: *Clasificación de errores en ítem 2*

Ítem 2	E1	E2	E3	Total
Frecuencia	2	6	0	8
Porcentaje	25%	75%	0%	100%

De la información obtenida en la tabla anterior, se evidencia que las respuestas están focalizadas en los errores de tipo E1 y E2, es decir, errores debido a aprendizaje deficiente de conceptos y errores por asociaciones incorrectas. De acuerdo a lo anterior, se presenta un ejemplo de

respuesta dada por un estudiante cuyo error corresponde al tipo E2, por asociación incorrecta de conceptos.

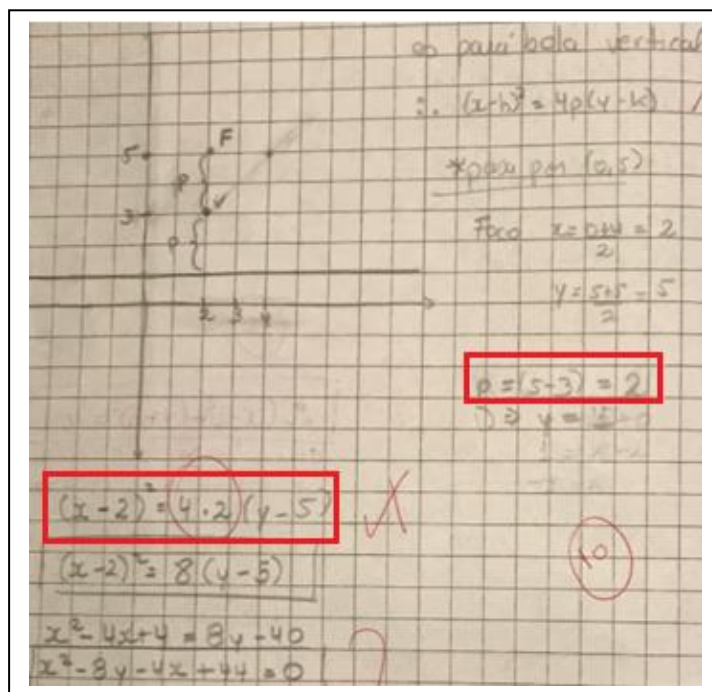


Figura 37: Error de tipo E2

El estudiante comete errores en sus procedimientos al intentar calcular el valor de “p” de la solución experta, valor que obtiene de forma incorrecta por un mal desarrollo y comprensión de cálculo, ya que el FPM no comprende correctamente de qué forma debe utilizar la ecuación canónica de la parábola, para obtener dicho resultado; por ello tanto el valor de “p” como la ecuación final que obtiene son incorrectos.

Análisis Ítem 3

El ítem 3 corresponde a un problema extraído de la actividad evaluativa parcial N°1 rendida por 27 participante del estudio. Este problema tiene por propósito realizar un estudio completo de una cónica dada a partir de su ecuación cuadrática general, identificando el nombre de dicha sección cónica y todos sus elementos característicos. Podemos indicar que en este ítem está presente el campo de problemas CP1, CP2 y CP10, es decir, problema de representación analítica, relacionado a determinar elementos de la sección cónica y de argumentación y razonamiento.

Ítem 3

Haga un estudio completo de la cónica de ecuación:

$$4x^2 + 25y^2 - 24x + 250y + 561 = 0$$

Indicando, nombre de la cónica y todos sus elementos característicos.

Solución experta

La ecuación cuadrática señalada corresponde a la sección cónica de la elipse, dado que los coeficientes de x^2 e y^2 son diferentes y ambos positivos. Para determinar los elementos característicos de la cónica, se debe obtener la forma canónica de la ecuación, para ello se debe completar cuadrados. La ecuación canónica de la elipse es: $\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$.

$$4x^2 - 24x + 25y^2 + 250y = -561$$

$$4(x^2 - 6x) + 25(y^2 + 10y) = -561$$

$$4(x^2 - 6x + 9) + 25(y^2 + 10y + 25) = -561 + 36 + 625$$

$$4(x-3)^2 + 25(y+5)^2 = 100 \div 100$$

$$\frac{(x-3)^2}{25} + \frac{(y+5)^2}{4} = 1.$$

A partir de la ecuación canónica de la elipse se pueden obtener sus elementos característicos, así se tiene:

- Centro (h, k)

$$-h = -3 \Rightarrow h = 3$$

$$-k = 5 \Rightarrow k = -5$$

$$C(3, -5).$$

- Semi eje horizontal: $a^2 = 25 \Rightarrow a = 5$.

Semi eje vertical:

$$b^2 = 4 \Rightarrow b = 2.$$

- Excentricidad: Para obtener el valor de "c" se tiene que:

$$c^2 = a^2 - b^2$$

$$c^2 = 25 - 4$$

$$c = \sqrt{21},$$

$$e = \frac{c}{a} \Rightarrow e = \frac{\sqrt{21}}{5}.$$

La Tabla 26 muestra las respuestas dadas por los FPM a la actividad evaluativa del ítem 3.

Tabla 26: *Resumen de respuestas de estudiantes al ítem 3*

Ítem 3	Resp. Correcta	Resp. Incompleta	Resp. Errónea	Resp. En blanco	Total
Frecuencia	2	4	20	1	27
Porcentaje	7%	15%	74%	4%	100%

De acuerdo a lo observado en la tabla anterior, sigue siendo la columna de respuestas erróneas la que mayor frecuencia presenta con 20 respuestas que equivalen a un 74%. De las 27 respuestas revisadas 4 de ellas corresponden a procedimientos de forma incompleta, estas evaluaciones dichas evaluaciones no presentan errores de ningún tipo, solo evidencian la falta de cálculo de elementos de las secciones cónicas que por diferentes circunstancias no fueron abordadas en los procedimientos descritos, ya sea por falta de conocimiento, o por falta de comprensión de la totalidad de los elementos de dicha sección, entre otras.

Análisis de errores en ítem 3

De las respuestas observadas en la Tabla 26 se tiene que 20 de los estudiantes responden incorrectamente al ítem, lo que representa el 74% del total. De acuerdo a dicho grupo, se tiene la siguiente clasificación de tipos de errores.

Tabla 27: *Clasificación de errores en ítem 3*

Ítem 3	E1	E2	E3	Total
Frecuencia	7	5	8	20
Porcentaje	35%	25%	40%	100%

Las 20 respuestas erróneas se distribuyen en los tipos de errores correspondientes, siendo el que presenta mayor frecuencia, el error de proceso con un 40%, al igual que el error de aprendizaje deficiente de conceptos con un 35%. Dada esta información, se puede inferir que los estudiantes presentan dificultades en el aprendizaje de conceptos mínimos para resolver el ítem, así también en el caso de sus procedimientos en que cometen errores de proceso, que para este ítem corresponden principalmente a errores de signos. A continuación, se presenta un ejemplo de respuesta dada por un estudiante en que se comete error de tipo E3, es decir, error de proceso.

$4x^2 + 25y^2 - 24x + 250y + 561 = 0$
 $(4x^2 - 24x) + (25y^2 + 250y) = -561$
 $4(x^2 - 6x + 9) + 25(y^2 + 10y + 25) = -561 + 36 + 625$
 $4(x-3)^2 + 25(y+5)^2 = 100 \quad | \div 100$
 $\frac{(x-3)^2}{25} + \frac{(y+5)^2}{4} = 1$ * Eje Mayor horizontal
 Eje. canónica.
 Elementos:
 $a^2 = 25 \Rightarrow a = 5$
 $b^2 = 4 \Rightarrow b = 2$
 $C(h, k) = (3, -5)$
 $V(h \pm a, k) = (3 \pm 5, -5)$
 $F(h \pm c, k) = (3 \pm \sqrt{29}, -5)$
 $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{29}}{5}$
 $c^2 = a^2 + b^2$
 $c^2 = 25 + 4$
 $c = \sqrt{29}$

Figura 38: Ejemplo error de tipo E3

En este caso el estudiante comete errores de procedimiento, que consiste en el mal cálculo del coeficiente “c” ($c = \sqrt{29}$) de la solución experta, pues establece que para determinarlo debe resolver una adición entre los cuadrados de los coeficientes “a” y “b”, lo cual es incorrecto, pues la operación entre ellos debe ser una sustracción. De esta manera, el valor de los focos y de la excentricidad no es determinado correctamente. Este tipo de respuestas corresponde al error de tipo E3, pues solo hay equivocación en la forma de aplicar la expresión que permite determinar correctamente el valor de “c”, por lo tanto, no es falta de aprendizaje, sino por la incorrecta aplicación de la expresión señalada.

Análisis Ítem 4

Este ítem es un problema extraído de la evaluación parcial N°2 aplicada a 25 participantes del estudio. La actividad a desarrollar consiste en dada la ecuación general de la hipérbola determinar los elementos característicos de ella y bosquejar la gráfica de la cónica; podemos identificar que en este problema está presente los campos de problemas CP2 y CP3, es decir, problemas relacionados con determinar elementos característicos de las secciones cónicas y problemas de contexto geométrico.

Ítem 4

Dada la hipérbola de ecuación

$$9x^2 - 16y^2 - 18x - 64y - 199 = 0$$

Determine: las coordenadas del centro, focos y vértices. Las ecuaciones de las asíntotas y la excentricidad. Trazar la gráfica de la hipérbola.

Solución experta

Para determinar los elementos de la hipérbola, se debe obtener la ecuación de esta en la forma canónica

cuya expresión es dada por: $\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$. Completando cuadrados en la ecuación dada, se

obtiene:

$$9x^2 - 18x - 16y^2 - 64y - 199 = 0$$

$$9(x^2 - 2x) - 16(y^2 + 4y) = 199$$

$$9(x^2 - 2x + 1) - 16(y^2 + 4y + 4) = 199 + 9 - 64$$

$$9(x-1)^2 - 16(y+2)^2 = 144 \div 144$$

$$\frac{(x-1)^2}{16} - \frac{(y+2)^2}{9} = 1.$$

A partir de la ecuación canónica se pueden obtener los elementos característicos.

- Centro (h, k)

$$-h = -1 \Rightarrow h = 1$$

$$-k = 2 \Rightarrow k = -2$$

$$C(1, -2).$$

- El valor de: $a^2 = 16 \Rightarrow a = 4$, El valor de: $b^2 = 9 \Rightarrow b = 3$
- Para obtener el valor de “c” se tiene que:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$c^2 = 16 + 9$$

$$c = \sqrt{25} = 5.$$

- Focos: Para determinar el valor de los focos se tiene que, por ser una hipérbola de centro (h, k) entonces la forma de obtenerlos es la siguiente: $(h \pm c, k)$. De esta forma los focos son:

$$\text{Focos: } (6, -2) \text{ y } (-4, -2).$$

- Vértices: por ser el valor de $a^2 = 16 \Rightarrow a = 4$, entonces los vértices se encuentran 4 unidades hacia la izquierda y 4 unidades hacia la derecha del centro. Por lo tanto, los vértices son:

$$\text{Vértices: } (-3, -2) \text{ y } (5, -2).$$

- Asíntotas: $(y - k) = \pm \frac{a}{b}(x - h)$

$$(y + 2) = \pm \frac{3}{4}(x - 1) \Rightarrow \begin{aligned} y &= \frac{3}{4}x - \frac{11}{4} \\ y &= -\frac{3}{4}x - \frac{5}{4} \end{aligned}$$

- Excentricidad: $e = \frac{c}{a} \Rightarrow e = \frac{5}{4}$.
- La gráfica de la ecuación es:

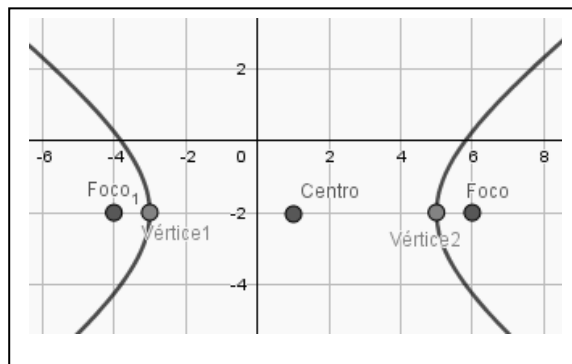


Figura 39: Gráfica de la hipérbola obtenida con Geogebra

En la Tabla 28 se presenta el resumen de los tipos de respuestas dadas por los FPM. Se considera un total de 25 estudiantes que respondieron al Ítem 4.

Tabla 28: Resumen de respuestas de estudiantes al ítem 4

Ítem 4	Resp. Correcta	Resp. Incompleta	Resp. Errónea	Resp. En blanco	Total
Frecuencia	1	3	17	4	25
Porcentaje	4%	12%	68%	16%	100%

De acuerdo con los resultados obtenidos en la tabla anterior, solo 1 de los 25 FPM responde correctamente al ítem 4. Por el contrario, en las respuestas erróneas está la mayor concentración de respuestas con un 68% del total. Respecto a las respuestas incompletas y respuestas en blanco abarcan el 12% y 16% respectivamente.

Análisis de errores en ítem 4

En lo que sigue se realiza el análisis de errores de las respuestas dadas por los FPM para este ítem, cuyos resultados están expresados de acuerdo a la clasificación de errores según Radatz.

Tabla 29: Clasificación de errores en ítem 4

Ítem 4	E1	E2	E3	Total
Frecuencia	3	8	6	17
Porcentaje	18%	47%	35%	100%

De acuerdo a lo observado en la tabla anterior se aprecia que la mayoría de los errores se concentra en errores de tipo E2 y E3, es decir, errores por asociaciones incorrectas y errores de proceso, esto equivale a un 47% y 35% respectivamente. No obstante, cabe mencionar que E1 también tiene valores en su frecuencia que muestra los diferentes tipos de errores en las respuestas dadas. A continuación, se muestra una de las respuestas dada por un estudiante para este ítem, donde se identifica el error de tipo E3, es decir, error de proceso.

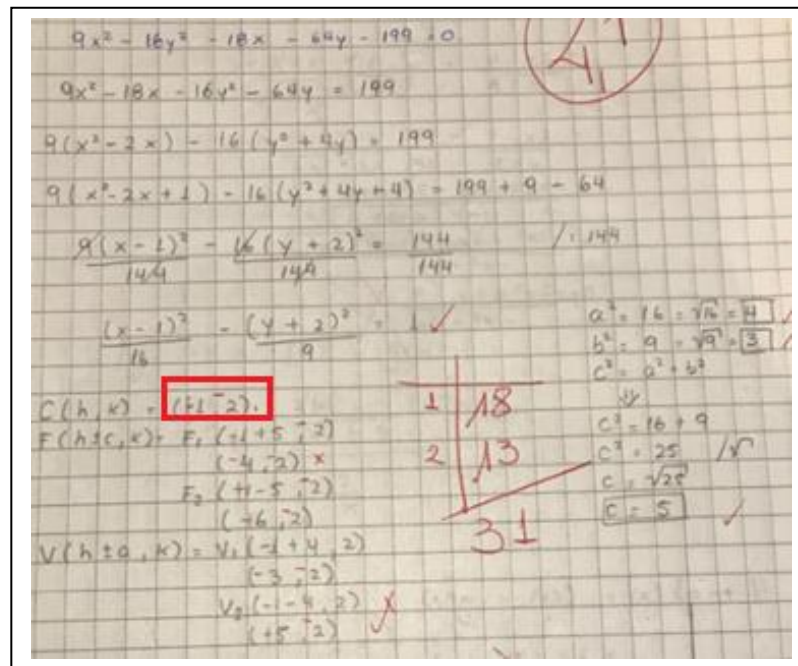


Figura 40: Error de tipo E3

El ejemplo presentado está relacionado a errores de proceso pues se observa en la imagen que el estudiante comete errores en asignar signos a los valores de las coordenadas del centro, por ello al tener erróneo el elemento “centro”, el cálculo de los focos y de los vértices también está incorrecto, por lo cual se obtiene también un bosquejo errado del gráfico de la hipérbola.

Análisis Ítem 5

El quinto ítem es un problema de alternativa múltiple extraído de la evaluación global N°1, esta fue aplicada a 26 participantes del estudio. Este ítem específicamente solicita identificar las coordenadas de uno de los vértices de la sección cónica hipérbola. Podemos indicar que en este problema está presente el campo de problemas CP2, es decir, problema relacionado a determinar elementos característicos de las secciones cónicas.

De acuerdo a la información obtenida en la tabla anterior, se evidencia que 11 FPM han respondido correctamente al ítem, si bien el problema es acotado, necesita un procedimiento algebraico a realizar para obtener la alternativa correcta. Así también, se observa que solo dos estudiantes dejan el ítem en blanco, por lo tanto, la mayoría intenta responderlo con el conocimiento que tiene acerca de la sección cónica en estudio, a pesar de ello el 50% de los FPM obtiene una respuesta errónea.

Análisis de errores en ítem 5

En lo que sigue se realiza el análisis de las respuestas dadas por los FPM al ítem 5. De las 26 evaluaciones revisadas, se obtiene que 13 de ellas presentan errores en sus procedimientos, por lo tanto, estos errores han sido clasificados de acuerdo a los tipos de errores de Radatz.

Tabla 31: Clasificación de errores en ítem 5

Ítem 5	E1	E2	E3	Total
Frecuencia	3	3	7	13
Porcentaje	23%	23%	54%	100%

A partir de la información extraída de la Tabla 31 se observa que el 46% del total estudiantes con respuestas erróneas cometen errores de tipo E1 y E2 respectivamente, es decir, errores debido al aprendizaje deficiente de conceptos y errores por asociaciones incorrectas. Así también, se observa que la mayor parte de los errores se concentra en E3, que corresponde a los errores de proceso, por la mal utilización de los signos y de operaciones básicas. De las respuestas obtenidas de los estudiantes se seleccionó un ejemplo con respuestas erróneas, que corresponde a errores de tipo E3.

Handwritten work showing algebraic manipulation with errors:

$$9x^2 - 36x - 16y^2 - 32y = 124$$

$$9(x^2 - 4x) - 16(y^2 + 2y) = 124$$

$$9(x^2 - 4x + 4) - 16(y^2 - 2y + 1) = 124 + 36 - 16$$

$$9(x-2)^2 - 16(y+1)^2 = 144$$

$$\frac{(x-2)^2}{16} - \frac{(y+1)^2}{9} = 1$$

Final result: $(h \pm a, k)$ with $(6, 1)$ and $(-2, 1)$.

Figura 41: Error de tipo E3

Como se observa en el ejemplo, se evidencia que el estudiante comete errores al momento de obtener la ecuación canónica de la hipérbola, pues obtiene una expresión incorrecta al momento de factorizar la expresión inicial, específicamente en el signo del factor que contiene a la variable “y”. De esta forma, todos los pasos siguientes son incorrectos, hasta llegar a la ecuación y ello conlleva a que los vértices encontrados por el estudiante también sean incorrectos.

Análisis Ítem 6

El sexto ítem es un problema extraído de la evaluación global N°1, esta fue aplicada a 26 de los participantes del estudio. Este problema tiene por objetivo realizar un estudio de una cónica dada su ecuación general y determinar los elementos característicos de la cónica. Podemos indicar que en este problema están presentes los campos de problemas CP2, CP3 y CP10, es decir, problemas de representación analítica relacionados a determinar elementos de la sección cónica, problemas de contexto geométrico y problemas de argumentación y razonamiento.

Ítem 6

Haga un estudio lo más completo posible de la cónica de ecuación

$$5x^2 + 9y^2 - 80x + 54y + 221 = 0$$

Solución experta

Para determinar el tipo de ecuación, se debe obtener la forma canónica, para ello se completa cuadrados.

$$5x^2 - 80x + 9y^2 + 54y + 221 = 0$$

$$5(x^2 - 16x) + 9(y^2 + 6y) = -221$$

$$5(x^2 - 16x + 64) + 9(y^2 + 6y + 9) = -221 + 320 + 81$$

$$5(x - 8)^2 + 9(y + 3)^2 = 180 \div 180$$

$$\frac{(x - 8)^2}{36} + \frac{(y + 3)^2}{20} = 1.$$

La ecuación obtenida corresponde a una Elipse. A partir de ello se puede determinar los elementos característicos:

- Centro (h, k)

$$-h = -8 \Rightarrow h = 8$$

$$-k = 3 \Rightarrow k = -3$$

$$C(8, -3).$$

- El valor de: $a^2 = 36 \Rightarrow a = 6$ El valor de: $b^2 = 20 \Rightarrow b = 2\sqrt{5}$.
- Para obtener el valor de “c” se tiene que:

$$c^2 = a^2 - b^2$$

$$c^2 = 36 - 20$$

$$c = \sqrt{16} = 4.$$

- Vértices: por ser el valor de $a = 6$, entonces los vértices se encuentran 6 unidades hacia la izquierda y 6 unidades hacia la derecha del centro. Por lo tanto, los vértices de la elipse son:

Vértices: (14,-3) y (2,-3).

- Focos: Para determinar el valor de los focos se utiliza la expresión: $(h \pm c, k)$.

Focos: (12,-3) y (4,-3).

- Excentricidad: $e = \frac{c}{a} \Rightarrow e = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.
- Longitud lado recto: $LR = \frac{2b^2}{a} = \frac{40}{6} = \frac{20}{3}$.
- Representación gráfica:

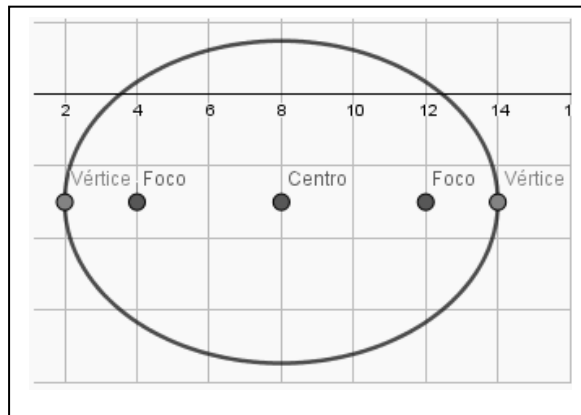


Figura 42: Gráfica de la elipse obtenida con geogebra

En la Tabla 32 se presenta el resumen de los tipos de respuestas dadas por los FPM para este ítem.

Tabla 32: Resumen de respuestas de estudiantes al ítem 6

Ítem 6	Resp. Correcta	Resp. Incompleta	Resp. Errónea	Resp. En blanco	Total
Frecuencia	3	6	15	2	26
Porcentaje	11%	23%	58%	8%	100%

En este ítem, la mayor concentración de respuestas se encuentra en la columna de respuestas erróneas, con un 58% respecto al total. De acuerdo a la información solo 3 estudiantes logran solucionar completamente este ítem, elaborando así un estudio a cabalidad de la sección cónica. De 26 respuestas

analizadas el 23% responde incompletamente, y el 8% presenta una respuesta en blanco.

Análisis de errores en ítem 6

En lo que sigue se realiza el análisis de las respuestas dadas por los FPM al ítem 6. De las 26 evaluaciones revisadas, se obtiene que 15 de ellas presentan errores en sus procedimientos, por lo tanto, estos errores han sido clasificados de acuerdo a los tipos de errores de Radatz.

Tabla 33: Clasificación de errores en ítem 6

Ítem 6	E1	E2	E3	Total
Frecuencia	6	7	2	15
Porcentaje	40%	47%	13%	100%

De la información extraída en la tabla se observa que la mayoría de los errores se concentra en las secciones E1 y E2, es decir, errores por el aprendizaje deficiente de conceptos y por la asociación incorrecta de conceptos. Respecto a E3, solo 2 estudiantes presentan errores de proceso lo que equivale a un 13%. A continuación, se presenta un ejemplo de respuesta errónea, correspondiente a error de tipo E2, es decir, error de asociaciones incorrectas:

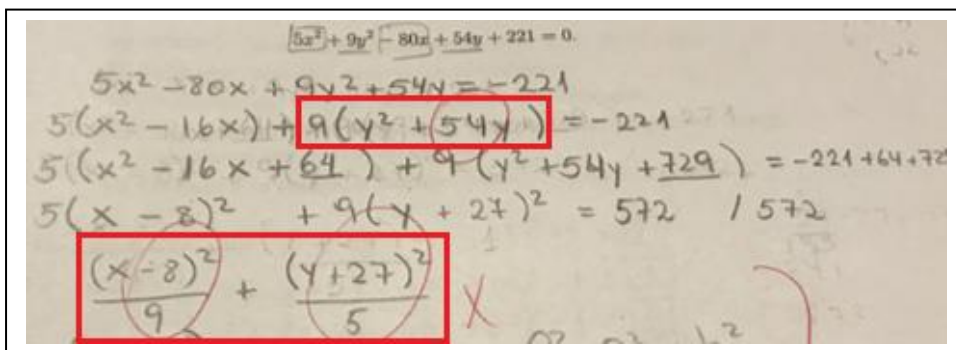


Figura 43:Error de tipo E2

En el ejemplo presentado, se observa que el estudiante comete errores al momento de encontrar la ecuación de la elipse, pues la factorización realizada al inicio es incorrecta, por ello la expresión algebraica de la ecuación canónica de la elipse, es errónea. Este es un error de tipo E2, pues el estudiante asocia incorrectamente los procedimientos realizados ya que, al intentar determinar la ecuación canónica, no realiza la factorización adecuadamente como se muestra en la imagen.

Análisis Ítem 7

Este último ítem es un problema extraído de la evaluación global N°2, esta fue aplicada a 19 participantes del estudio. Este ítem tiene por objetivo realizar un estudio completo de una cónica dada a partir de su

ecuación cuadrática general, identificando el nombre de dicha sección cónica y todos sus elementos característicos. Podemos indicar que en este problema están presentes los campos de problemas CP1, CP2, CP3 y CP10, es decir, problemas de representación analítica, relacionados a determinar elementos de las secciones cónicas, problemas de contexto geométrico y problemas de argumentación y razonamiento.

Ítem 7

Haga un estudio completo de la cónica de ecuación

$$4x^2 + y^2 - 8x + 4y - 8 = 0$$

Solución experta

Para determinar el tipo de ecuación, se debe obtener la forma canónica, para ello se completa cuadrados.

$$\begin{aligned}
 4x^2 - 8x + y^2 + 4y - 8 &= 0 \\
 4(x^2 - 2x) + (y^2 + 4y) &= 8 \\
 4(x^2 - 2x + 1) + (y^2 + 4y + 4) &= 8 + 4 + 4 \\
 4(x-1)^2 + (y+2)^2 &= 16 \div 16 \\
 \frac{(x-1)^2}{4} + \frac{(y+2)^2}{16} &= 1.
 \end{aligned}$$

La ecuación obtenida corresponde a una Elipse, cuyo eje mayor es vertical, por lo tanto, los elementos correspondientes a dicha cónica son los siguientes:

- Centro (h, k)

$$\begin{aligned}
 -h &= -1 \Rightarrow h = 1 \\
 -k &= 2 \Rightarrow k = -2 \\
 C(1, -2).
 \end{aligned}$$

- El valor de: $a^2 = 16 \Rightarrow a = 4$. El valor de: $b^2 = 4 \Rightarrow b = 2$.
- Coeficiente “c”: Para obtener el valor de “c” se tiene que:

$$\begin{aligned}
 c^2 &= a^2 - b^2 \\
 c^2 &= 16 - 4 \\
 c &= \sqrt{12} = 2\sqrt{3}.
 \end{aligned}$$

- Vértices: Por ser una elipse de eje mayor vertical, los vértices se calculan por la expresión:
 $V(h, k \pm a)$

Vértices: (1,2) y (1,-6).

- Focos: Para determinar el valor de los focos se tiene la expresión: $(h, k \pm c)$. De esta forma los focos son:

$$\text{Focos: } (1, -2 + 2\sqrt{3}) \text{ y } (1, -2 - 2\sqrt{3}).$$

- Excentricidad: se calcular por la expresión: $e = \frac{c}{a}$. Por lo tanto, $e = \frac{2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow e = \frac{\sqrt{3}}{2}$.
- Longitud lado recto:

$$LR = \frac{2b^2}{a} = \frac{8}{4} = 2.$$

Representación gráfica

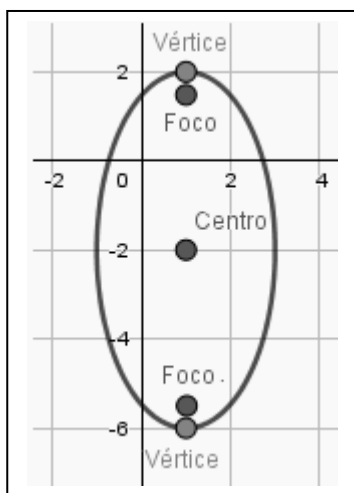


Figura 44: Gráfica de la elipse obtenida con geogebra

En la Tabla 34 se presenta el resumen de los tipos de respuestas dadas por los FPM para este ítem.

Tabla 34: Resumen de respuestas de estudiantes al ítem 7

Ítem 7	Resp. Correcta	Resp. Incompleta	Resp. Errónea	Resp. En blanco	Total
Frecuencia	8	0	11	0	19
Porcentaje	42%	0%	58%	0%	100%

Este último ítem en análisis corresponde a la última evaluación aplicada en la asignatura y fue rendida por 19 estudiantes, siendo el 42% del total quienes responden correctamente al ítem, indicando que estos estudiantes tienen el conocimiento mínimo para responder al ítem. El 58% responde erróneamente al ítem y no hay respuestas incompletas ni tampoco respuestas en blanco.

Análisis de errores en ítem 7

De las respuestas observadas en la Tabla 35 se tiene que 11 de los estudiantes responden incorrectamente al ítem, lo que representa el 58% del total. De acuerdo a dicho grupo, se tiene la siguiente clasificación de tipos de errores según Radatz:

Tabla 35: Clasificación de errores en ítem 7

Ítem 7	E1	E2	E3	Total
Frecuencia	0	9	2	11
Porcentaje	0%	82%	18%	100%

De las 11 respuestas revisadas se presentan errores que se clasifican en errores de tipo E2 y E3, es decir, errores de asociación incorrecta de conceptos y errores de proceso que equivalen a un 82% y 18% respectivamente. De acuerdo a lo anterior, se presenta un ejemplo correspondiente a una respuesta incorrecta de error de tipo E2, error debido a asociaciones incorrectas:

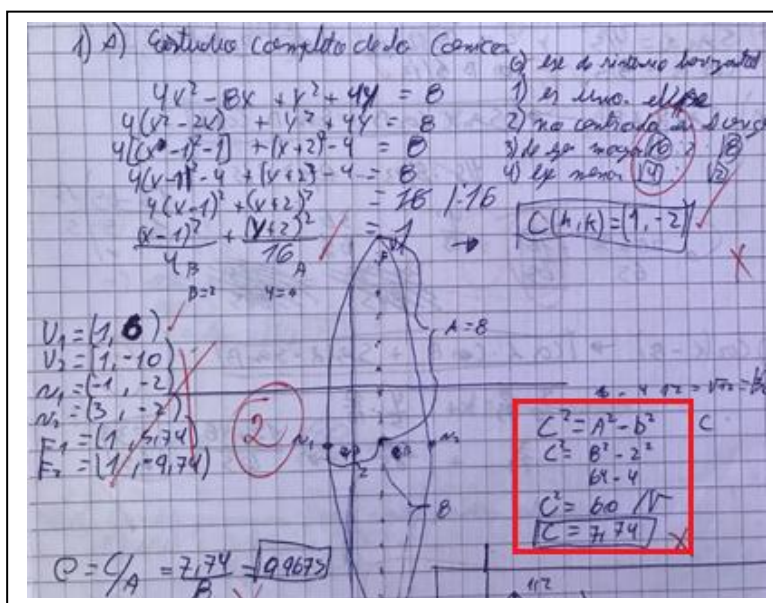


Figura 45: Error de tipo E2

En el ejemplo se observa que el estudiante no logra completar el problema con lo solicitado en el enunciado, a pesar de obtener correctamente la ecuación de la elipse, este no logra calcular todos sus elementos característicos, debido a que calcula erróneamente el valor del coeficiente “a” y con ello también comete errores al obtener el valor del coeficiente “c”, que da la excentricidad y los focos.

Análisis de errores a través de los objetos primarios del EOS

La última etapa de trabajo corresponde a la parte c) que es el análisis de errores a través de los objetos primarios del EOS. Este análisis se realiza a través de los objetos primarios del enfoque, permitiendo así en la investigación focalizar los errores de las respuestas dadas por los FPM en alguna de las dimensiones de los objetos primarios. De acuerdo a lo anterior se consideran los errores respecto a: conceptos, lenguaje, procedimientos, proposiciones y argumentos. Para clasificar las respuestas de los estudiantes se ha considerado lo siguiente:

- *Error conceptual*: cuando se emplea incorrectamente un concepto que impide resolver adecuadamente el problema y, por lo tanto, este no tiene relación con el ítem.
- *Error de lenguaje*: cuando se utiliza erróneamente el lenguaje matemático empleado y esto conlleva a un mal desarrollo del procedimiento.
- *Error de procedimiento*: errores de tipo analítico, en el desarrollo del problema cuando se aplica una estrategia incorrecta.
- *Error en proposiciones*: al emplear erróneamente una propiedad matemática.
- *Error en argumentación*: cuando falta entregar argumentos que respalden la respuesta o procedimientos realizados.

A continuación, se presentan los tipos de respuestas dadas por los FPM y sus respectivas frecuencias según la sub etapa descrita anteriormente. De acuerdo a esto, se considera solo las evaluaciones cuyas respuestas son erróneas, y se clasifican dichos resultados por cada ítem y para cada uno de los objetos primarios. En cada una de estas respuestas, el error cometido está relacionado con alguna de las dimensiones de los objetos primarios. Cabe destacar que el objeto situación problema, está presente en todos los ítems. A continuación, se presenta la tabla resumen de los errores correspondientes a cada dimensión de los objetos primarios:

Tabla 36: *Resumen de respuestas erróneas según objetos primarios*

Ítem	Conceptos	Lenguaje	Procedimientos	Proposiciones	Argumentos
Ítem 1	2	0	13	4	1
Ítem 2	1	0	8	1	0
Ítem 3	1	0	20	8	0
Ítem 4	2	0	17	7	0
Ítem 5	2	0	10	1	3
Ítem 6	2	0	14	4	0
Ítem 7	0	0	11	3	0

De la tabla presentada se observa que de las respuestas de los FPM a cada ítem estas están presentes en cuatro de los objetos primarios mencionados. Así también, el objeto primario con mayor frecuencia, respecto a errores que cometieron los FPM, son los procedimientos, ya que, todos los ítems presentan más de 8 respuestas erróneas. En los ítems 1 y 5 se observan errores de argumentación. A continuación, se analiza la presencia de cada objeto primario en la revisión de evaluaciones.

Conceptos

En esta dimensión se analizan las respuestas de los FPM a partir de los errores focalizados en los conceptos. De acuerdo a ello, se obtiene la siguiente tabla, cuya información es presentada de acuerdo a cada ítem, identificando la frecuencia y el porcentaje de respuestas erradas relacionadas a la dimensión Conceptos.

Tabla 37: *Respuestas erróneas de estudiantes relacionadas con conceptos*

Conceptos	Ítem 1	Ítem 2	Ítem 3	Ítem 4	Ítem 5	Ítem 6	Ítem 7
Frecuencia	2	1	1	2	2	2	0
Porcentaje	7%	4%	4%	8%	8%	8%	0%
Total	27	27	27	25	26	26	19

Se observa en la tabla anterior que la mayoría de los ítems contiene respuestas de los FPM con errores debidos al mal uso de definiciones y conceptos. Por otra parte, en el ítem 7 no hay errores asociados a conceptos. Asimismo, la información entregada deja entrever que hay una menor cantidad de respuestas dadas por los FPM, que presenten errores de conceptos, ya que hay ítems que solo tienen una respuesta cuyos errores están enfocados en dicha dimensión. De esta forma, se observa que la mayoría de los FPM maneja información básica respecto a las definiciones y conceptos asociados a la ecuación cuadrática bidimensional. A continuación, se presenta un ejemplo de evaluación cuyo resultado erróneo tiene relación con el mal uso de conceptos. Esta evaluación corresponde al ítem 1.

$3 \quad 4x^2 + 25y^2 - 24x + 210y + 561 = 0$
 $(4x^2 - 24x) + (25y^2 + 210y) = -561$
 $4(x^2 - 6x) + 25(y^2 + 10y) = -561 + 36 + 625$
 $4(x^2 - 6x + 9) + 25(y^2 + 10y + 25) = 100 \quad / \quad / 100$
 $\frac{4(x-3)^2}{100} + \frac{25(y+5)^2}{100} = 1$
 $\frac{(x-3)^2}{25} + \frac{(y+5)^2}{4} = 1$
 Ecuación de la elipse $\frac{(x-3)^2}{25} + \frac{(y+5)^2}{4} = 1$
 Centro $(3, -5)$
 Eje mayor: 10
 Eje menor: 4
 Focos $(3 \pm 2\sqrt{21}, -5)$
 Vertices $(3 \pm 5, -5)$
 $\sqrt{(3, -5) + 2, -5}$
 $\sqrt{(3, -5) + 2, -5}$
 $c^2 = a^2 + b^2$
 $c^2 = 25 + 4$
 $c = \sqrt{29}$
 $a = 5$
 $b = 2$
 $e = \frac{c}{a}$

Figura 46: Error de concepto en ítem 3

Esta respuesta es seleccionada por la riqueza que presenta en los desarrollos realizados, pues a pesar de presentar errores, tiene desarrollos bastante completos que dejan evidenciar de forma explícita en que dimensiones de los objetos primarios se focalizan errores. Por lo tanto, se observa en la imagen que el FPM comete errores conceptuales, ya que calcula erróneamente el coeficiente “c”, pues utiliza una adición para obtenerlo y no la operación de sustracción. De esta forma el error cometido conlleva a que nuevamente obtenga un resultado incorrecto al calcular los focos y la excentricidad. Esto es un error de conceptos, que surgen por la mal aplicación de una expresión y la falta de comprensión al relacionar los ejes y la excentricidad de la sección cónica.

Lenguaje

Se puede observar en el análisis de las respuestas entregadas por los FPM que no hay errores asociados a la dimensión lenguaje de los objetos primarios del EOS. Así también, es importante mencionar que los enunciados correspondientes a cada ítem son dados de forma estándar y la estructura de las preguntas pueden ser claramente observadas en los textos analizados de modo que los enunciados planteados a los FPM contemplan la forma clásica de ser presentados para que el estudiante pueda dar respuesta a cada ítem.

Procedimientos

Al revisar las respuestas de los FPM, estas presentan errores de proceso que se manifiestan en los procedimientos generados por los estudiantes, por lo tanto, conllevan a una respuesta errónea. En la siguiente tabla se presenta el resumen de evaluaciones con error en sus procedimientos:

Tabla 38: *Respuestas erróneas de estudiantes relacionadas a procedimientos*

Procedimientos	Ítem 1	Ítem 2	Ítem 3	Ítem 4	Ítem 5	Ítem 6	Ítem 7
Frecuencia	13	8	20	17	10	14	11
Porcentaje	48%	30%	74%	68%	38%	54%	58%
Total	27	27	27	25	26	26	19

Se observa en la tabla anterior que la totalidad de los ítems contienen respuestas de los FPM con errores debidos a procedimientos. De la tabla presentada se observa que las respuestas dadas por los FPM con errores en procedimientos son sobre el 30% respecto al total en cada ítem. El ítem con mayor cantidad de respuestas erróneas es el ítem 3, con un 74% y de forma contraria el ítem 2 presenta la menor cantidad de errores en procedimientos con un 30%. A continuación, se presenta un ejemplo de una de las evaluaciones en que se evidenció errores de procedimiento, esta evaluación corresponde al ítem 5.

Handwritten student work for item 5 showing algebraic steps to find the canonical equation of a hyperbola. The final result is boxed in red and marked with a large red X, indicating it is incorrect.

$$\begin{aligned}
 &9x^2 - 16y^2 - 36x - 32y - 124 = 0 \\
 &9x^2 - 36x + (-16y^2 - 32y) = 124 \\
 &9(x^2 - 4x) - 16(y^2 + 2y) = 124 \\
 &9(x^2 - 4x + 4) - 16(y^2 + 2y + 1) = 124 - 36 + 16 \\
 &9(x-2)^2 - 16(y+1)^2 = 144 \quad / \cdot \frac{1}{144} \\
 &\frac{9(x-2)^2}{144} - \frac{16(y+1)^2}{144} = 1 \\
 &\boxed{\frac{(x-2)^2}{16} - \frac{16(y+1)^2}{9} = 1}
 \end{aligned}$$

Figura 47: Respuesta de estudiante en ítem 5

De lo observado en la Figura 46 el FPM comete errores en los procedimientos que realiza para obtener la ecuación canónica de la hipérbola a partir de la ecuación general, ya que al momento de igualar a 1 la expresión, realiza mal la simplificación correspondiente a las variables “x e y”. Por lo tanto, la ecuación obtenida y los valores de las coordenadas de los vértices son incorrectos.

Proposiciones

En esta dimensión se analizan las respuestas de los FPM que presentan errores respecto al uso de proposiciones, se evidencia la escasa justificación de los desarrollos matemáticos utilizando adecuadamente algún teorema o proposición según corresponda. De esta forma, los resultados generales obtenidos están presentes en la siguiente tabla:

Tabla 39: *Respuestas erróneas de estudiantes relacionadas a proposiciones*

Proposiciones	Ítem 1	Ítem 2	Ítem 3	Ítem 4	Ítem 5	Ítem 6	Ítem 7
Frecuencia	4	1	8	7	1	4	3
Porcentaje	15%	4%	30%	28%	4%	15%	16%
Total	27	27	27	25	26	26	19

De lo presentado, se observa que las respuestas erróneas debido a la falta de proposiciones, está en todos los ítems considerados para este análisis. Por lo tanto, en todos los ítems hay respuestas que dejan entrever el uso incorrecto de proposiciones; como se observa en la Tabla 39 en los ítems 3 y 4 con un 30% y 28% respectivamente. Por otra parte, los ítems 2 y 5 presentan la menor cantidad de errores respecto al uso de proposiciones con un 4% respecto del total.

Para este análisis, al igual que en los ítems anteriores se ha seleccionado una de las respuestas erróneas, este ejemplo corresponde a la respuesta de un FPM al ítem 7.

Problema 4

a) $4x^2 + y^2 - 8x + 4y - 8 = 0$
 $4x^2 - 8x + y^2 + 4y = 8$
 $4(x^2 - 2x + 1) + (y^2 + 4y + 4) = 8 + 4 + 4$
 $4(x-1)^2 + (y+2)^2 = 16$
 $\frac{(x-1)^2}{4} + \frac{(y+2)^2}{4} = 1$
 $\frac{(x-1)^2}{16/4} + \frac{(y+2)^2}{4/4} = 1$
 $a^2 = 4 \rightarrow a = 2x$
 $b^2 = 16 \rightarrow b = 4x$
 $C^2 = a^2 + b^2 \rightarrow \sqrt{16 + 4} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$
 $C(h, k) = (1, -2)$
 $f(h \pm a, k) = (1 \pm 2, -2)$
 $v(h \pm c, k) = (1 \pm \sqrt{5}, -2)$
 $(3, -2)$
 $(-1, -2)$
 $(1 + \sqrt{5}, -2)$
 $(1 - \sqrt{5}, -2)$

Figura 48: Respuesta de estudiante en ítem 7

De lo observado en la imagen es posible identificar en qué punto del procedimiento, el estudiante comete errores de proposiciones, al momento de identificar y calcular el valor de los vértices y focos, el estudiante presenta la expresión a utilizar de forma errónea, por lo tanto, al aplicarla obtiene incorrectamente las coordenadas correspondientes a dichos elementos. Por otra parte, es posible observar

que no solo comete errores por mal uso de proposiciones, sino también de tipo procedimental, al factorizar la expresión correspondiente a la ecuación.

Argumentos

En esta dimensión se analizan las respuestas de los FPM que presentan errores por la falta de argumentación en sus desarrollos. Esto es evidenciado cuando un FPM entrega argumentos matemáticos que respalden su respuesta o procedimientos realizados. Estos argumentos pueden estar escritos al momento de justificar el procedimiento indicando la expresión matemática que se va a utilizar. De acuerdo a ello se obtiene la siguiente información:

Tabla 40: *Respuestas erróneas de estudiantes relacionadas a argumentos*

Argumentos	Ítem 1	Ítem 2	Ítem 3	Ítem 4	Ítem 5	Ítem 6	Ítem 7
Frecuencia	1	0	0	0	3	0	0
Porcentaje	4%	0%	0%	0%	16%	0%	0%
Total	27	27	27	25	26	26	19

De lo observado en la tabla anterior se tiene que solo dos de los ítems analizados contienen respuestas dadas por los FPM cuyos errores son corresponden a la dimensión Argumentos de los objetos primarios. El ítem 5 es el que mayor frecuencia presenta con un 16% respecto del total. Lo contrario sucede en los otros cinco ítems, pues no hay evidencia de que los estudiantes cometan errores por la falta de argumentos en sus procedimientos. Por lo tanto, las respuestas de los FPM a los ítems analizados presentan poco uso de la argumentación.

A continuación, se presenta la respuesta dada por un estudiante al ítem 1 en que se evidencia un error de Argumentación.

Handwritten student work for item 1:

$$1) \quad x^2 - 4x + y^2 + 6y = 17$$

$$(x^2 - 2x) - 2x + (y^2 + 3y) - 9 = 17$$

$$(x-2)^2 + (y+3)^2 = 30$$

hacer en Realte

$$(x-2)^2 + (y+3)^2 = 109$$

30

Figura 49: Respuesta de estudiante en ítem 1

Si bien, no se presenta un error explícito en la respuesta dada, si es necesario considerar lo que debe presentar un procedimiento para considerarse completamente correcto; en este sentido se hace imprescindible que el estudiante logre argumentar matemáticamente su respuesta y sea fundamentada a través de los procedimientos que señale. En este caso el estudiante no lo logra, pues su procedimiento es escaso y por lo tanto para el análisis a través de los objetos primarios se evidencia la falta de pasos a desarrollar y el déficit de argumentos y proposiciones utilizadas.

Ejemplo del análisis a una respuesta a través de los objetos primarios

A continuación, se presenta un ejemplo que se analiza la respuesta dada por un FPM al ítem 3 a través de los objetos primarios del EOS. Recordando que el ítem 3 evidencia errores de tipo E3 y errores de la dimensión de procedimientos del EOS. Se ha seleccionado esta respuesta por la riqueza que presenta en los desarrollos realizados, pues a pesar de presentar errores, tiene procedimientos bastante completos que dejan evidenciar de forma explícita y muy detallada las dimensiones de los objetos primarios que fueron abordados en la respuesta del FPM.

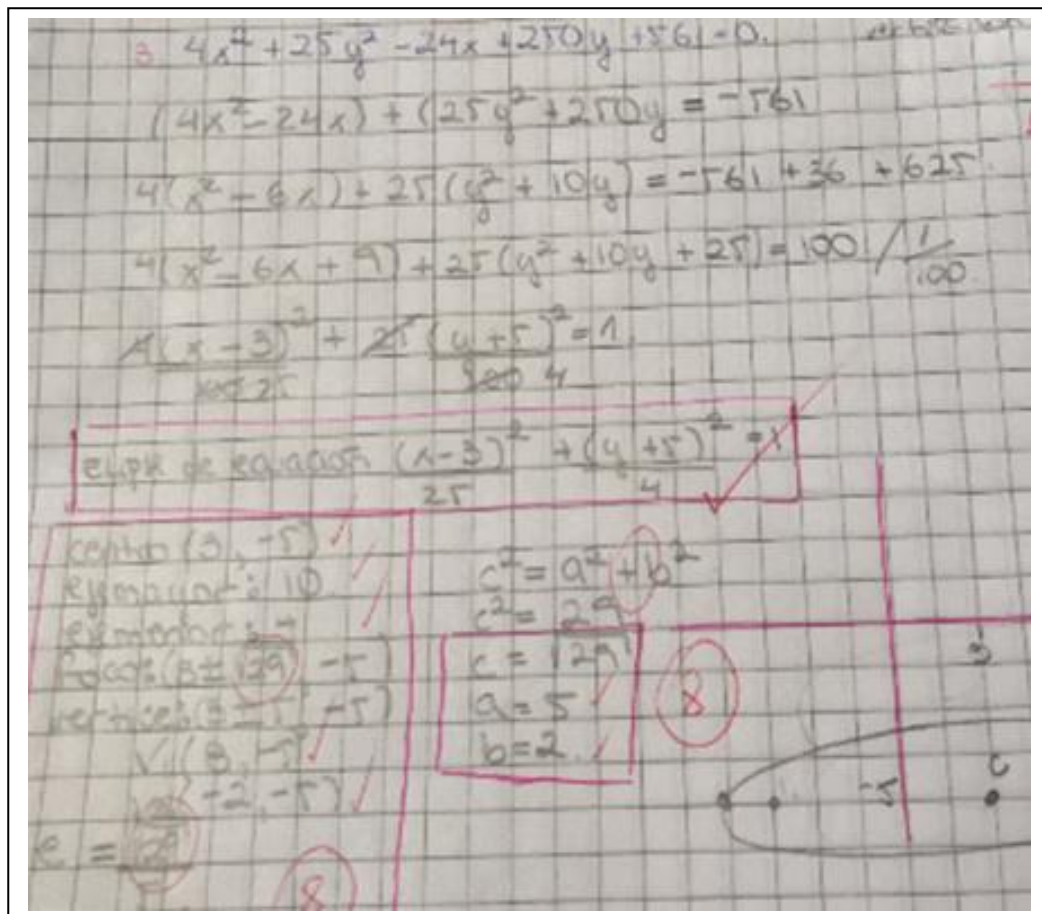
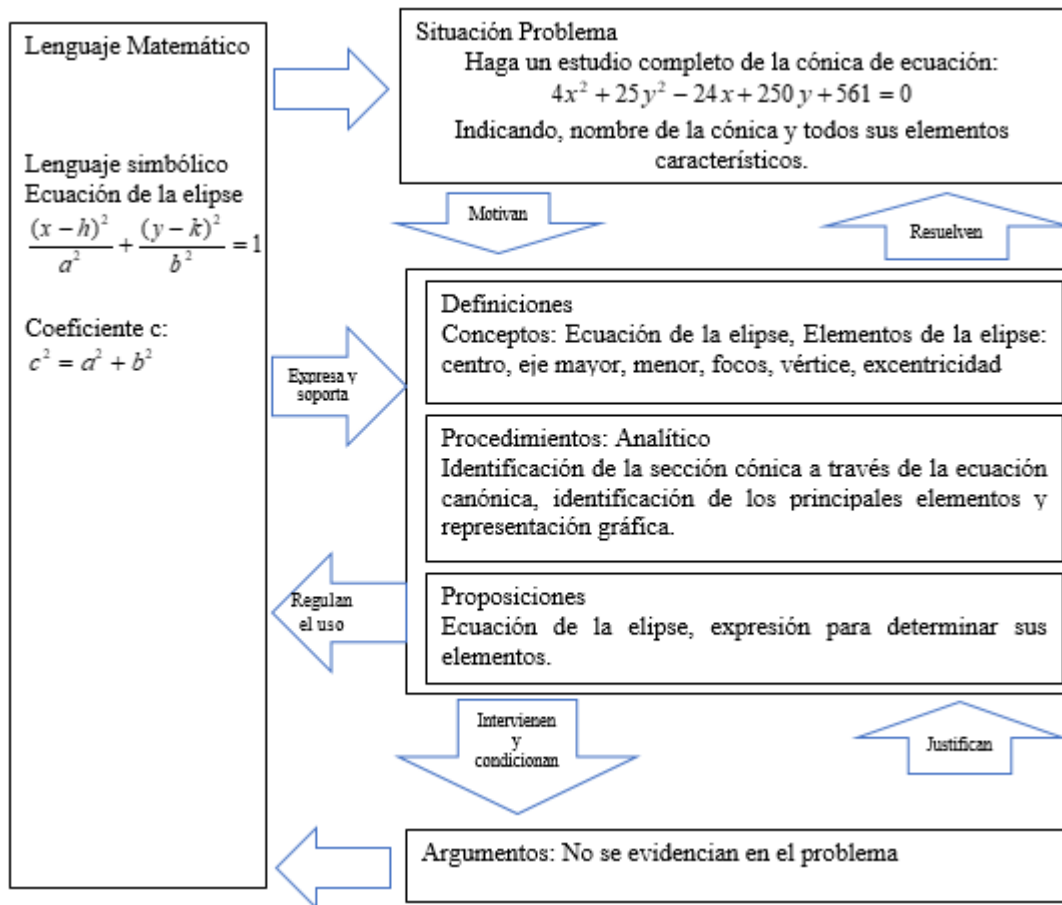


Figura 50: Respuesta de estudiante en ítem 3

Esquema 3: Objetos primarios en actividad evaluativa del ítem 3



Para el análisis realizado a la respuesta seleccionada del ítem 3, es posible observar que el procedimiento presentado por el estudiante, es bastante completo; si bien no alcanza el puntaje máximo solicitado, si está cercano a este, ya que solo comete un error de cálculo en uno de los pasos de su desarrollo. Considerando el análisis bajo los objetos primarios, se evidencia la totalidad de la presencia de estos, se utilizan proposiciones explícitas, se observa detalladamente el procedimiento realizado, los conceptos empleados son adecuados y el tipo de lenguaje aplicado en la resolución.

A pesar de ello, no es evidenciable la dimensión Argumentos de los objetos primarios, ya que en este caso pueden estar presentes de manera implícita y, por lo tanto, no son totalmente visibles para describirlos en el análisis.

Considerando el desarrollo realizado por este estudiante, es posible señalar que el error que se muestra, es analítico ya que hace mal uso de la fórmula para calcular el valor del coeficiente "c" y esto conlleva a calcular erróneamente la excentricidad de la cónica.

CAPÍTULO V
CONCLUSIONES, LIMITACIONES Y PROYECCIONES

En este capítulo se presentan las conclusiones, limitaciones y proyecciones, a partir del trabajo realizado en esta investigación. Primeramente, se presentan las conclusiones por objetivo específico, luego las limitaciones evidenciadas durante la investigación y por último las proyecciones que surgen a través de este trabajo.

5.1 Conclusiones

En el primer capítulo presentado en esta investigación se define el objetivo general cuyo propósito es analizar los textos universitarios y analizar los tipos de errores que comenten los FPM en la realización de actividades evaluativas relacionadas con la ecuación cuadrática bidimensional. De este objetivo general se desprenden tres objetivos específicos relacionados con los dos grandes focos que se abordan en este estudio, análisis de textos y análisis de errores.

De acuerdo a ello a continuación, se presenta los objetivos específicos y la conclusión en relación a cada uno de ellos:

(OE1): Indagar acerca de la estructura de los textos utilizados por los futuros profesores de matemática de la Universidad Católica de la Santísima Concepción, respecto de la ecuación cuadrática bidimensional.

En la indagación acerca de la estructura de la ecuación cuadrática bidimensional en los textos, se consideraron para el análisis un total de 9 textos agrupados en 3 categorías: textos universitarios utilizados en la bibliografía presentada en los programas de estudio de las carreras de Pedagogía Media en Educación Matemática, textos universitarios utilizados en la bibliografía presentada en los programas de estudio de la carrera de Ingeniería Civil y un texto escolar del Ministerio de Educación que desarrolla el objeto matemático en estudio, es decir, la ecuación cuadrática bidimensional.

El análisis realizado, consideró la estructura de los textos y cómo estos abordan el objeto matemático, tanto en su descripción, como en sus actividades, problemas y ejemplos presentados. De acuerdo a ello y considerando la estructura de los textos, se subdividió en tradicional y no tradicional, donde el 89% de los textos analizados posee una estructura tradicional en cuanto a la presentación de sus contenidos y actividades, lo que deja entrever que los textos siguen una misma funcionalidad a través del tiempo, ya que, a pesar de ser textos actualizados, estos no presentan mayores cambios en la presentación de su estructura, por ello se concuerda con lo evidenciado en la investigación de Burgos et.al (2019) en cuanto a un modelo instruccional característico de los libros de texto.

Asimismo, durante la observación del análisis de los textos y los conceptos que estos abordan, se evidenció que no todos abordan teóricamente el objeto matemático en estudio, sino que lo aplican de forma implícita al trabajar conceptos asociados a la ecuación cuadrática bidimensional. De esta forma,

es posible evidenciar que a pesar de ser textos guía para el desarrollo de la asignatura y el estudio independiente de los FPM, estos no cuentan con el desarrollo completo de los contenidos y conceptos necesarios y mínimos que deben estar presentes en los textos para desarrollar un estudio acorde con el curso, por ejemplo, la sección de rotaciones de ejes de la ecuación cuadrática bidimensional general.

Por otra parte, durante el análisis de textos se indagó acerca de la presencia de los objetos primarios en los temas desarrollados en cada texto respecto a la ecuación cuadrática bidimensional. De acuerdo a ello se observa un déficit del trabajo de los textos en algunas de las dimensiones de los objetos primarios, por ejemplo, las Definiciones y Conceptos en T4P y T8M, las Argumentaciones en los textos T8M y T9O. Es interesante indicar que el texto T8M correspondiente al nivel de 3° año de enseñanza media entregado por el Ministerio de Educación, es el texto que analizado en su estructura presenta déficit en abordar los contenidos del objeto matemático en estudio a través de las dimensiones de los objetos primarios del EOS, en que según las Bases Curriculares correspondiente a la asignatura matemática, este debe promover la habilidad de argumentar comunicar, entre otras.

En cuanto a la utilización de representaciones gráficas en los textos, se observó la escasa presencia y uso de ello en los libros revisados. Esto, debido a que se describen los conceptos relacionados a la ecuación cuadrática bidimensional, pero no en todos los textos se presenta paralelamente las representaciones gráficas de lo explícito en la teoría, por lo tanto, no se potencia el uso de gráficas que faciliten la comprensión del objeto matemático en estudio y por consiguiente otorgar elementos que generen aprendizajes significativos.

De lo mencionado anteriormente, y de la exhaustiva revisión de los nueve textos en estudio, se destaca la utilización de procedimientos en todos los textos analizados, facilitando de cierta forma el estudio independiente de los FPM. Coincidimos con lo que mencionan Burgos et.al (2019) de acuerdo a la presentación de problemas resueltos, que en el caso de los objetos primarios del EOS corresponde a la dimensión de procedimientos, ya que son evidenciados en un 100% de los textos analizados. A pesar de ello es necesario mencionar a modo de conclusión que los textos que forman parte de los programas de estudios de los FPM son elaborados utilizando una misma estructura, enfocada en la elaboración de textos cuyo objetivo es abordar situaciones que se resuelven principalmente de forma analítica dejando de lado la utilización de argumentos y demostraciones algebraicas.

Por otro lado, los campos de problemas definidos en esta investigación para la ecuación cuadrática bidimensional son abordados total o parcialmente por la totalidad de los textos analizados.

(OE2): Identificar y caracterizar los errores que comenten los futuros profesores de matemática en las respuestas dadas a actividades evaluativas sobre la ecuación cuadrática bidimensional.

El segundo objetivo, fue identificar y caracterizar los errores evidenciados en las respuestas realizadas

por los FPM cuando resuelven actividades evaluativas. Durante lo desarrollado en el capítulo 4 se identificaron los principales errores cometidos por el grupo que forma parte del estudio. De los 7 ítems seleccionados para este análisis se evidencia los tipos de errores cometidos por los FPM, errores que están explícitamente escritos en las actividades evaluativas. Dichos errores ocurren generalmente por la falta de comprensión por parte de los FPM para resolver un problema, y ello conlleva de forma inmediata a un error posterior en el desarrollo del ítem.

Los errores identificados durante la revisión y análisis de las respuestas de los FPM a las actividades evaluativas, tiene estrecha relación con los objetos primarios del enfoque ontosemiótico y con los errores definidos por Radatz. Estos errores se clasifican de acuerdo a la información obtenida de todas las evaluaciones revisadas, llegando a errores de tipo E1, E2 y E3 según la clasificación descrita en la Tabla 21.

De los errores mencionados, el que mayor concentración presenta es el error de tipo procedimental, esto debido a la falta de comprensión por parte de los estudiantes al momento de resolver el problema planteado en la actividad evaluativa. Además, estos errores se derivan por el mal desarrollo algorítmico de los procedimientos aplicados, ya que en muchas ocasiones las respuestas no son desarrolladas completamente, se omiten pasos y eso genera un error. Asimismo, estos errores ocurren al momento de determinar la ecuación de una sección cónica, de sus elementos característicos, aplicando la ley de los signos, o al momento de factorizar una expresión para obtener la forma canónica.

Por otra parte se conjetura que el grupo estudio de esta investigación no cuenta con las herramientas necesarias para abordar adecuadamente las actividades evaluativas, en particular el objeto matemático estudiando en esta investigación, lo que queda demostrado en las escasas respuestas a los problemas planteados, donde se observa la falta de conocimiento en conceptos básicos asociados a la ecuación cuadrática bidimensional, al igual que en la gran cantidad de respuestas erróneas revisadas que están presentes en los 7 ítems analizados, por lo tanto, los FPM no evidencian tener los conocimientos necesarios para enfrentar los problemas presentados. En cuanto a los errores por argumentación, estos se derivan de la mínima capacidad de los FPM por argumentar la respuesta dada en los problemas, ya que solo se limitan a realizar los cálculos numéricos básicos para llegar a la respuesta, sin respaldar correcta y completamente dichas soluciones. De ello, se observa que los FPM no son capaces de abordar dicha habilidad, y que por lo tanto, se va transformando en un error constante a lo largo de sus estudios, lo cual podría incluso ser observado en su futuro desempeño profesional, ya que “argumentar” corresponde a una de las cuatro habilidades que deben adquirir los estudiantes de enseñanza básica y media, y debe ser el profesor quien promueva dicha habilidad, por ello es absolutamente necesario e imprescindible que se trabaje dicha habilidad desde todas las perspectivas posibles y que queden plasmadas como un elemento

necesario en la formación académica de los FPM.

El estudio de la ecuación cuadrática bidimensional se realiza tanto de forma analítica como gráfica, es por ello que el estudio de las secciones cónicas se realiza desde ambas perspectivas; durante la revisión de las actividades evaluativas y la identificación de los errores observados, se aprecia por parte de los FPM la poca conexión entre las gráficas de las secciones cónicas y la ecuación cuadrática general bidimensional, siendo esta falta de conexión un elemento importante en la generación de errores ya que solo una parte del grupo de estudio traza correctamente la gráfica e identifica de la misma forma los elementos asociados. Ante ello, se evidencia que los FPM solo se concentran en la resolución analítica de los problemas, dando prioridad al cálculo numérico y no así a las representaciones.

De acuerdo al análisis de errores se debe poner énfasis y reforzar de acuerdo a los estándares de formación de profesores de matemática (Mineduc 2010), la capacidad de conducir a los FPM hacia el aprendizaje correcto y completo de la ecuación cuadrática bidimensional, generando la necesidad por parte de ellos de comprender el estudio tanto analítico como gráfico del concepto, no solo por ser un contenido del curso, sino también por ser parte del programa de estudio de los cursos de enseñanza media, confiando así la enseñanza correcta del objeto matemático en la identificación del concepto, sus elementos, su representación y los teoremas que dan sustento a lo aplicado.

Objetivo Específico 3 (OE3): Identificar la relación que existe entre los textos declarados en la bibliografía de la asignatura (introducción al análisis) cursada por los futuros profesores de matemática de la Universidad Católica de la Santísima Concepción y los errores que cometen los mismos en la resolución de actividades evaluativas respecto a la ecuación cuadrática bidimensional.

El tercer y último objetivo consiste en identificar la relación entre los dos grandes focos de análisis revisados durante esta investigación, análisis de texto y análisis de errores. Para cada uno de estos focos se realizó un análisis exhaustivo de la información presente tanto en los textos, como en las actividades evaluativas rendidas por los FPM.

Los textos representan una fuente inagotable de información y estudio, corresponden a una herramienta necesaria para cualquier estudiante y son el respaldo necesario e imprescindible de la teoría que sustenta algún contenido matemático. De esta forma, los textos están presentes en los programas de estudio de los cursos, pues representan la bibliografía tanto mínima como complementaria que permite a los FPM reforzar los contenidos y conceptos revisados en la clase.

Luego del estudio realizado a lo largo de esta investigación, podemos evidenciar la existencia de al menos 4 conexiones entre ambos focos de estudio: la primera tiene que ver con las *representaciones gráficas* pues se observó en los textos analizados la escasa utilización de representaciones gráficas que modelen las situaciones relacionadas a secciones cónicas, de la misma forma, del análisis de las respuestas de los

FPM a las actividades evaluativas una gran cantidad de estas respuestas evidencian errores relacionados con las representaciones gráficas de la ecuación cuadrática bidimensional. Por otra parte, una segunda conexión tiene que ver con los *procedimientos* pues se observó que todos los textos analizados, contemplan secciones enfocadas en entregar procedimientos a actividades como ejercicios y problemas, pero no siempre estos procedimientos son completos, ya que en ocasiones son dados de forma simple y acotada, es decir, solo resolviendo las actividades a partir de una secuencia de pasos mínimos. De la misma forma del análisis de las respuestas dadas por los FPM en los ítems una gran cantidad de respuestas son respuestas acotadas y que evidencian un gran número de errores de procedimientos, lo que nos induce a concluir que el estudiante no logre dar respuesta efectiva a los problemas planteados.

Una tercera conexión es en la dimensión de la *Argumentación* pues se evidencia que los textos analizados no aportan en promover dicha habilidad, pues se observó escaso trabajo en relación a la argumentación. De la misma forma se ha observado del análisis de las respuestas de los FPM a las actividades evaluativas una escasa argumentación en los procedimientos realizados que lleven a una respuesta correcta de parte de los FPM.

Finalmente, la cuarta conexión es la *formalidad* que existe en los textos escolares y universitarios utilizados en el análisis pues presentan un lenguaje formal en sus ejemplos y enunciados de actividades (demostrar, probar), al igual que en los ítems planteados como actividades evaluativas.

5.2 Limitaciones

Durante la realización de esta investigación se evidenció algunas limitaciones que surgen a lo largo del estudio y que dificultaron en cierta medida lo realizado. Algunas limitaciones son:

- 1) Metodología implementada por el profesor que dictó el curso de introducción al análisis, ya que no se tiene información al respecto, es por ello que se dan ciertas conjeturas acerca del aprendizaje de los estudiantes.
- 2) Características de los participantes del estudio, ya que solo se tuvo algunos datos generales correspondientes al grupo de FPM, y de la asignatura Introducción al Análisis por los que se dispuso del listado bibliográfico referenciado en la actividad curricular (programa de la asignatura) y de las respuestas dadas por los FPM a las actividades evaluativas.
- 3) Conocer en qué medida se utilizan los textos por parte de los estudiantes para el estudio independiente de la asignatura, por lo tanto, no hay evidencia que permita conocer cuánto y cuáles textos de la bibliografía tienen mayor uso para el logro de los aprendizajes de la ecuación cuadrática bidimensional.

5.3 Proyecciones

Algunos de los trabajos futuros que se pueden proyectar a partir de esta investigación son:

- 1) Diseñar una metodología basada en errores, de modo que los estudiantes puedan reconstruir su proceso de aprendizaje.
- 2) Analizar los obstáculos y las dificultades como objeto de análisis en el estudio de la ecuación cuadrática bidimensional.
- 3) Diseñar instrumentos de evaluación que considere los campos de problemas propuestos en esta investigación sobre la ecuación cuadrática bidimensional, con el fin de medir de mejor manera los aprendizajes de los estudiantes.
- 4) Proponer un diseño de enseñanza basado en el análisis bibliográfico de textos con el propósito de mejorar las respuestas de los estudiantes ante tareas o actividades de aprendizaje que adquieran mayores competencias en la resolución de problemas.
- 5) Analizar otros objetos matemáticos de acuerdo a lo desarrollado en esta investigación ya que el marco de referencia del enfoque ontosemiótico permite ampliar la variedad de conceptos matemáticos y temas a estudiar.
- 6) Elaboración de material de enseñanza adecuada a los FPM de la UCSC en la asignatura de Introducción al Análisis que surgen de esta investigación de modo que se desarrollen los campos de problemas de algún tópico en particular que permita mejorar los aprendizajes de los estudiantes.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Referencias Bibliográficas

- Abrate, R., Pochulu, M., y Vargas, J., (2006). *Errores y dificultades en matemática. Análisis de causas y sugerencia de trabajo*. Universidad Nacional de Villa María, Córdoba, Argentina.
- Alvarado, H., y Batanero, C. (2008). Significado del teorema central del límite en textos universitarios de probabilidad y estadística. *Estudios pedagógicos (Valdivia)*, 34(2), 7-28.
- Ávila, H., (2006). *Introducción a la metodología de la investigación*. Juan Carlos Martínez Coll.
- Balcaza Bautista, T., Contreras de la Fuente, Á., & Font Moll, V. (2017). *Análisis de Libros de Texto sobre la Optimización en el Bachillerato*. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, 31(59), 1061-1081.
- Barrantes, M., Zapata, M. (2008). *Obstáculos y errores en la enseñanza-aprendizaje de las figuras geométricas*. *Campo abierto* vol. 27, n°1.
- Bautista, T. B. (2018). *Investigación acerca de la enseñanza y el aprendizaje de la optimización en Bachillerato, desde la perspectiva del Enfoque Ontosemiótico y de la Teoría de los Registros de Representación Semiótica*. Universidad de Jaén, España.
- Bautista, T. B., de la Fuente, Á. C., y Moll, V. F. (2017). *Análisis de Libros de Texto sobre la Optimización en el Bachillerato*. *Boletim de Educação Matemática*, 31(59), 1061-1081.
- Bernabeu, M., León, T., Jiménez, M., y Matos, C., (2009). *Tratamiento de los errores frecuentes en el aprendizaje de la matemática, el español y las ciencias naturales*. Ministerio de Educación, Ciudad de La Habana, Cuba.
- Blanco, M. T. F. (2012). *Una aproximación ontosemiótica a la visualización y el razonamiento espacial* (Doctoral dissertation, Universidad de Santiago de Compostela).
- Bonilla, D., y Parraguez, M. (2013). *La Elipse desde la perspectiva de la Teoría de los Modos de Pensamiento*.
- Burgos, M., Castillo, M. J., Beltrán-Pellicer, P., Giacomone, B., y Godino, J. D. (2019) *Análisis didáctico de una lección sobre proporcionalidad en un libro de texto de primaria con*

herramientas del enfoque ontosemiótico.

- Cobo, B. (2003). *Significado de las medidas de posición central para los estudiantes de secundaria*. Departamento de Didáctica de la matemática. Universidad de Granada.
- Contreras, A.; García, M. y Font, V. (2012). *Análisis de un proceso de estudio sobre la enseñanza del límite de una función*. Bolema, Rio Claro (SP), v. 26 n. 42B.
- Contreras, A.; Ordoñez L. y Wilhelmi, M. (2010). *Influencia de las pruebas de acceso a la Universidad en la enseñanza de la integral definida en el Bachillerato*. Enseñanza de las Ciencias, Barcelona, v. 28, n. 3.
- Cordero, F., y Flores, R., (2007). *El uso de las gráficas en el discurso matemático escolar. Un estudio socioepistemológico en el nivel básico a través de los libros de texto*. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, v. 10.
- Del Mar, M., Batanero, C., y Gea, M., (2019). *¿Conocen los futuros profesores los errores de sus estudiantes en la inferencia estadística?* Bolema, Rio Claro (SP), v. 33, n. 64, p. 672-693.
- Dulzaides Iglesias, M. E., & Molina Gómez, A. M. (2004). *Análisis documental y de información: dos componentes de un mismo proceso*. Acimed, 12(2), 1-1.
- Engler, A., Gregorini, M. I., Müller, D., Vrancken, S., y Hecklein, M. (2015). *Los errores en el aprendizaje de matemática*. Revista Premisa, 6(23), 23-32.
- Font, V., Godino, J. (2006). *La noción de configuración epistémica como herramienta de análisis de textos matemáticos: su uso en la formación de profesores*. Educ. Mat. Pesqui., São Paulo, v. 8, n. 1, pp. 67-98.
- Gea, M. M. (2014). *La correlación y regresión en bachillerato: análisis de libros de texto y del conocimiento de los futuros profesores* (Doctoral dissertation, Universidad de Granada).
- Gea, M. M., Batanero, C., Fernandes, J. A. y Gómez, E. (2014). *La distribución de datos bidimensionales en los libros de texto de matemáticas de Bachillerato*. Cuadrante, 23(2), 147-172.

- Godino, J. D., y Batanero, C. (1994). *Significado institucional y personal de los objetos matemáticos*. *Recherches en didactique des Mathématiques*, 14(3), 325-355.
- Godino, J. D., Batanero, C., y Font, V. (2009). *Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática*. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, 39, 127-135.
- Godino, J. D., Giacomone, B., Batanero, C., y Font, V. (2017). *Enfoque ontosemiótico de los conocimientos y competencias del profesor de matemáticas*. *Boletim de Educação Matemática*, 31(57), 90-113.
- Hernández, R. Fernández, C. y Baptista, P. (2010). *Metodología de la Investigación*, (5ta Ed). México: Mc Graw Hill.
- Kilpatrick, J. Gómez, P. y Rico, L. (1998). *Educación matemática, Errores y dificultades de los estudiantes, Resolución de problemas, Evaluación, Historia*. Bogotá.
- Kindle, J. (1999). *Geometría Analítica*. Editorial McGraw-Hill.
- Larson, R. Hostetler R. Edwards B. (1999). *Cálculo y Geometría analítica Sexta Edición Volumen 2*.
- Lehmann, C. (1993). *Geometría Analítica*. Limusa/Grupo Noriega Editores. Stewart J. Redlin L.
- Leithold, L. (1992). *Cálculo con Geometría Analítica*. Editorial Harla.
- Llanes, L., Ibarra Olmos, S. E., & Hernández, J. A. (2017). *Análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas de bachillerato sobre ecuaciones cuadráticas*.
- Martínez, J., (2008). *Los libros de texto como práctica discursiva*. *Revista de la Asociación de Sociología de la Educación*, v. 1, n°1.
- Martínez, A. y Arrieche, M. (2010). *Configuraciones epistémicas y desarrollo histórico de la ecuación de segundo grado como recurso didáctico*. Universidad Pedagógica Experimental Libertador-Maracay, Venezuela.
- Minnard, C. (2016). *Análisis de los errores en matemática de los alumnos ingresantes a las carreras*

- de Ingeniería: el Test Diagnóstico en la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de Lomas de Zamora. Revista Iberoamericana de Producción Académica y Gestión Educativa.*
- Ministerio de Educación (2015). *Bases Curriculares 7° básico a 2° medio*. Chile.
- Ministerio de Educación (2012). *Estándares Orientadores para carreras de pedagogía en Educación Media, Estándares pedagógicos y disciplinares*, Chile.
- Neira, G., (2017). *Dificultades, conflictos y obstáculos en las prácticas educativas universitarias de iniciación al cálculo diferencial —peuc— en estudiantes de ingeniería*. Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Doctorado Interinstitucional en Educación-DIE, Énfasis Educación Matemática, Bogotá.
- Nortes Martínez-Artero, R., y Nortes Checa, A. (2016). *Resolución de problemas, errores y dificultades en el grado de maestro de primaria*. Revista de Investigación Educativa, 34(1).
- Parra, Y., y Pino-Fan, L., (2017). *Análisis Ontosemiótico de libros de textos chilenos: el caso del concepto de función*. Universidad San Sebastián, Universidad de Los Lagos.
- Pino, J., y Estepa, A., (2017). *Análisis del tratamiento de la dispersión en libros de texto de 3° y 4° curso de la Educación Secundaria Obligatoria*. Universidad de Jaén, España.
- Reyes, M., (2017). *Análisis didáctico de dos textos escolares diseñados con un enfoque intercultural*. Universidad de Granada, España.
- Saiz, O., y Blumenthal, V., (2009). *Texto del estudiante 3ero medio*. Ediciones Caly canto, Santiago, Chile.
- Sánchez, D., Montes, C., & Luque, C. J. (2005). Solución de ecuaciones cuadráticas a partir de los elementos de Euclides.
- Swokowski-Cole (2006). *Algebra y Trigonometría con Geometría Analítica*. Editorial Thompson Editores.
- Swokowski. (1989). *Cálculo con Geometría Analítica*. Grupo Editorial Iberoamericano.
- Tomas B. G. Finnney R. (1997). *Calculo con geometría analítica* Editorial Addison – Wesley.

Universidad Católica de la Santísima Concepción, Facultad de Ingeniería, Departamento de matemática y física aplicadas (2018). *Programa de actividad curricular, Cálculo 1*.

Universidad Católica de la Santísima Concepción, Facultad de Ingeniería, Departamento de matemática y física aplicadas (2018). *Programa de actividad curricular, Introducción al análisis*.

Universidad Católica de la Santísima Concepción, Facultad de Ingeniería, Departamento de matemática y física aplicadas (2018). *Programa de actividad curricular, Geometría del espacio*.

Urbano S. (2017). *Errores matemáticos en los libros de texto de matemáticas de sexto curso de educación primaria de Singapur. Una ventana abierta a una nueva forma de enseñar matemáticas*, España.

Uribe M. (2015). *Análisis de errores en matemática*, Departamento de Matemática y Física Aplicadas Universidad Católica de la Santísima Concepción. Chile.

Vieytes, R., (2004). *Metodología de la investigación en organizaciones, mercado y sociedad: epistemología y técnicas*. Editorial de las ciencias.

Zill Dewer (2012). *Algebra y Trigonometría*. Segunda Edición. Editorial Mc Graw Hill.

Linkografía

García, J. (2010). *Análisis de errores y dificultades en la resolución de tareas algebraicas por alumnos de primer ingreso en nivel licenciatura*. Trabajo de Grado). Universidad de Granada, Facultad de Ciencias de la Educación, Granada, España. Facultad de Ciencias de la Investigación. Valencia, Venezuela. Recuperado de [http://produccion-uc. bc. uc. edu. ve/documentos/trabajos B, 7000281](http://produccion-uc.bc.uc.edu.ve/documentos/trabajos B, 7000281).

Godino J. Batanero C. y Font V. (2007). *Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y de la Instrucción Matemáticos EOS*. Recuperado de: <http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/>

Universidad Católica de la Santísima Concepción, Facultad de Educación, Pedagogía en Educación Media en Matemática (2019). Recuperado de: <https://educacion.ucsc.cl/carreras/pedagogia-en-educacion-media-en-matematica/>

PAUTA EVALUACIÓN TESIS DE MAGÍSTER (Tipo Académico)

Título de la Tesis: Análisis de Textos y Análisis de Errores en futuros profesores de matemática frente a actividades evaluativas sobre la ecuación cuadrática bidimensional bajo el Enfoque Ontosemiótico

Autor(a)	Pilar Angélica Marín Ortega
Director de Tesis	Marco Uribe Santibáñez
Programa	Magíster Didáctica de la Matemática
Nombre del Evaluador	Maritza Galindo Illanes

Nota: Evalúe de 1.0 a 7.0 cada uno de los indicadores que se presentan esta pauta.

Aspectos Formales (10%)

Indicadores	Nota
1. Presentación de la Tesis de acuerdo a formato oficial	7.0
2. Índice (de contenidos, gráficos y/o figuras)	7.0
3. Resumen (en español e inglés)	7.0
4. Correcto uso de ortografía	6.8
5. Redacción coherente con escritura científica de la especialidad	6.5
6. Referencias y citas de acuerdo a Norma APA, 6ª Edición	6.0
Promedio	6.7

Formulación del Problema (20%)

Indicadores	Nota
7. Construcción del objeto de estudio a partir de la presentación de antecedentes contextuales, teóricos y empíricos	5.0
8. Supuestos o hipótesis de trabajo en correspondencia con el objeto de estudio	5.0
9. Formulación de la interrogante de investigación	6.5
10. Relevancia del problema de investigación en el contexto de la disciplina	6.5
11. Objetivos formulados con claridad y coherentes con el problema y el objeto de estudio.	6.0
Promedio	6.0

Marco Teórico (20%)

Indicadores	Nota
12. Antecedentes teóricos: presentación ordenada y coherente de los capítulos, apartados y sub apartados teóricos que sustentan la investigación	6.5
13. Aproximación al estado de arte de la problemática de investigación	5.0
14. Pertinencia, relevancia y actualización de las fuentes de referencia para la investigación	5.5
Promedio	5.7

**Marco Metodológico (20%)**

Indicadores	Nota
15. Paradigma y Enfoque de la investigación	7.0
16. Diseño de la investigación: operacionalización de la investigación en fases	6.0
17. Muestra o Participantes	4.0
18. Estrategias, técnicas e instrumentos de recogida de datos	4.0
19. Estrategias de análisis de datos	7.0
20. Criterios de rigor científico	5.5
Promedio	5.6

De los Resultados (20%)

Indicadores	Nota
21. Presentación de resultados de forma clara y sintética	6.5
22. Procesamiento, análisis e interpretación de los resultados o hallazgos	6.0
23. Tablas, figuras o gráficos bien contruidos	7.0
Promedio	6.5

Conclusiones, Discusión y Proyecciones (10%)

Indicadores	Nota
24. Conclusiones respecto de los objetivos propuestos	7.0
25. Discusión de resultados, según el marco teórico referencial y el estado del arte	5.0
26. Limitaciones y proyecciones del estudio	6.0
Promedio	6.0

Calificación Final

	Promedio Calificación (de 1.0 a 7.0)	Porcentaje	Ponderación
Aspectos Formales	6.7	10%	0.67
Formulación del Problema	6.0	20%	1.2
Marco Teórico	5.7	20%	1.14
Marco Metodológico	5.6	20%	1.12
Resultados	6.5	20%	1.3
Conclusiones y Discusión	6.0	10%	0.6
Calificación Final		6.0	

Observaciones y/o Comentarios: La tesis está aprobada. Las observaciones están en el escrito.


Maritza Galindo Iñanes
Universidad San Sebastián
Facultad de Economía y Negocios

Fecha: 14 de enero del 2020

PAUTA EVALUACIÓN TESIS DE MAGÍSTER (Tipo Académico)

Título de la Tesis: Análisis de textos y análisis de errores en futuros profesores de matemática frente a actividades evaluativas sobre la ecuación cuadrática bidimensional bajo el enfoque ontosemiótico

Autor(a)	Pilar Angélica Marín Ortega
Director de Tesis	Marco Uribe Santibáñez
Programa	Magíster Didáctica de la Matemática
Nombre del Evaluador	Hugo Alvarado Martínez

Nota: Evalúe de 1.0 a 7.0 cada uno de los indicadores que se presentan esta pauta.

Aspectos Formales (10%)

Indicadores	Nota
1. Presentación de la Tesis de acuerdo a formato oficial	7.0
2. Índice (de contenidos, gráficos y/o figuras)	7.0
3. Resumen (en español e inglés)	7.0
4. Correcto uso de ortografía	7.0
5. Redacción coherente con escritura científica de la especialidad	6.0
6. Referencias y citas de acuerdo a Norma APA, 6ª Edición	5.0
Promedio	6.5

Formulación del Problema (20%)

Indicadores	Nota
7. Construcción del objeto de estudio a partir de la presentación de antecedentes contextuales, teóricos y empíricos	6.0
8. Supuestos o hipótesis de trabajo en correspondencia con el objeto de estudio	1.0
9. Formulación de la interrogante de investigación	5.0
10. Relevancia del problema de investigación en el contexto de la disciplina	6.0
11. Objetivos formulados con claridad y coherentes con el problema y el objeto de estudio.	5.0
Promedio	4.6

Marco Teórico (20%)

Indicadores	Nota
12. Antecedentes teóricos : presentación ordenada y coherente de los capítulos, apartados y sub apartados teóricos que sustentan la investigación	7.0
13. Aproximación al estado de arte de la problemática de investigación	6.0
14. Pertinencia, relevancia y actualización de las fuentes de referencia para la investigación	6.5
Promedio	6.5

Marco Metodológico (20%)

Indicadores	Nota
15. Paradigma y Enfoque de la investigación	6.0
16. Diseño de la investigación: operacionalización de la investigación en fases	6.0
17. Muestra o Participantes	4.0
18. Estrategias, técnicas e instrumentos de recogida de datos	4.0
19. Estrategias de análisis de datos	6.0
20. Criterios de rigor científico	4.0
Promedio	5.0

De los Resultados (20%)

Indicadores	Nota
21. Presentación de resultados de forma clara y sintética	6.5
22. Procesamiento, análisis e interpretación de los resultados o hallazgos	6.0
23. Tablas, figuras o gráficos bien construidos	6.0
Promedio	6.2

Conclusiones, Discusión y Proyecciones (10%)

Indicadores	Nota
24. Conclusiones respecto de los objetivos propuestos	6.0
25. Discusión de resultados, según el marco teórico referencial y el estado del arte	5.0
26. Limitaciones y proyecciones del estudio	4.0
Promedio	5.0

Calificación Final

	Promedio Calificación (de 1.0 a 7.0)	Porcentaje	Ponderación
Aspectos Formales	6,5	10%	0,65
Formulación del Problema	4,6	20%	0,92
Marco Teórico	6,5	20%	1,30
Marco Metodológico	5,0	20%	1,00
Resultados	6,2	20%	1,24
Conclusiones y Discusión	5,0	10%	0,50
Calificación Final			5,61
			Cinco coma seis y uno

Observaciones y/o Comentarios:

La tesis plantea, en el resumen, como propósito el estudio sobre la ecuación cuadrática bidimensional, basado en el análisis de texto y análisis de errores en futuros profesores de matemática, y como objetivo general analizar los textos universitarios y analizar los tipos de errores que cometen los futuros profesores de matemática frente a la realización de actividades evaluativas relacionadas con la ecuación cuadrática bidimensional bajo un enfoque Ontosemiótico.

En este sentido, los primeros dos objetivos específicos pretendidos atienden a investigar en la estructura de cómo abordan el objeto matemática los libros de texto y promover una tipología de errores caracterizados por futuros profesores de matemática.

En cuanto al objetivo específico 3 (OE3) Identificar la relación que existe entre los textos utilizados por los futuros profesores de matemática y los errores que cometen los mismos en la resolución de actividades evaluativas respecto a la ecuación cuadrática bidimensional, me pregunto si podemos plantear la existencia de una relación directa entre ambos procedimientos. Esto se fundamenta en las conclusiones donde se declaran las falencias del grupo de estudiantes en la falta de conocimientos pp. 124 y sobre todo en las limitaciones mencionadas referida, por ejemplo, al desconocimiento de los participantes del estudio. Preocupante resulta medir el OE3 si una de las limitaciones fue desconocer si los estudiantes usaron libros de texto pp. 126 en su experiencia de aprendizaje curricular del curso. Para este evaluador no se puede llevar a cabo este objetivo específico bajo las condiciones metodológicas poco claras. Cómo dar respuesta a la primera pregunta de investigación, si no hay evidencia si los estudiantes estudian por libros sino más bien por un listado de ejercicios dados por el profesor, ¿Los textos que utilizan los estudiantes para el estudio de la ecuación cuadrática bidimensional pueden inducir a errores en el aprendizaje de la ecuación cuadrática? pp. 27.

Echo de menos en las conclusiones las implicaciones del estudio para la enseñanza del tema. Sugiero ampliar los alcances y proyecciones de este trabajo en cuanto a las orientaciones de un diseño de enseñanza del tema. Algunas cuestiones: ¿cuáles serían los elementos de significado de una propuesta de diseño del tema? ¿qué rol tienen las TIC en el proceso de aprendizaje de este objeto matemático? ¿Cómo establecer niveles de profundización y conexiones entre los constructos considerando en las tareas de resolución de problemas las conductas de entrada de los estudiantes?

El diseño metodológico se sustenta en un enfoque cualitativo de tipo descriptivo, con dos ejes de análisis: la metodología de análisis de contenido en una muestra de nueve textos de álgebra y cálculo y un texto escolar años 1992 a 2012 y un análisis de errores detectado en una muestra de 27 estudiantes en formación de matemática sobre la ecuación cuadrática bidimensional en un cuestionario de siete ítems.

En cuanto al primer eje de análisis, hubiese sido interesante contar con textos variados y no sólo de estructura tradicional, por ejemplo, algunos que promuevan el uso de tecnologías de acuerdo a las nuevas orientaciones en educación matemática.

Respecto de la metodología de análisis de errores en estudiantes considero que carece de sustento en cuanto a la elaboración y fundamentación de los propósitos de analizar 7 ítems del tema. Se explica que fueron seleccionados en distintos momentos de aplicación de pruebas durante el proceso de desarrollo del curso; por lo tanto, el cuestionario no fue sometido a evaluación de expertos, no hay ítems que puedan ser comparados con otras investigaciones en el estudio de este objeto matemático o con conceptos matemáticos relacionados. Me pregunto

¿qué incidencia tuvo la evolución en el tiempo del campo de problema 1 en las respuestas de los estudiantes de los ítems 1, 2, 3, 6 y 7? ¿Por qué los ítems contienen sólo los campos de problemas 1, 2, 3 y 10 y no los otros, es representativo del significado de referencia? ¿Cómo fue llevada la enseñanza de la ecuación cuadrática bidimensional en el curso, hubo retroalimentación, las clases se desarrollaron en el aula y laboratorio de computación ..., son elementos que pueden incidir en las respuestas?

A mi modo de ver los ítems no dan cuenta de analizar distintas representaciones, la mayoría son formuladas con lenguaje formal, usando los verbos, determine, hallar, dada, etc. Los ítems 6 y 7 son confusos, qué se entiende por "haga un estudio lo más completo posible" y "haga un estudio completo" pp. 107 y 110. No concuerdo con la afirmación que los enunciados de cada ítem son explícitos pp.115 y que no hubo errores en el lenguaje. Sugiero dar la solución de cada ítem, en términos de se espera que el estudiante desarrolle... en lugar de plantear una solución experta.

La tesis contribuye a repensar la enseñanza de la ecuación cuadrática bidimensional en la formación de profesores, presenta escasos errores tipográficos a lo largo de los capítulos. Se sugiere atender los siguientes aspectos:

Completar referencias según investigaciones relacionadas con el objeto matemático de estudio, así como seguir la escritura según las normas APA. Fundamentar ¿Por qué es importante estudiar y analiza el objeto matemático ecuación cuadrática bidimensional en el currículo de matemática y su alcance en el currículo universitario?

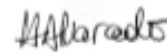
Explicar acerca de la formación matemática de profesores, perspectiva internacional y local, característica de la carrera con base científica y contexto de innovación pedagógica. ¿Qué alcances tiene esta tesis en los estándares de formación de profesores?

En metodología sugiero dejar la sección 3.6 alcances del estudio para el capítulo V.

¿La introducción de recursos y dispositivos de una propuesta de diseño de enseñanza puede permitir variación en el lenguaje y modos de argumentación de los estudiantes participantes?

Mejorar la introducción y la formulación del problema, ¿cuál es el interés de analizar este objeto matemática y no otras ideas matemáticas fundamentales?

Finalmente, la problemática planteada en este trabajo es de interés en educación matemática, sin embargo, dado la orientación de carácter académico-investigativo, la metodología propuesta no fue la adecuada y que se manifiesta en las limitaciones sección 5.2.



Hugo Alvarado Martínez
Departamento Matemáticas y Física Aplicadas
Facultad de Ingeniería
Universidad Católica de la Santísima Concepción

Fecha: 20 de Enero del 2020.